

# Implizite Parameterschätzung im Variance Gamma Modell und im Constant Elasticity Variance Modell anhand von Optionspreisen

Jan-Erik Tertilt

Geboren am 26. Juli 1988 in Halle, Westfalen

22. November 2011

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer:

Prof. Dr. Michael Griebel

INSTITUT FÜR NUMERISCHE SIMULATION

Dr. Jan Weyer-Menkhoff

CONSERVATIVE CONCEPT PORTFOLIO MANAGEMENT AG

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER  
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN



# Zusammenfassung und Danksagung

## Zusammenfassung

In meiner Bachelorarbeit beschäftige ich mich mit impliziter Parameterschätzung anhand von Optionspreisen. Dazu untersuche ich im ersten Teil die Parameterschätzung im Variance Gamma Modell und im Constant Elasticity Variance Modell aus Preisen Europäischer Optionen. Ich werde die implizit geschätzten Parameter von S&P 500 Futureoptionen aus den Jahren 2009 – 2011 untersuchen. Im zweiten Teil werden Methoden entwickelt bzw. vorgestellt, mit Hilfe derer auch Exotische Optionen zur impliziten Parameterschätzung im Variance Gamma Modell herangezogen werden können. Dabei werde ich mich auf Optionen fokussieren, die vom ganzen kontinuierlichen Pfad des Underlyings abhängen. Zur Bestimmung der Preise der Optionen werde ich auf Multilevel Monte Carlo Methoden zurückgreifen. Außerdem werde ich eine auf das Variance Gamma Modell angepasste Version entwickeln, die sich im Besonderen für die Preisbestimmung von kontinuierlichen Asiatischen Optionen eignet. Zuletzt gebe ich noch die „Griechen“ im Variance Gamma Modell an.

## Abstract

My Bachelor thesis deals with the implicit estimation of parameters on the basis of option prices. In the first part I am analyzing the parameter estimation in the “Variance Gamma Model” and in the “Constant Elasticity Variance Model” from market prices of European Options. I will analyze the implicit estimated parameters of S&P 500 future options of the years 2009-2011.

The second part deals with the estimation potential of Exotic Options in the Variance Gamma Model. I focus on options that depend on the whole continuous path of the underlying. We will see how to price these options with Multilevel Monte Carlo methods. Moreover I develop an adjusted version of the Multilevel-Monte-Carlo method for the “Variance Gamma Model”.

At last I derive the “Greeks” of the “Variance Gamma Model” and explain their meaning.

## **Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Griebel für die Gelegenheit, meine Interessen in einer Bachelorarbeit zu verwirklichen. Ich bedanke mich auch herzlich für die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes und der zur Verfügung gestellten Rechenkapazitäten. Ein sehr großer Dank gilt meinen Betreuern Alexander Hullmann und Jens Otterhagen für all die guten Ideen und Verbesserungsvorschläge. Bei Alexander Hullmann möchte ich mich auch für diverse Korrekturen und Beratung in Layoutfragen bedanken.

Mein herzlicher Dank gilt der CCPM AG für die zur Verfügung gestellten Daten, die bereitgestellten Rechenkapazitäten sowie die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit. Im Speziellen möchte ich meinem Betreuer bei der CCPM AG, Dr. Jan Weyer-Menkhoff, danken für das Korrekturlesen meiner Arbeit sowie die Vertretung meiner Interessen bei der CCPM AG. Weiterhin bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern der CCPM AG für das hervorragende Feedback, sowie die herzliche Aufnahme in die Gemeinschaft.

Besonders möchte ich mich auch bei meiner Familie bedanken: Meiner Schwester Michèle Tertilt für das Korrekturlesen, meinen Eltern für das Auffinden diverser Rechtschreibfehler und die Beratung in stilistischen Fragen, sowie meiner Freundin Theresa für ihre immerwährende moralische Unterstützung.

Ich danke auch allen, die ich an dieser Stelle vergessen habe.

## Notation

Symbol	Bedeutung
$\beta, \sigma$	Parameter des Constant Elasticity Variance Modells
$\gamma(t; \mu, v)$	$\Gamma$ -Prozess zur Zeit $t$ mit Drift $\mu$ und Varianzrate $v$
$\Gamma$	Gammafunktion
$\rho_\gamma$	Dichte der Gammaverteilung
$\sigma, \theta, v$	Parameter des Variance Gamma Modells
$B_t$	Brownsche Bewegung zur Zeit $t$
$c(g)$	Calloptionspreis im VG Modell bei gegebenen $\gamma$ -Zeitshift $g$
$C(K, T)$	Calloptionspreis zum Strike $K$ mit Restlaufzeit $T$
$F, \tilde{F}$	Fehlerfunktionen
$N, n$	Verteilungsfunktion, bzw. Dichte der Standardnormalverteilung
$p$	Realer Optionspreis
$\bar{p}$	Vom Modell implizierter Optionspreis
$P(K, T)$	Putoptionspreis zum Strike $K$ mit Restlaufzeit $T$
$Q[z; \nu, \kappa]$	Verteilungsfunktion der nichtzentralen $\chi^2$ -Verteilung mit $\nu$ Freiheitsgraden und nicht-zentralen Parameter $\kappa$
$S_t$	Stochastischer Prozess des Underlyings in Abhängigkeit von der Zeit $t$
$X(t; \sigma, v, \theta)$	Variance Gamma Prozess zur Zeit $t$ mit dem Parametersatz $(\theta, \sigma, v)$

Abkürzung	Bedeutung
BFGS	Broyden Fletcher Goldfarb Shanno
BS	Black Scholes
CEV	Constant Elasticity Variance
LIBOR	London Interbank Offered Rate
MLMC	Multilevel Monte Carlo
MLS	Maximum Likelihood Schätzer
MSE	Mean square error
NM	Nelder Meat
RMSE	Root mean square error
S&P 500	Aktienindex von Standard & Poor's
VG	Variance Gamma



# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung und Danksagung</b>	<b>i</b>
<b>Notation</b>	<b>iii</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1. Das Black Scholes Merton Modell . . . . .	5
2.2. Das Constant Elasticity Variance Modell . . . . .	6
2.3. Das Variance Gamma Modell . . . . .	6
<b>3. Implizite Parameterschätzung</b>	<b>9</b>
3.1. Minimierungsalgorithmen . . . . .	9
3.1.1. Nelder-Mead Algorithmus . . . . .	9
3.1.2. Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithmus . . . . .	9
3.2. Fehlerfunktion . . . . .	9
3.3. Minimierung der Fehlerfunktion . . . . .	10
3.3.1. CEV Modell . . . . .	10
3.3.2. VG Modell . . . . .	10
3.4. Datenaufbereitung . . . . .	12
3.5. Beispiel . . . . .	12
3.5.1. Calloptionen . . . . .	15
3.5.2. Putoptionen . . . . .	15
<b>4. Analyse der Parameter aus gegebenen Marktdaten</b>	<b>21</b>
4.1. Black Scholes Modell . . . . .	21
4.2. Constant Elasticity Variance Modell . . . . .	21
4.3. Variance Gamma Modell . . . . .	25
<b>5. Multilevel Monte Carlo</b>	<b>33</b>
5.1. Die Idee . . . . .	33
5.2. Brückenkonstruktion im Variance Gamma Modell . . . . .	33
5.3. Konstruktion eines Abbruchkriteriums . . . . .	34
5.4. Der MLMC Algorithmus . . . . .	35
5.5. Der angepasste MLMC Algorithmus . . . . .	38
5.6. Ein iterativer Varianzschätzer . . . . .	41
5.7. Numerische Konvergenzanalyse . . . . .	42
5.7.1. Payoff-Funktionen . . . . .	42

5.7.2. Konvergenz für eine Asiatische Option . . . . .	42
5.7.3. Konvergenz für eine Barrier Option . . . . .	43
<b>6. Die „Griechen“ im Variance Gamma Modell</b>	<b>47</b>
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>49</b>
<b>A. Gradient Fehlerfunktion im Variance Gamma Modell</b>	<b>51</b>
A.1. Das Variance Gamma Modell . . . . .	51
A.2. Calloptionspreis . . . . .	51
A.3. Fehlerfunktion . . . . .	51
A.4. Ableitungen . . . . .	52
A.4.1. Ableitungen von $\omega$ . . . . .	52
A.4.2. Ableitungen von $d$ . . . . .	52
A.4.3. Ableitungen von $c(g)$ . . . . .	53
A.4.4. Ableitungen der Dichte des Gammaprozesses . . . . .	54
A.4.5. Ableitungen des Optionspreises . . . . .	55
A.4.6. Ableitungen der Fehlerfunktion . . . . .	57
<b>B. Die „Griechen“ für das Variance Gamma Modell</b>	<b>61</b>
B.1. Ableitungen des Parameters $d$ . . . . .	61
B.2. Ableitungen des Callpreises gegeben $g$ . . . . .	61
B.3. Ableitungen der Dichte des Gammaprozesses . . . . .	61
B.4. Ableitungen des Calloptionspreises . . . . .	62
B.5. Ableitungen des Putoptionspreises . . . . .	62
<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>



## 1. Einleitung

Optionen sind aufgrund ihrer Liquidität und ihrer Hebelwirkung ein beliebtes Finanzinstrument. Da Optionen auf alle möglichen Underlyings gehandelt werden (z.B. Aktien und Futures) und auch mit vielfältigen Strikes und Laufzeiten, gibt es eine große Auswahl an verschiedenen Optionen. Aufgrund der hohen Anzahl haben die Preise der Optionen einen großen Informationsgehalt über die aktuelle Situation des Marktes. Die am Markt beobachteten Preise sind allerdings nicht zwangsläufig die fairen Preise, sondern mit Fehlern behaftet (Rundungsfehler, Orderfehler, Fehler durch nicht rationales Handeln, etc.). Außerdem sind die Optionspreise nur zu diskreten Zeiten verfügbar, nämlich dann wenn ein Handel stattfindet. Unter der Annahme, dass der Kurs des Underlyings einem bestimmten stochastischen Prozess folgt, können die Parameter des Prozesses aus den Optionspreisen geschätzt werden. Wenn das Modell die Realität gut approximiert, enthalten die bestimmten Parameter die aufgereinigte Information aus den Optionspreisen. Natürlich ist man besonders an Informationen über die aktuelle Marktsituation interessiert. Deswegen ist es wichtig, dass Algorithmen, welche die Parameter der Prozesse bestimmen, schnell und stabil laufen. Ich werde mich in meiner Bachelorarbeit damit beschäftigen, solche Algorithmen zu entwickeln und in der freien Programmiersprache R zu implementieren. Für die Optionspreise habe ich ein exponentielles Fehlermodell angenommen. In dem Modell ist die Maximierung der Likelihoodfunktion asymptotisch äquivalent zur Minimierung einer deutlich einfacheren Fehlerfunktion. Diese habe ich mit verschiedenen Verfahren minimiert.

Die Grundlage dieser Arbeit bildet das Variance Gamma (VG) Modell und das Constant Elasticity of Variance (CEV) Modell.

Das VG Modell wurde erstmals 1990 von D.B. Madan und E. Seneta [17] als Modell für Aktienkurse untersucht und anschließend von D.B. Madan und F. Milne [16] zum Pricen von Optionen verwendet. 1998 stellten D.B. Madan, P.P. Carr und E.C. Chang [15] eine geschlossene Lösung für den Preis Europäischer Optionen vor. Diese enthält allerdings entweder eine unendliche Summe oder ein zu approximierendes Integral. Pfadabhängige Optionen wurden erstmals 2002 von C.C. Ribeiro und N. Weber [19] im VG Kontext untersucht. 2004 stellte Fiorani [7] verschiedene numerische Methoden zur Preisbestimmung Europäischer und Amerikanischer Plain Vanilla Optionen sowie Europäischer und Amerikanischer Barrieroptionen für das VG Modell vor. Die Arbeit [9] von Michael Fu bietet eine gute Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten zur Simulation von VG Prozessen mit Hilfe von Monte Carlo.

Das CEV Modell wurde erstmals 1975 von J. Cox [3] in einem working paper der Stanford University betrachtet. 1976 wurde das Modell erstmals zur Bewertung von Optionen genutzt. 1982 haben D.C. Emanuel und J.D. MacBeth [6] und 1989 M. Schroder [21] schnelle und stabile Algorithmen zur Bewertung Europäischer Optionen hergeleitet. Für einen formaleren mathematischen Ansatz siehe auch die Bemerkungen von F. Delbaen und H. Shirakawa [4].

Um für die implizite Parameterschätzung auch Exotische Optionen hinzuziehen zu können, bedarf es schneller Algorithmen, um die vom Modell implizierten Preise dieser Optionen zu bestimmen. Ich werde mich auf Optionen fokussieren, die vom ganzen kontinuierlichen Pfad des Underlyings abhängen, wie zum Beispiel Barrier Optionen und kontinuierliche Asiatische Optionen. Ich werde dazu auf das Multilevel Monte Carlo (MLMC) Verfahren zurückgreifen. Das

MLMC Verfahren wurde erstmals 2006 von Giles [11] verwendet und 2008 von ihm weiterentwickelt [10].

### Problemstellung

Das allgemein bekannte und viel verwendete Black Scholes Modell kann die aktuelle Marktsituation nicht ausreichend erklären – zum Beispiel wird die Wahrscheinlichkeit von extremen Risiken wie Börsencrashes stark unterschätzt. Des Weiteren gibt es den „Vola-Smile“ der zeigt, dass das Black Scholes Modell nicht alle Optionspreise zugleich erklären kann. Um dieses Problem zu lösen gibt es zahlreiche andere Modelle zur Bewertung von Optionen. So werden diverse Diffusionsprozesse, Sprung-Diffusionsprozesse und reine Sprungprozesse verwendet. Die Anzahl der Möglichkeiten ist hier unbegrenzt. Je komplizierter das Modell ist, umso schwieriger wird allerdings auch die implizite Parameterschätzung.

Das Constant Elasticity Variance Modell (CEV) und das Variance Gamma (VG) Modell sind Erweiterungen des Black Scholes (BS) Modells mit zwei bzw. drei freien Parametern. Da die Anzahl der Freiheitsgrade überschaubar bleibt, ist es für diese Modelle möglich die impliziten Parameter in akzeptabler Zeit zu bestimmen. Im täglichen Handel zählt jedoch jede Minute – deswegen ist es wichtig auch hier die Algorithmen zu optimieren.

In der Finanzwelt ist man mit den „Griechen“ des Black Scholes Modells sehr vertraut, deshalb ist es für die Händler wichtig, solche Kenngrößen auch für neue Modelle zu haben.

Last but not least ist es wichtig, auch die Preise von Exotischen Optionen schnell berechnen zu können, um größere Datenmengen für die implizite Parameterschätzung zu erhalten.

### Lösungsansätze

Am Markt kann beobachtet werden, dass die Implizite Volatilität einer Aktie tendentiell steigt, wenn der Kurs fällt. Dieses Phänomen ist in Finanzkreisen gut bekannt als „leverage effect“ und ist gleichzeitig der Ansatzpunkt des CEV Modells. Außerdem läuft die „gefühlte Zeit“ während eines starken Kurssturzes deutlich schneller. Es wird intensiver gehandelt und an den Börsen geht es hektisch zu. Hier setzt das VG Modell an – mit einer geometrischen Brownschen Bewegung, in der die „Zeit“ einem  $\Gamma$ -Prozess folgt.

Ich habe die beiden Modelle auf Basis von Futureoptionen auf den Standard & Poor 500 Index statistisch analysiert. Es hat sich herausgestellt, dass beide Modelle die realen Optionspreise wesentlich besser erklären können als das Black Scholes (BS) Modell. Ich werde effiziente Algorithmen zur impliziten Parameterschätzung in den Modellen angeben.

Außerdem habe ich die „Griechen“ erster Ordnung im Variance Gamma Modell berechnet, also die Ableitungen des Optionspreises nach der Restlaufzeit, dem Strike, dem Zinssatz, sowie dem Underlying und den Parametern des Modells.

Im zweiten Teil meiner Arbeit gehe ich darauf ein, wie im VG Modell auch Preise von Exotischen Optionen effizient berechnet werden können. Ich habe mich dabei auf Optionen beschränkt, die vom ganzen kontinuierlichen Pfad abhängen. Dazu habe ich das Multilevel Monte Carlo (MLMC) Verfahren auf diese Problemstellung angewendet und eine an das VG Modell angepasste Variante des MLMC Verfahrens konstruiert.

Mit diesen Methoden ist es möglich, die realen Preise von Exotischen Optionen zur Parameterschätzung hinzuzuziehen. Weiterhin ist es möglich, mit den aus Europäischen Optionen

---

gewonnenen Parametern die Preise von Exotischen Optionen zu bestimmen.

## Eigene Beiträge

- Entwicklung schneller und stabiler Algorithmen zur impliziten Parameterbestimmung für das Constant Elasticity Variance Modell und das Variance Gamma Modell
- Berechnung des Gradienten der Fehlerfunktion im Variance Gamma Modell
- Berechnung der „Griechen“ erster Ordnung im Variance Gamma Modell
- Analyse von Zeitreihen von Preisen von Futureoptionen auf den S&P 500 Index
- Implementierung des Multilevel Monte Carlo Algorithmus zur Preisbestimmung von pfad-abhängigen Optionen im Variance Gamma Modell
- Entwicklung einer an das Variance Gamma Modell adaptierten Version des Multilevel Monte Carlo Verfahrens

## Aufbau der Arbeit

**Kapitel 2** bietet einleitende Erläuterungen zum Variance Gamma Modell und zum Constant Elasticity Variance Modell.

**Kapitel 3** erklärt die Verfahren zur impliziten Parameterschätzung und bietet ein Beispiel dazu.

**Kapitel 4** analysiert die Modelle und deren Güte anhand von S&P 500 Futureoptionen.

**Kapitel 5** wendet das Multilevel Monte Carlo Verfahren auf das Variance Gamma Modell an. Außerdem wird ein angepasstes Verfahren hergeleitet und die Konvergenz der Verfahren analysiert.

**Kapitel 6** berechnet die „Griechen“ im Variance Gamma Modell und gibt ein Beispiel dazu.

**Anhang A** Berechnung des Gradienten der Fehlerfunktion im Variance Gamma Modell.

**Anhang B** Berechnung von Ableitungen des Optionspreises im Variance Gamma Modell.

## 2. Grundlagen

Ich möchte zuerst einige Ergebnisse zu den hier behandelten Optionspreismodellen zusammenfassen, die für meine Arbeit von herausragender Bedeutung sind.

### 2.1. Das Black Scholes Merton Modell

Das Black Scholes Merton (BS) Modell wurde 1973 von Fischer Black und Myron Scholes [2] vorgestellt. Das Black Scholes Modell hat die Finanzwelt revolutioniert und zum explosionsartigen Wachstum des Financial Engineering und der Computational Finance geführt [12]. Das Modell ist durch eine geometrische Brownsche Bewegung gegeben. Sei im Folgenden  $S_t$  der Kurs des Underlyings zur Zeit  $t$ . In Abhängigkeit von der Drift  $\mu$  und der Volatilität  $\sigma$  ist die Kursentwicklung durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

gegeben, wobei  $B_t$  eine Brownsche Bewegung ist. Die Differentialgleichung hat die Lösung

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

Im BS Modell gibt es geschlossene Formeln für die Preise von Europäischen Optionen, wie auch für geometrische Asiatische Optionen und Barrieroptionen. Da ich im Verlauf die Black Scholes Formeln für den Europäischen Calloptionspreis (C) und den Putoptionspreis (P) noch gebrauchen werde, gebe ich sie im Folgenden an: Mit Hilfe von risikoneutraler Bewertung ergibt sich der Preis einer Calloption auf ein Underlying mit Startkurs  $S_0$ , zum Strike  $K$  und Restlaufzeit  $T$  bei kontinuierlichem Zinssatz  $r$  als  $C(S_0, T) = e^{-rT} \mathbb{E}[(S_0 - K)^+]$  und der Preis einer Putoption als  $P(S_0, T) = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S_0)^+]$ . Im BS Modell ergeben sich die berühmten Black Scholes Gleichungen:

$$C(K, T) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.1)$$

$$P(K, T) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \quad (2.2)$$

Dabei ist

$$d_1 = \frac{\log S_0/K + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

und  $N$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

## 2.2. Das Constant Elasticity Variance Modell

Das erstmals von J. Cox [3] vorgestellte Constant Elasticity Variance (CEV) Modell beruht auf einem Diffusionsprozess mit drei freien Parametern: der Drift  $\mu$ , der Volatilität  $\sigma$  und dem Elastizitätskoeffizienten  $\beta$ . Der Diffusionsprozess ist gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t^{\beta/2} dB_t.$$

$B_t$  ist dabei eine Brownsche Bewegung. Dies entspricht dem Black Scholes Modell mit einer von  $S_t$  abhängigen Volatilität  $\sigma(S_t, t) = \delta \cdot S_t^{(\beta-2)/2}$ .

Da im Verlauf der Berechnung der Preise Europäischer Optionen auf das äquivalente risikoneutrale Martingalmaß gewechselt wird, wird die Drift  $\mu$  durch den Zinssatz  $r$  ersetzt. Es sind die drei Fälle  $\beta < 2$ ,  $\beta = 2$  und  $\beta > 2$  zu unterscheiden. Der Fall  $\beta < 2$  wurde 1989 von Mark Schroder [21] behandelt. Für eine Calloption mit Strike  $K$  und Restlaufzeit  $T$  mit kontinuierlichem risikolosen Zinssatz  $r$  und Dividendenrate  $a$  auf ein Underlying mit Wert  $S_0$  ergibt sich

$$C(K, T) = S_0 \cdot e^{-aT} (1 - Q[2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x]) - K \cdot e^{-rT} Q[2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y]. \quad (2.3)$$

$Q[z; \nu, \kappa]$  ist dabei die Verteilungsfunktion der nichtzentralen  $\chi^2$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden und dem nichtzentralen Parameter  $\kappa$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} y &= k \cdot K^{2-\beta}, \\ k &= \frac{2(r-a)}{\delta^2(2-\beta)[\exp((r-a)(2-\beta)t) - 1]}, \\ x &= k \cdot S_0^{2-\beta} \exp((r-a)(2-\beta)t). \end{aligned}$$

Unter gleichen Bedingungen und mit gleichem Strike ergibt sich aus der Put-Call Parität direkt der Preis einer Putoption

$$P(K, T) = C(S_0, T) - S_0 + e^{rT} K.$$

Für  $\beta = 2$  entspricht das Modell genau dem Black Scholes Merton Modell.

Für den Fall  $\beta > 2$  benutze ich die von Emanuel und MacBeth [6] berechnete Formel

$$C(K, T) = S_0 e^{-aT} (1 - Q[2x; \frac{2}{\beta-2}, 2y]) - K e^{-rT} Q[2y; 2 + \frac{2}{\beta-2}, 2x].$$

Der Fall  $\beta \geq 2$  kommt bei Optionen auf Aktien und Aktienindizes allerdings erfahrungsgemäß nur sehr selten vor.

## 2.3. Das Variance Gamma Modell

Das Variance Gamma (VG) Modell wurde erstmals 1998 von D. Madan, P. Carr und E. Chang [15] vorgestellt. Das VG Modell ist eine Erweiterung des BS Modells. Das VG Modell besteht aus einem stochastischen Prozess, der unter dem risikoneutralen Maß drei freie Parameter hat. Es

gibt zwei gängige Realisierungen eines VG Pfades, einerseits als Differenz zweier  $\Gamma$ -Prozesse und andererseits als Brownsche Bewegung mit  $\Gamma$ -Zeitshift. Ich habe mich für die zweite Methode entschieden, da es der anschaulichere Ansatz ist. Außerdem ist es numerisch schneller, normalverteilte Zufallszahlen zu generieren als  $\Gamma$ -, bzw.  $\beta$ -verteilte Zufallszahlen. Das wirkt sich positiv auf die Laufzeit der Algorithmen aus (siehe Kapitel 5).

Der Logarithmus des Underlyingkurses ist gegeben durch eine Brownsche Bewegung mit Drift und einer zufälligen durch einen  $\Gamma$ -Prozess gegebenen Zeit. Der  $\Gamma$ -Prozess hat in dem Modell die Drift 1 und eine positive variable Varianz. Die freien Parameter sind Drift und Standardabweichung der Brownschen Bewegung, gegeben die Realisierung des  $\Gamma$ -Zeitwechsels. Als dritter Parameter kommt die Volatilität des  $\Gamma$ -Prozesses hinzu. Weiterhin gibt es noch einen Korrekturterm, der die Martingaleigenschaft des abdiskontierten Prozesses erhält.

Sei  $\gamma(t; \mu, v)$  ein  $\Gamma$ -Prozess mit Varianz  $\text{var}(\gamma(t; \mu, v)) = vt$  und Erwartungswert  $\mathbb{E}(\gamma(t; \mu, v)) = \mu t$  und  $B(t, \theta, \sigma)$  eine Brownsche Bewegung zur Zeit  $t$  mit Erwartungswert  $\mathbb{E}(B(t, \theta, \sigma)) = \theta t$  und Varianz  $\text{var}(B(t, \theta, \sigma)) = \sigma^2 t$ .

Der Prozess des Underlyings im VG Modell ist dann gegeben durch

$$S(t) = S_0 \exp(rt + X(t, \sigma, v, \theta) + \omega t), \quad (2.4)$$

wobei  $\omega = \frac{1}{v} \ln(1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2})$  der Korrekturterm und  $X(t, \sigma, v, \theta) = B(\gamma(t; 1, v); \theta, \sigma)$  der Variance Gamma Prozess ist.

Im VG Modell kann der Europäische Optionspreis analytisch auf ein eindimensionales Integral reduziert werden, wie auch D.B. Madan [15] gezeigt hat.

**Satz 2.1.** *Calloptionspreis im Variance Gamma Modell*

Sei  $\rho_\gamma$  die Dichte der  $\Gamma$ -Verteilung und wie zuvor  $N$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Dann ist der Preis einer Europäischen Calloption mit Strike  $K$  und Restlaufzeit  $T$  gegeben durch

$$C(K, T) = \int_0^\infty c(g) \rho_\gamma(g) dg. \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Dabei ist

$$c(g) = S_0 \cdot \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) - K \cdot N(d) \cdot \exp(-rT),$$

$$d = \frac{(r + \omega)T + g\theta - \ln(K/S_0)}{\sigma\sqrt{g}}.$$

*Beweis.* Sei nun  $\mathfrak{G}_t$  die von  $\gamma(t; \mu, v)$  erzeugte Filtration. Dann ergibt sich unter dem äquivalenten risikoneutralen Martingalmaß der Europäische Calloptionspreis mit Strike  $K$ , Restlaufzeit  $T$ , und Parametersatz  $\sigma, \theta, v$  durch Bedingen auf  $\mathfrak{G}_T$ .

$$\begin{aligned} C(K, T, \sigma, \theta, v) &= e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}[\mathbb{E}[(S_T - K)^+ | \mathfrak{G}_T]] \end{aligned}$$

Der innere Erwartungswert kann nun analog zum Optionspreis im BS Modell hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_T - K)^+ | \mathfrak{G}_T] &= \mathbb{E}[(S_0 \exp((r + \omega)T + X(T, \sigma, \theta, v)) - K)^+ | \mathfrak{G}_T] \\ &= \mathbb{E}[(S_0 \exp((r + \omega)T + \theta\gamma + \sqrt{\gamma}\sigma B_1) - K)^+ | \mathfrak{G}_T] \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck vereinfachen zu können, wird der minimale Wert von  $B_1$  benötigt, sodass es zu einem nicht negativen Payoff kommt.

$$\begin{aligned} S_0 \exp((r + \omega)T + \gamma\theta + \sqrt{\gamma}\sigma x) - K &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}\sigma} (\ln(\frac{K}{S_0}) - (r + \omega)T - \gamma\theta) \end{aligned}$$

Definiere nun  $d = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\sigma} ((r + \omega)T + \gamma\theta - \ln(\frac{K}{S_0}))$ . Weiterhin sei  $n(x)$  die Dichte der Normalverteilung. Hierdurch vereinfacht sich der obige Term zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_T - K)^+ | \mathfrak{G}_T] &= \mathbb{E}[(S_0 \exp((r + \omega)T + \theta\gamma + \sqrt{\gamma}\sigma B_1) - K)^+ | \mathfrak{G}_T] \\ &= \int_{-d}^{\infty} [S_0 \exp((r + \omega)T + \gamma\theta + \sqrt{\gamma}\sigma x) - K] n(x) dx \\ &= S_0 \exp((r + \omega)T + \gamma\theta) \int_{-d}^{\infty} \exp(\sqrt{\gamma}\sigma x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx - KN(d) \\ &= S_0 \exp((r + \omega)T + \gamma\theta + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2) N(d + \sqrt{\gamma}\sigma) - KN(d) \\ &= e^{rT} c(\gamma). \end{aligned}$$

Für den Callpreis ergibt sich damit

$$\begin{aligned} C(K, T, \sigma, \theta, v) &= e^{-rT} \mathbb{E}[\mathbb{E}[(S_T - K)^+ | \mathfrak{G}_T]] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}[e^{rT} c(\gamma)] \\ &= \mathbb{E}[c(\gamma)] \\ &= \int_0^{\infty} c(g) \rho_{\gamma}(g) dg. \end{aligned}$$

□



### 3. Implizite Parameterschätzung

In diesem Kapitel stelle ich die von mir verwendeten Minimierungsalgorithmen vor und beschreibe deren Einsatz. Anschließend wird der Gradient der Fehlerfunktion im VG Modell hergeleitet, um eine schnellere Minimierung zu ermöglichen.

#### 3.1. Minimierungsalgorithmen

##### 3.1.1. Nelder-Mead Algorithmus

Der Nelder-Mead (NM) Algorithmus wurde erstmals 1965 von John Nelder und Roger Mead [18] vorgestellt. Der NM Algorithmus, auch Downhill-Simplex Algorithmus genannt, ist eine Methode zur Optimierung nichtlinearer Funktionen in mehreren Variablen. Im Gegensatz zu vielen anderen Optimierungsalgorithmen kommt der NM Algorithmus ohne den Gradienten (explizit oder implizit) der zu optimierenden Funktion aus.

Der Algorithmus beginnt mit einem Startsimplex, gegeben durch  $n + 1$  Punkte im  $n$ -dimensionalen Raum und deren Funktionswerten. Jede Iteration des Algorithmus besteht daraus, dass ein oder mehrere Punkte und deren Funktionswerte berechnet werden und ein neuer Simplex erstellt wird. Für das genaue Verfahren und nähere Informationen zur Implementierung siehe [18],[14] und [22].

##### 3.1.2. Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithmus

Der Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Algorithmus gehört zu den Quasi-Newton-Verfahren. In jedem Schritt wird der Gradient berechnet und damit durch Rang 1 Updates rekursiv die Hessematrix approximiert. Für nähere Informationen zum BFGS Algorithmus siehe zum Beispiel [20] oder [8].

#### 3.2. Fehlerfunktion

Zur impliziten Parameterschätzung werde ich den Maximum Likelihood Schätzer verwenden. Dazu benutze ich das auch von Madan [16] verwendete Fehlermodell  $p_i = \bar{p}_i \cdot \exp(\nu \varepsilon_i - \frac{\nu^2}{2})$ . Dabei steht  $\bar{p}_i$  für den vom Modell implizierten Preis der  $i$ -ten Option und  $p_i$  für den Marktpreis. Die  $\varepsilon_i$  sind unabhängig normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Madan hat gezeigt, dass unter diesem Fehlermodell die Maximierung der Likelihoodfunktion asymptotisch äquivalent zur Minimierung der Summe der quadrierten Differenzen der Logarithmen ist, also der Minimierung von

$$F = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))^2}.$$

$M$  ist hierbei die Anzahl der Optionen. In meinen Algorithmen minimiere ich äquivalent dazu die Funktion

$$\tilde{F} = M \cdot F^2 = \sum_{i=1}^M (\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))^2 \quad (3.1)$$

um etwas Rechenarbeit zu sparen und die Berechnung des Gradienten zu vereinfachen. In Grafiken werde ich der Anschaulichkeit halber die Funktion  $F$  verwenden. Ich werde im Folgenden die Parameter durch Minimierung von  $\tilde{F}$  in Abhängigkeit von der Restlaufzeit  $T$  bestimmen. Formal entspricht das

$$(\sigma_T, \theta_T, v_T) = \operatorname{argmin}\{\tilde{F}(\sigma, \theta, v) | \sigma \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^+\}.$$

### 3.3. Minimierung der Fehlerfunktion

#### 3.3.1. CEV Modell

Die Berechnung der Fehlerfunktion aus gegebenen Optionen und Parametern ist im CEV Modell numerisch stabil und schnell. Hierzu ist lediglich die Approximation der Verteilungsfunktion der nichtzentralen  $\chi^2$ -Verteilung nötig, für die es gute Algorithmen gibt. Ich habe eine standardmäßig in R eingebundene Funktion verwendet, basierend auf einem Algorithmus von C.G. Ding [5]. Da das zu lösende Optimierungsproblem nur zweidimensional ist, benötigt die Minimierung der Fehlerfunktion mit dem NM Verfahren nur wenige Sekunden. Ich habe deshalb davon abgesehen, den Gradienten zu bestimmen.

#### 3.3.2. VG Modell

Die Berechnung der Fehlerfunktion im VG Modell ist besonders bei vielen Optionen numerisch aufwendig. Zur Berechnung muss für jede Option ein Integral numerisch approximiert werden. Deswegen ist es wichtig mit möglichst wenigen Iterationen auf eine akzeptable Genauigkeit zu kommen. Besonders für Startparameter, die nahe am Optimum liegen, ist der BFGS Algorithmus mit seiner superlinearen Konvergenzordnung dem NM Algorithmus – zumindest empirisch – weit überlegen. Ich habe deshalb den Gradienten der Fehlerfunktion im Variance Gamma Modell bestimmt (siehe Anhang A). Seien  $p_i$  die realen Preise und  $\bar{p}_i(\theta, \sigma, v)$  die vom Modell implizierten Preise zu den Strikes  $K_i$  und mit Restlaufzeit  $T$ . Mit

- $\Delta_i = (\bar{p}_i)^{-1} \cdot 2(\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))$ ,
- Verteilungsfunktion der Normalverteilung  $N$ ,
- Dichte der Normalverteilung  $n$ ,
- Dichte der  $\Gamma$ -Verteilung  $\rho_\gamma$ ,
- $\omega = \frac{1}{v} \ln(1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2})$ ,
- $z = (1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2})^{-1}$ ,
- $d_i$  und  $c_i$  wie in (2.6) und

- der Ableitung des Calloptionspreises  $c'_i(g)$  bei gegebener  $\gamma$ -Zeit  $g$

ergeben sich bei Startkurs des Underlyings  $S_0$  die Ableitungen als

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}F &= -\Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1}v^{-\frac{T}{v}} \cdot \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) [S_0 \exp\left(\frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T + g\theta\right) \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^M \Delta_i [(g - zT)N(d_i + \sigma\sqrt{g}) + \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d_i + \sigma\sqrt{g})] \\ &\quad - \exp(-rT) \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right) \sum_{i=1}^M K_i \Delta_i n(d_i)] dg, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}F &= -\Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1}v^{-\frac{T}{v}} \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) [S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^M \Delta_i [\sigma(g - zT) \cdot N(d_i + \sigma\sqrt{g}) - \left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{1}{\sigma}d_i - \sqrt{g}\right) \cdot n(d_i + \sigma\sqrt{g})] \\ &\quad + \exp(-rT) \sum_{i=1}^M \Delta_i K_i \left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{d_i}{\sigma}\right) \cdot n(d_i)] dg, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}F &= \frac{T}{v^2} \left(1 - \Psi\left(\frac{T}{v}\right) - \ln(v)\right) \sum_{i=1}^M C(K_i, T) \Delta_i \\ &\quad - \frac{1}{v^2} \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \cdot g \left[\left(\frac{v}{T} - \ln(g) + 1\right) \sum_{i=1}^M \Delta_i c_i(g) - v \left(\frac{v}{T} - \ln(g)\right) \sum_{i=1}^M \Delta_i c'_i(g)\right] dg \\ &\quad + \frac{T}{v} \left(\omega + \left(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)z\right) \int_0^\infty \rho_\gamma(g) [S_0 \cdot \exp(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T) \sum_{i=1}^M \Delta_i (N(d_i + \sigma\sqrt{g}) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d_i + \sigma\sqrt{g})) \\ &\quad - \exp(-rT) \frac{1}{\sigma\sqrt{g}} \sum_{i=1}^M \Delta_i K_i \cdot n(d_i)] dg. \end{aligned}$$

Für  $\frac{T}{v} \gg 1$  ist die Berechnung des Gradienten numerisch instabil. Wenn während der Durchführung des BFGS Algorithmus Parametersätze betrachtet wurden, für die  $\frac{T}{v} \gg 1$  galt, habe ich, wenn möglich, den Gradienten diskret approximiert. Falls  $\frac{T}{v} \gg 1$  auch für das Optimum galt, habe ich auf den NM Algorithmus gewechselt. Für das Optimum kommt  $\frac{T}{v} \gg 1$  jedoch nur selten vor, nämlich bei Zeiten in denen das BS Modell gut funktioniert, also solche mit sehr flachem Vola-Smile.

### 3.4. Datenaufbereitung

Um Börsenpreise für die implizite Parameterschätzung nutzen zu können, ist eine Vorverarbeitung notwendig. Optionen werden immer zu dem Preis angegeben, zu dem der letzte Handel stattfand – auch wenn dies schon einige Zeit zurückliegt. Dies ist der Grund, dass besonders bei kurzer Restlaufzeit viele Optionen zum minimal an der Börse handelbaren Preis in den Daten stehen. Um dieses Problem zu beheben habe ich zu jedem Preis jeweils nur eine Put- und eine Calloption zugelassen. Bei mehreren Optionen zu einem Preis habe ich stets die theoretisch teuerste genommen, also die Calloption mit dem niedrigsten Strike und die Putoption mit dem höchsten.

Im Allgemeinen ist es ein kompliziertes, nicht triviales Problem den „richtigen“ Zinssatz auszuwählen. An diesem Punkt gibt es die Möglichkeit, die Modelle durch stochastische Zinsmodelle zu erweitern. Da ich für meine Analyse einen konstanten Zinssatz benötige, habe ich auf den USD LIBOR zurückgegriffen, da die in dieser Arbeit betrachteten Optionen in Dollar gehandelt werden. Ich habe zuerst die LIBOR-Werte in kontinuierliche Zinsraten umgerechnet und danach durch lineare Interpolation den Zinssatz für die benötigte Laufzeit approximiert.

### 3.5. Beispiel

Um den Sinn der Berechnung zu verdeutlichen habe ich an dieser Stelle ein Beispiel eingefügt. Es handelt sich bei den Daten um Optionen vom 17.06.2009 mit Auslauf am 17.07.2009 auf das S&P Future mit Auslauf im September 2009. Der Schlusskurs des Futures am 17.06.2009 war  $S_0 = 905.30$  Zähler, der approximierte kontinuierliche Zinssatz  $r = 0.0031$ . Zur Optimierung habe ich sowohl Put- als auch Calloptionen verwendet. In den Abbildungen werde ich Put- und Calloptionen separat betrachten, die Parameter der Modelle sind jedoch für Put- und Calloptionen dieselben. Anhand der Abbildungen 3.1, 3.2, 3.3 und 3.4 lässt sich die Qualität der verschiedenen Modelle gut einschätzen. Auch die Zahlen bestätigen den subjektiven Eindruck, dass das BS Modell am schlechtesten, das CEV besser und das VG Modell am besten geeignet ist, um die Marktpreise der Optionen zu erklären.

Der Vollständigkeit halber gebe ich in der Tabelle 3.1 die (wiederum gerundeten) berechneten Parameter an, die ich zur Generierung der Daten verwendet habe. Die Parameter habe ich, wie zuvor beschrieben, durch Minimierung der Fehlerfunktion  $\tilde{F}$  erhalten. Um die Anschauung zu verbessern, wurde in der Tabelle neben dem Fehlerfunktionswert auch noch der Standardfehler  $\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2}$  angegeben.

Modell	1. Parameter	2. Parameter	3. Parameter	Fehlerfunktionswert $F$	Standardfehler
BS	$\sigma = 0.4540$	-	-	1.2852	11.6270
CEV	$\sigma = 0.3227$	$\beta = -4.7584$	-	0.3313	2.7299
VG	$\sigma = 0.2542$	$\theta = -0.6282$	$v = 0.1165$	0.1208	1.1271

**Tabelle 3.1.:** Vergleich der Modelle, Zusammenfassung

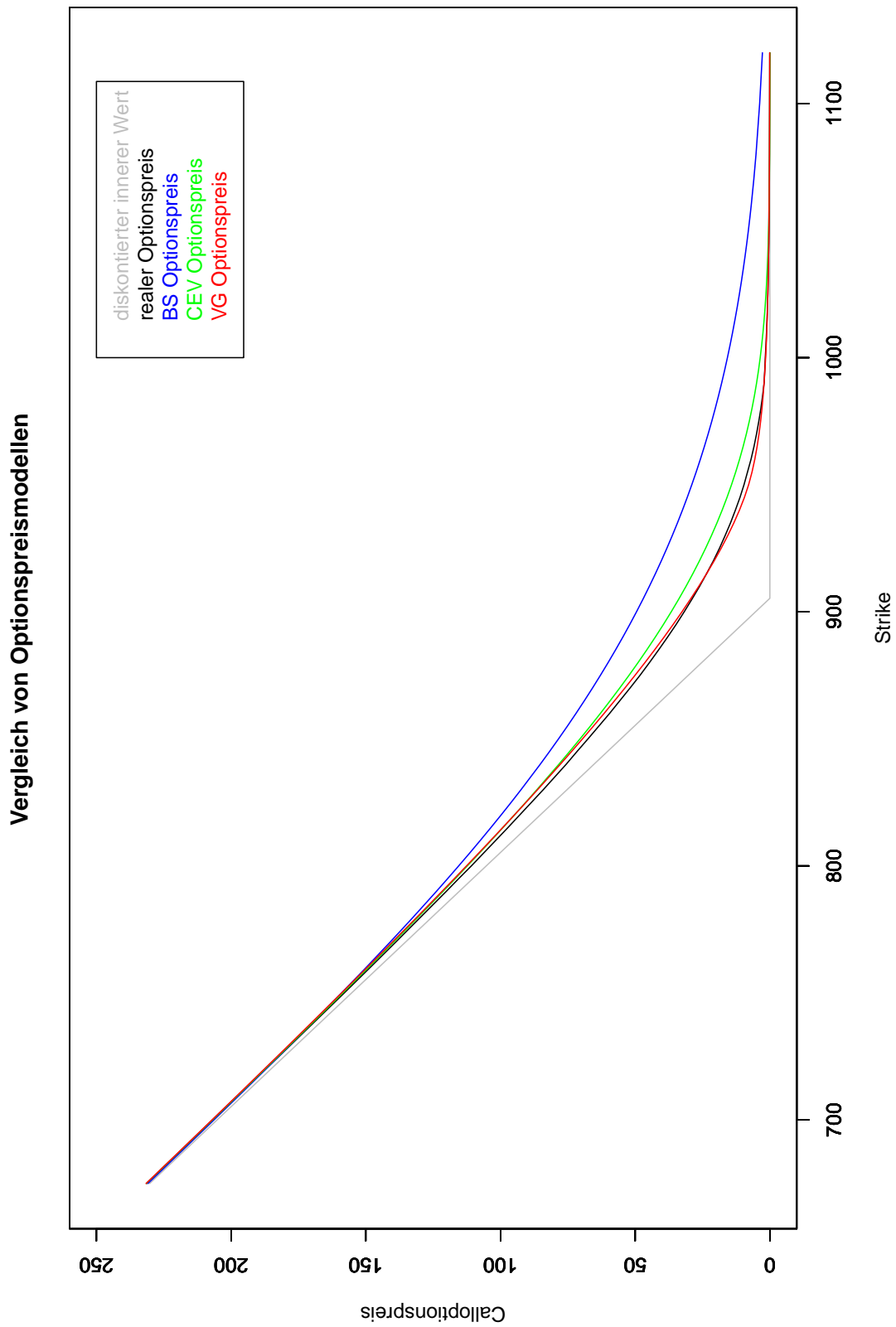


Abbildung 3.1.: Vergleich der verschiedenen Modelle mit realen Marktpreisen für Calloptionen

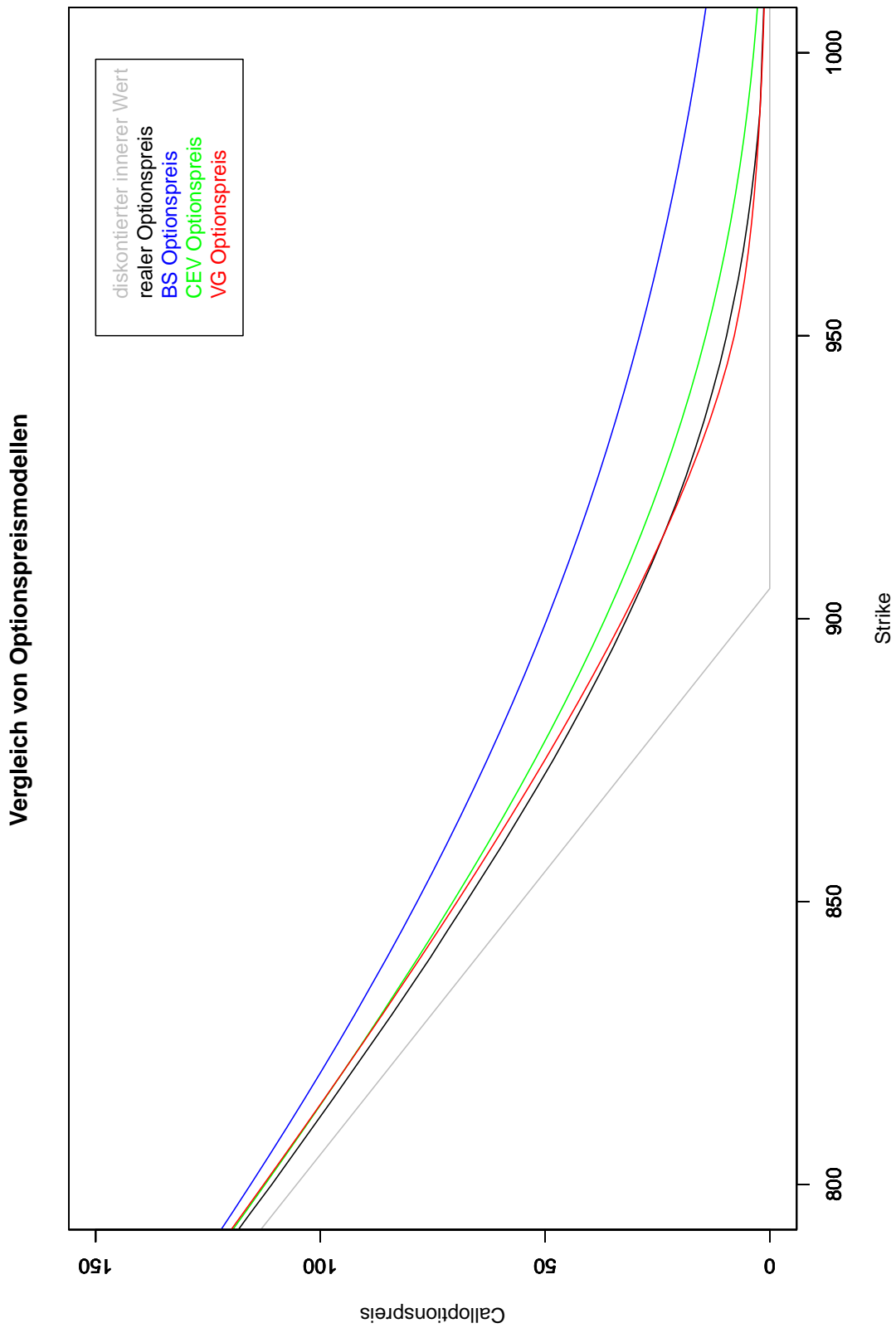


Abbildung 3.2.: Vergleich der verschiedenen Modelle mit realen Marktpreisen für Calloptionen, vergrößerter Ausschnitt

### 3.5.1. Calloptionen

In den Abbildungen 3.1 und 3.2 ist der Callptionspreis in Abhängigkeit vom Strike aufgetragen. Die graue Kurve entspricht dem abgezinnten inneren Wert, die schwarze Kurve den tatsächlichen Optionspreisen. Die blaue, grüne bzw. rote Kurve entspricht dem BS, dem CEV respektive dem VG Modell. Ich habe dabei ausschließlich die Daten aus Tabelle 3.2 verwendet. Der Anschaulichkeit halber habe ich die Punkte linear interpoliert. In Bild 3.2 ist ein vergrößerter Ausschnitt von 3.1 zu sehen. Ich habe die Optionspreise auf zwei Nachkommastellen gerundet, da auch die tatsächlichen Daten nicht in höherer Genauigkeit vorliegen.

Es ist deutlich zu sehen, dass das Black Scholes Modell stark von den realen Preisen abweicht. Die vom Modell implizierten Optionspreise treffen die tatsächliche Krümmung der Kurve schlecht. Beim Constant Elasticity Variance Modell trifft die Kurve schon deutlich besser die tatsächlichen Preise. Das Variance Gamma Modell hat die mit Abstand beste Übereinstimmung mit der Kurve.

### 3.5.2. Putoptionen

Wie auch schon für die Calloptionen ist in den Bildern 3.3 und 3.4 der Putoptionspreis in Abhängigkeit vom Strike aufgetragen. Die graue Kurve entspricht wieder dem abgezinnten inneren Wert, die schwarze Kurve zeigt die tatsächlichen Optionspreise. Die blauen, grünen bzw. roten Kurven entsprechen wie oben dem BS, dem CEV, respektive dem VG Modell. In Abbildung 3.4 ist ein vergrößerter Ausschnitt von 3.3 zu sehen. Die dazugehörigen Daten finden sich in Tabelle 3.3.

Wie schon bei den Calloptionen weichen die vom Black Scholes Modell implizierten Optionspreise deutlich von den realen Optionspreisen ab und treffen die tatsächliche Krümmung der Kurve schlecht. Beim Constant Elasticity Variance Modell trifft die Kurve wie oben deutlich besser die tatsächlichen Preise. Das Variance Gamma Modell hat wieder die mit Abstand beste Übereinstimmung mit der Kurve.

### 3. Implizite Parameterschätzung

Put/Call	Strike	Realer Optionspreis	BS Preis	CEV Preis	VG Preis
C	675	231,40	230,89	231,47	231,58
C	680	226,50	225,96	226,55	226,67
C	690	216,60	216,15	216,71	216,88
C	700	206,80	206,40	206,91	207,12
C	710	197,00	196,71	197,14	197,40
C	720	187,20	187,11	187,42	187,72
C	725	182,30	182,35	182,57	182,89
C	730	177,40	177,61	177,74	178,08
C	740	167,70	168,23	168,12	168,50
C	750	158,00	158,98	158,56	158,98
C	760	148,40	149,89	149,09	149,52
C	770	138,90	140,98	139,71	140,15
C	775	134,20	136,60	135,06	135,50
C	780	129,50	132,27	130,44	130,87
C	790	120,10	123,77	121,30	121,68
C	795	115,50	119,61	116,79	117,13
C	800	110,80	115,51	112,31	112,61
C	805	106,30	111,48	107,88	108,12
C	810	101,80	107,51	103,49	103,66
C	815	97,30	103,62	99,15	99,253
C	820	92,90	99,79	94,87	94,87
C	825	88,50	96,04	90,64	90,53
C	830	84,10	92,36	86,47	86,23
C	840	75,60	85,24	78,32	77,78
C	845	71,60	81,80	74,36	73,64
C	850	67,50	78,44	70,46	69,54
C	855	63,50	75,16	66,65	65,51
C	860	59,50	71,97	62,92	61,54
C	865	55,70	68,86	59,28	57,64
C	870	51,90	65,84	55,74	53,81
C	875	48,20	62,90	52,29	50,06
C	880	44,70	60,05	48,94	46,38
C	885	41,30	57,28	45,69	42,80
C	890	38,00	54,60	42,55	39,30
C	895	34,80	52,01	39,52	35,91
C	900	31,80	49,50	36,61	32,62
C	905	28,90	47,08	33,82	29,45
C	910	26,10	44,74	31,14	26,40
C	915	23,50	42,49	28,59	23,48
C	920	21,00	40,32	26,16	20,70
C	925	18,70	38,23	23,86	18,08
C	930	16,60	36,23	21,68	15,63
C	935	14,60	34,30	19,63	13,36
C	940	12,80	32,45	17,71	11,29
C	945	11,10	30,68	15,91	9,45
C	950	9,60	28,98	14,24	7,89
C	955	8,30	27,36	12,68	6,63
C	960	7,00	25,80	11,25	5,60
C	965	5,90	24,32	9,93	4,74
C	970	4,95	22,91	8,73	4,03
C	975	4,10	21,56	7,63	3,43
C	980	3,35	20,28	6,63	2,93
C	985	2,70	19,06	5,74	2,51
C	990	2,15	17,90	4,94	2,15
C	995	1,90	16,80	4,22	1,84
C	1000	1,70	15,76	3,59	1,58
C	1005	1,45	14,77	3,03	1,36
C	1010	1,25	13,83	2,55	1,17
C	1015	1,05	12,94	2,12	1,01
C	1020	0,90	12,10	1,76	0,88
C	1025	0,75	11,31	1,45	0,76
C	1030	0,65	10,57	1,18	0,65
C	1035	0,55	9,86	0,96	0,57
C	1040	0,50	9,20	0,77	0,49
C	1045	0,40	8,57	0,61	0,43
C	1050	0,35	7,98	0,49	0,37
C	1055	0,30	7,43	0,38	0,32
C	1060	0,25	6,91	0,30	0,28
C	1070	0,20	5,97	0,17	0,21
C	1080	0,15	5,14	0,10	0,16
C	1100	0,10	3,79	0,03	0,10
C	1120	0,05	2,76	0,01	0,06

Tabelle 3.2.: Daten zum Vergleich der verschiedenen Modelle mit realen Marktdaten, Calloptionen



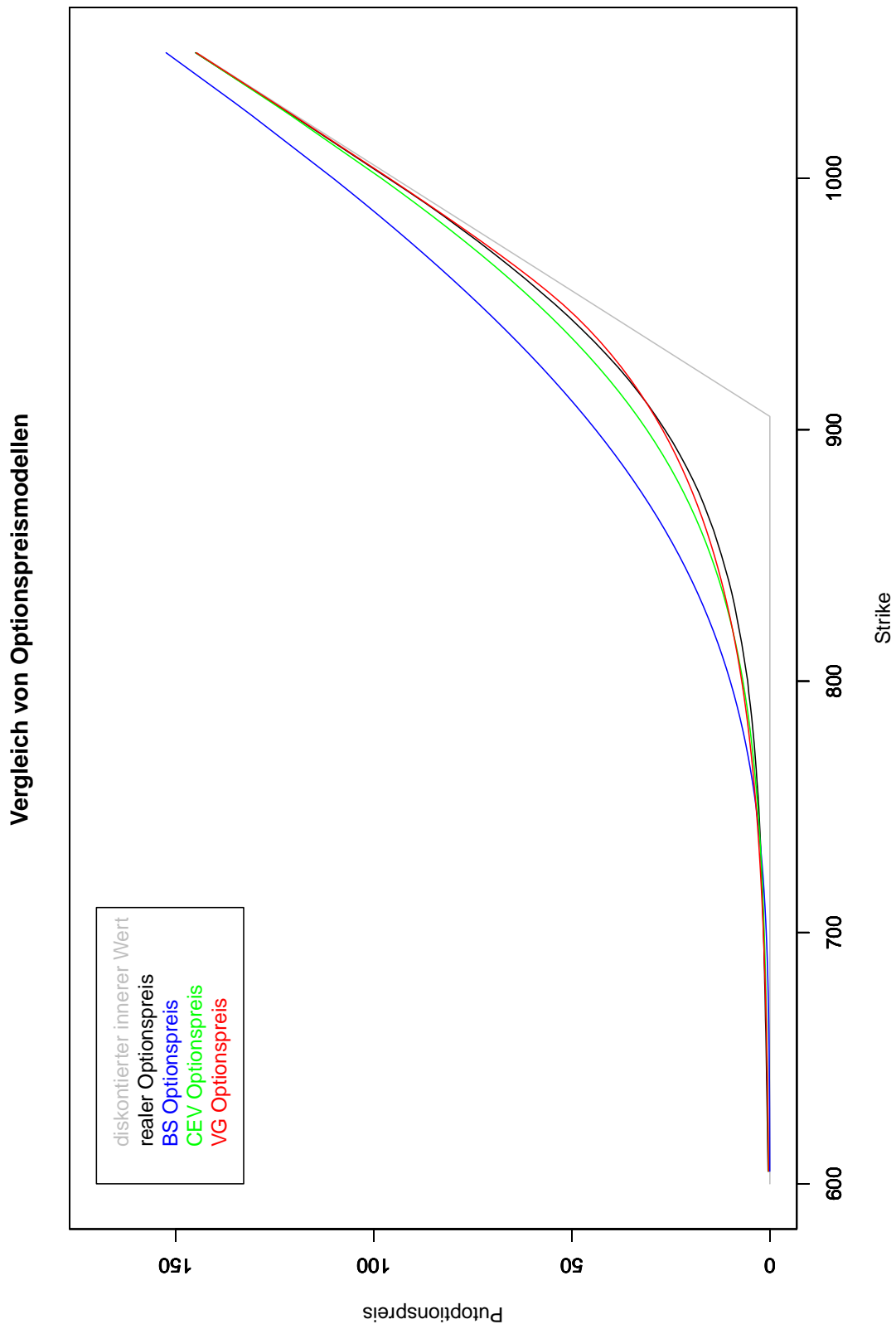


Abbildung 3.3.: Vergleich der verschiedenen Modelle mit realen Marktpreisen für Putoptionen

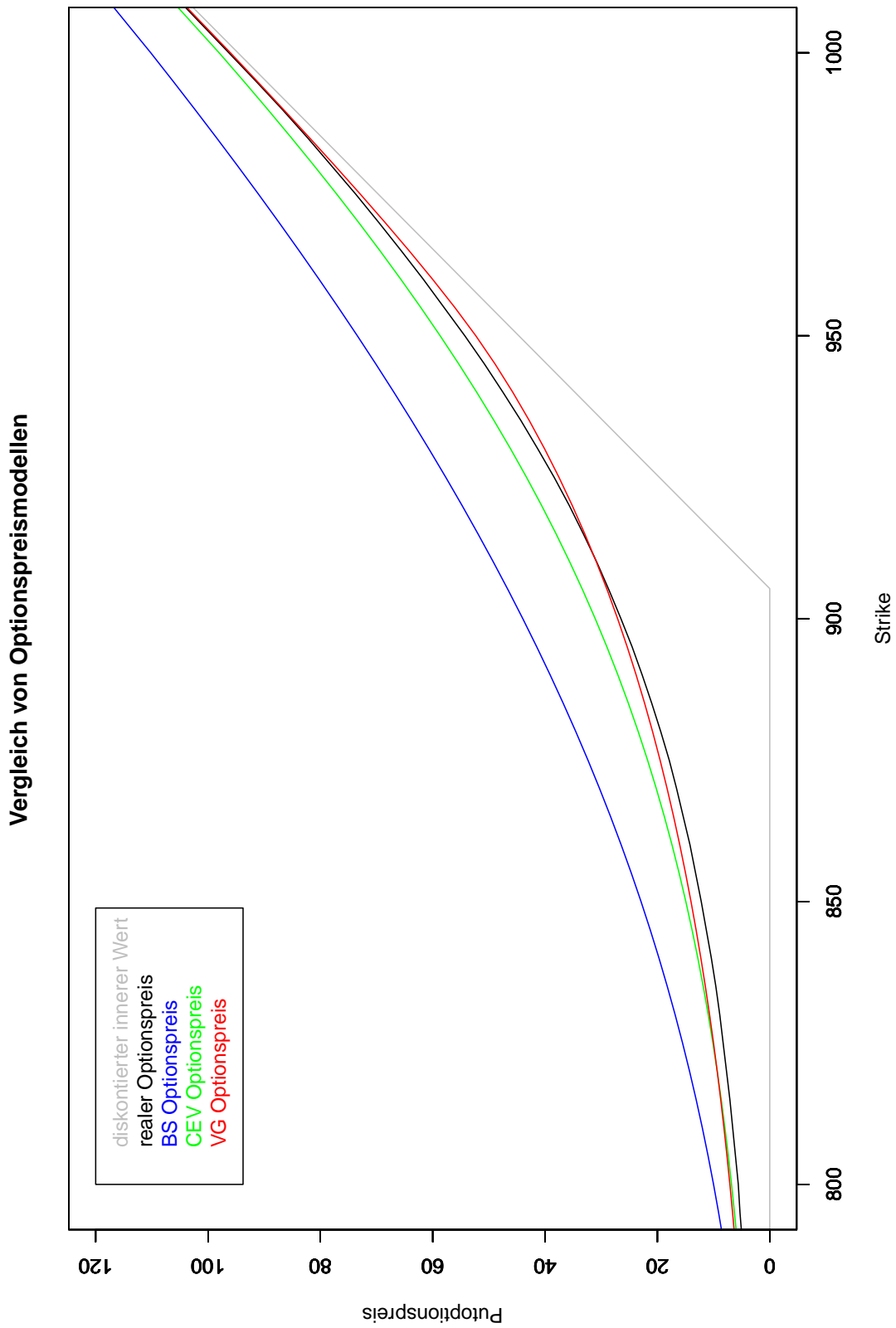


Abbildung 3.4.: Vergleich der verschiedenen Modelle mit realen Marktpreisen für Putoptionen, vergrößerter Ausschnitt

Put/Call	Strike	Realer Optionspreis	BS Preis	CEV Preis	VG Preis
P	605	0,45	0,02	0,41	0,34
P	610	0,50	0,03	0,43	0,37
P	620	0,60	0,05	0,49	0,44
P	625	0,65	0,06	0,52	0,48
P	630	0,70	0,08	0,55	0,53
P	640	0,80	0,11	0,62	0,62
P	650	0,90	0,17	0,71	0,74
P	660	1,00	0,24	0,81	0,87
P	665	1,10	0,29	0,87	0,94
P	670	1,15	0,35	0,93	1,02
P	675	1,20	0,41	1,00	1,11
P	680	1,30	0,49	1,07	1,20
P	685	1,35	0,57	1,15	1,30
P	690	1,45	0,67	1,23	1,40
P	695	1,50	0,79	1,33	1,52
P	700	1,60	0,91	1,43	1,64
P	705	1,70	1,06	1,54	1,77
P	710	1,80	1,23	1,66	1,91
P	715	1,90	1,41	1,79	2,06
P	720	2,00	1,62	1,93	2,23
P	725	2,10	1,86	2,08	2,40
P	730	2,25	2,12	2,25	2,59
P	735	2,35	2,41	2,43	2,79
P	740	2,50	2,73	2,62	3,00
P	745	2,65	3,09	2,84	3,23
P	750	2,80	3,49	3,07	3,48
P	755	3,00	3,92	3,32	3,74
P	760	3,25	4,39	3,59	4,03
P	765	3,45	4,91	3,89	4,33
P	770	3,70	5,48	4,21	4,65
P	775	3,95	6,09	4,56	4,99
P	780	4,25	6,76	4,94	5,362
P	785	4,55	7,48	5,35	5,75
P	790	4,90	8,26	5,80	6,17
P	795	5,30	9,10	6,28	6,62
P	800	5,60	10,00	6,80	7,10
P	805	6,10	10,97	7,37	7,61
P	810	6,60	12,00	7,98	8,15
P	815	7,10	13,10	8,64	8,73
P	820	7,70	14,28	9,35	9,35
P	825	8,30	15,52	10,12	10,01
P	830	8,90	16,85	10,95	10,72
P	835	9,60	18,25	11,84	11,46
P	840	10,40	19,72	12,80	12,26
P	845	11,30	21,28	13,84	13,11
P	850	12,20	22,92	14,94	14,02
P	855	13,20	24,64	16,13	14,99
P	860	14,20	26,45	17,40	16,02
P	865	15,40	28,34	18,76	17,11
P	870	16,60	30,31	20,21	18,28
P	875	17,90	32,37	21,76	19,53
P	880	19,40	34,52	23,41	20,85
P	885	21,00	36,75	25,16	22,27
P	890	22,70	39,07	27,02	23,77
P	895	24,50	41,48	28,99	25,38
P	900	26,50	43,97	31,08	27,09
P	905	28,60	46,55	33,28	28,91
P	910	30,80	49,21	35,60	30,86
P	915	33,20	51,95	38,05	32,94
P	920	35,70	54,78	40,62	35,16
P	925	38,40	57,69	43,32	37,54
P	930	41,30	60,68	46,14	40,08
P	935	44,30	63,75	49,09	42,81
P	940	47,50	66,90	52,16	45,74
P	945	50,80	70,13	55,36	48,91
P	950	54,30	73,43	58,69	52,34
P	955	58,00	76,81	62,13	56,08
P	960	61,70	80,25	65,70	60,04
P	965	65,60	83,77	69,38	64,19
P	970	69,60	87,36	73,17	68,48
P	975	73,70	91,01	77,07	72,88
P	980	78,00	94,72	81,08	77,38
P	985	82,30	98,50	85,18	81,95
P	990	86,80	102,34	89,38	86,59
P	995	91,50	106,24	93,66	91,28
P	1000	96,30	110,20	98,03	96,02
P	1025	120,40	130,75	120,88	120,19
P	1030	125,30	135,00	125,61	125,09
P	1050	145,00	152,41	144,91	144,80

Tabelle 3.3.: Daten zum Vergleich der verschiedenen Modelle mit realen Marktdaten, Putoptionen



## 4. Analyse der Parameter aus gegebenen Marktdaten

In diesem Kapitel werden das VG und das CEV Modell mit dem BS Modell verglichen und Vor- und Nachteile der einzelnen Modelle herausgestellt. Ich habe die Modelle anhand von Indexfutureoptionen auf den S&P 500 Index aus den Jahren 2009 – 2011 analysiert. Der S&P 500 Index gehört zu den meistbeachteten Aktienindizes der Welt. Der Index umfasst die Aktien von 500 der größten, börsennotierten US-amerikanischen Unternehmen. Herausgegeben wird er von der Ratingagentur Standard & Poor's.

Der Fokus der Analyse liegt in diesem Kapitel auf der Zeitabhängigkeit der Modellparameter.

Für die folgenden Abbildungen wurden zu jedem Satz von Optionen die impliziten Parameter in den einzelnen Modellen berechnet. Ein Satz Optionen besteht dabei aus Optionen eines bestimmten Tages mit gleichem Auslaufdatum. In den Abbildungen wird die Änderung der Parameter gegenüber der Restlaufzeit der Optionen dargestellt. Die Parameter wurden, wie in Kapitel 3 beschrieben, berechnet.

### 4.1. Black Scholes Modell

In den Abbildungen 4.1 ist die Implizite Volatilität des BS Modells in Abhängigkeit zur Restlaufzeit zu sehen. In der oberen Abbildung ist der  $\sigma$ -Koeffizient pfadweise für jeden Satz Optionen dargestellt, in der unteren Abbildung gemittelt über die verschiedenen Sätze Optionen mit gleicher Restlaufzeit. Die Fehlerbalken entsprechen dabei der empirischen Standardabweichung.

Auffällig ist, dass die einzelnen Pfade in der oberen Abbildung für lange Restlaufzeiten verhältnismäßig glatt sind, wohingegen sie kurz vor Auslauf starke Sprünge aufweisen. Diese Entwicklung ist auch in der unteren Abbildung zu erkennen. Die empirischen Standardabweichungen werden mit abnehmender Restlaufzeit stetig größer. In den letzten Tagen vor Auslauf ist zudem ein großer Sprung zu erkennen.

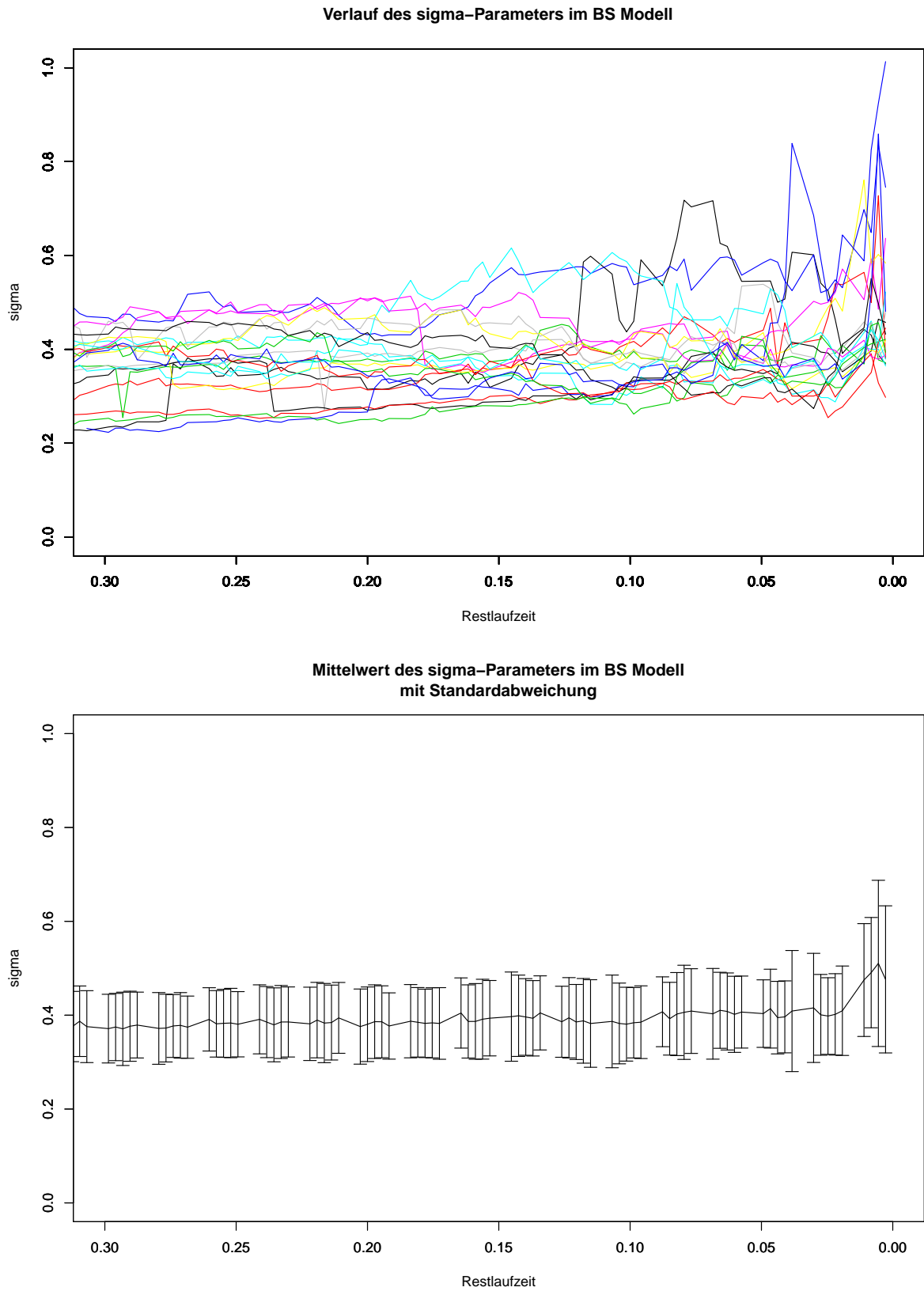
In der letzten Woche vor Auslauf steigen die Volatilitäten kollektiv an. Für die restliche Zeit ist nur ein sehr geringer Anstieg zu verzeichnen. Sie weist also eine kleine, aber doch erkennbare Korrelation zur Laufzeit auf. Trotzdem ist die Volatilität ein guter erster Freiheitsgrad.

Wie in den Abbildungen 4.2 zu sehen ist, ist die Fehlerfunktion im BS Modell tendentiell recht groß. Der Fehler im BS Modell ist bei einer Restlaufzeit von drei bis acht Wochen am größten, für sehr kurze oder sehr lange Restlaufzeiten deutlich geringer. Interessant sind auch die Bögen, die der durchschnittliche Fehler macht, mit einem lokalen Maximum jeweils am Freitag. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass es nicht möglich ist, am Wochenende zu Handeln. Man kann damit die Optionen über das Wochenende nicht hedgen. Daraus resultiert besonders in sehr volatilen Marktsituationen ein ausgeprägter Vola-Smile.

### 4.2. Constant Elasticity Variance Modell

Im CEV Modell (siehe 4.3 oben) schwankt der  $\sigma$ -Parameter für die einzelnen Sätze Optionen ähnlich stark, wie auch die Implizite Volatilität im Black Scholes Modell. Gemittelt über verschiedene Sätze Optionen ergibt sich jedoch, dass der  $\sigma$ -Parameter des CEV Modells deutlich

#### 4. Analyse der Parameter aus gegebenen Marktdaten



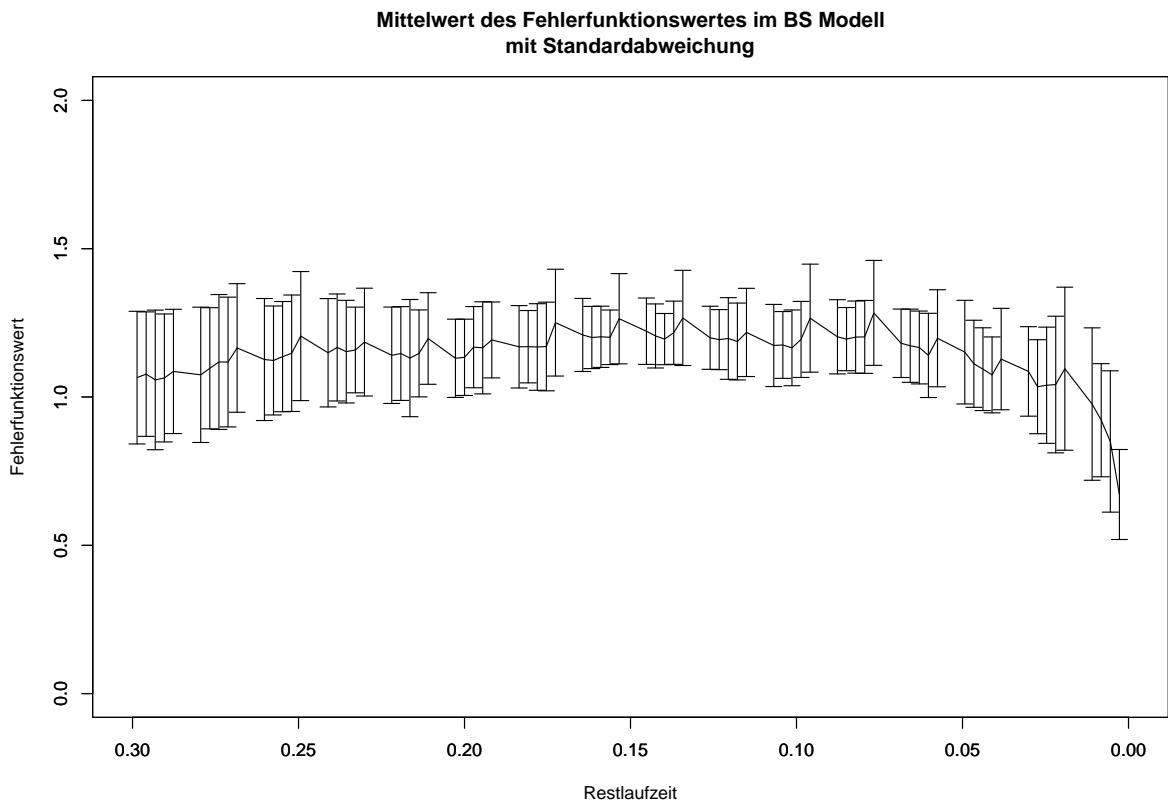
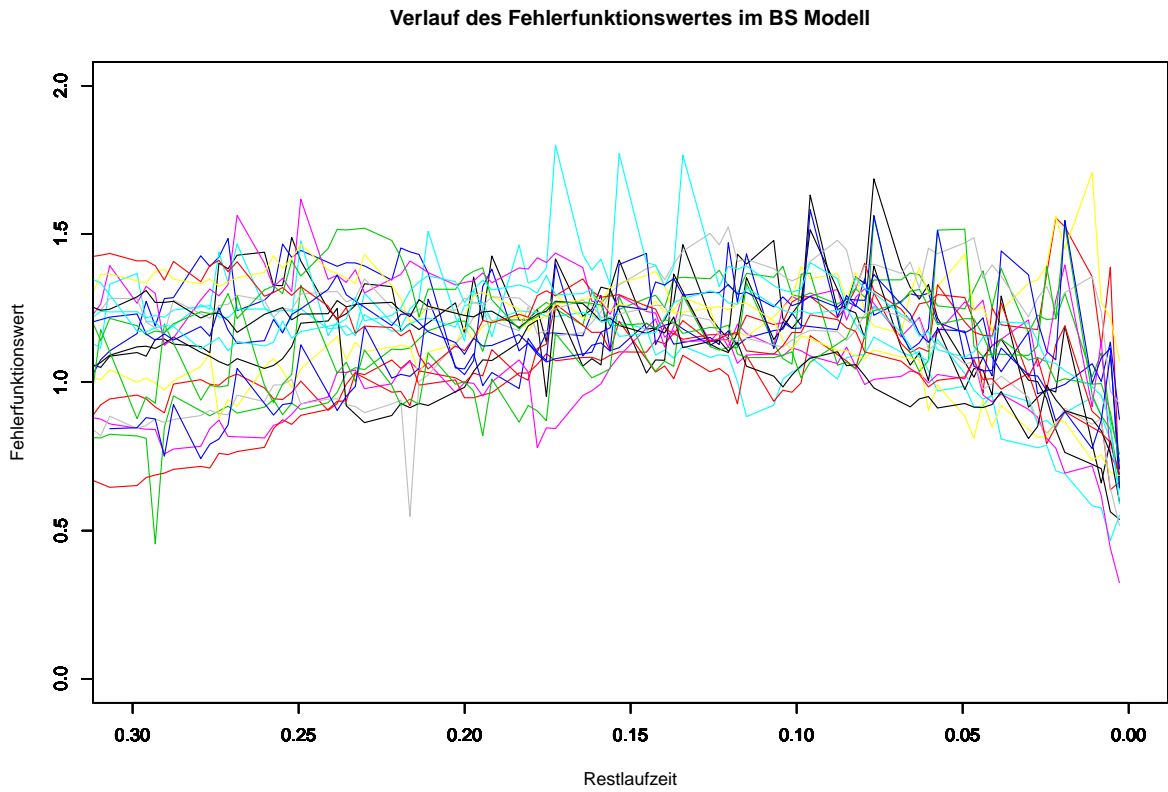
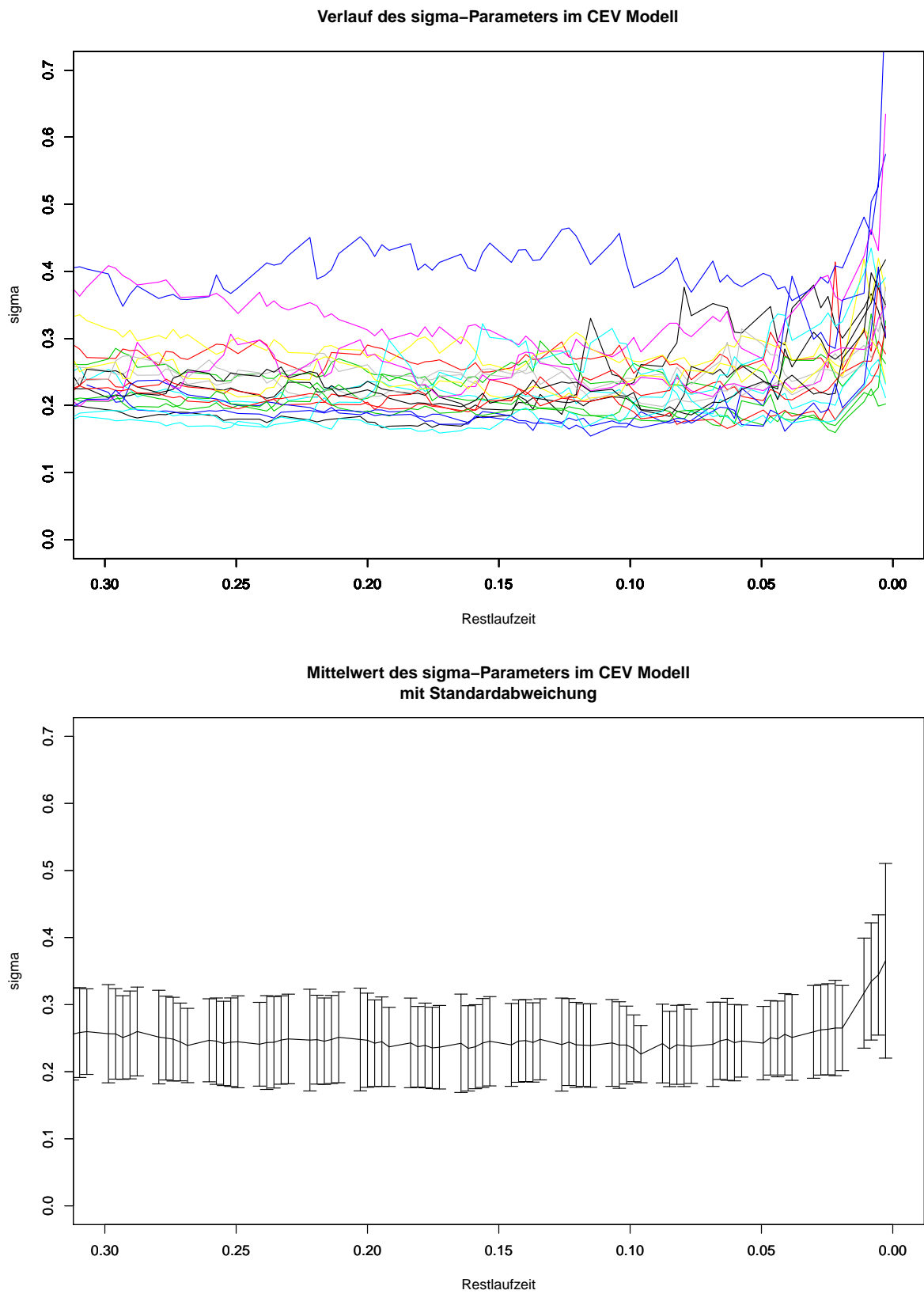


Abbildung 4.2.: Verlauf der Fehlerfunktion im BS Modell





weniger mit der Restlaufzeit der Optionen korreliert ist, als die Implizite Volatilität des BS Modells. Der  $\sigma$ -Parameter entwickelt erst kurz vor Auslauf der Option eine erkennbare Korrelation zur Restlaufzeit.

In Abbildung 4.4 ist zu sehen, dass der  $\beta$ -Parameter im Gegensatz zum  $\sigma$ -Parameter eine starke Korrelation zur Restlaufzeit aufweist. Es liegt sogar nahe anzunehmen, dass  $\beta \rightarrow \infty$  für  $T \rightarrow 0$ . Auch die Streuung des Parameterwertes nimmt stark mit Ablauf der Restlaufzeit zu.

In Abb. 4.5 ist zu sehen, dass der Fehler im CEV Modell mit der Zeit deutlich ansteigt. Mit einem mittleren Fehlerfunktionswert kleiner als 0.2 für Restlaufzeiten, die mehr als ein viertel Jahr betragen, und einem Maximum des Fehlerfunktionswertes von 0.4 ist er aber immer noch deutlich kleiner als im BS Modell.

### 4.3. Variance Gamma Modell

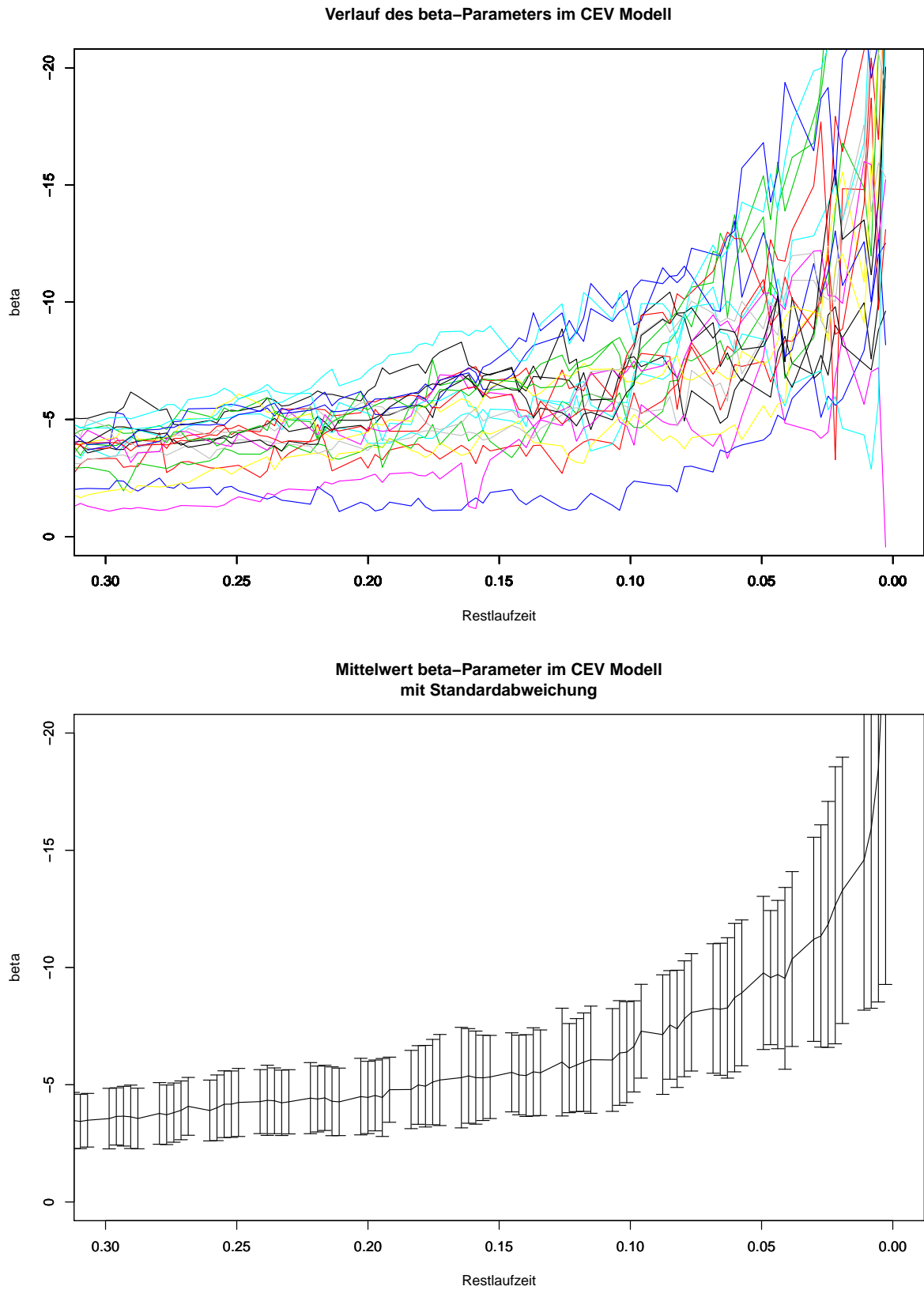
In den Abbildungen 4.6, 4.7 und 4.8 ist der Verlauf der Parameter im VG Modell dargestellt. Ich werde zuerst die jeweils oberen Abbildungen – also die mit einzelnen Pfaden – untersuchen.

Die Verläufe des  $\sigma$ -Parameters in Abb. 4.6 sehen, bis auf die letzten drei Wochen, wie Konstanten mit einem weißen Rauschen aus. Zum Ende der Restlaufzeit machen die Pfade jedoch immer mehr und immer größere Sprünge und steigen außerdem tendenziell an. Die Pfade des  $v$ -Parameters in Abb. 4.7 nehmen kollektiv mit der Restlaufzeit der Option ab. Damit nähert sich das Modell an das BS Modell an. Ansonsten erscheinen die Pfade recht willkürlich und machen große Sprünge. Der  $\theta$ -Parameter in Abb. 4.8 ist, wie auch der  $\sigma$ -Parameter, bei langer Restlaufzeit recht konstant und macht mit Ablauf der Restlaufzeit immer größere Sprünge. In den letzten Wochen vor Ablauf der Option fallen die meisten Pfade stark ab. Allerdings ist der Einfluss von  $\theta$  auf das Modell für kleine  $v$  verschwindend gering.

Bei der Analyse der Mittelwerte weicht die letzte Woche vor Optionsauslauf stark vom Rest der Zeit ab. Ich werde sie deshalb an dieser Stelle separat betrachten. Außerhalb der letzten Woche vor Ablauf der Optionen ist der Mittelwert des  $\sigma$ -Parameters leicht abfallend, der des  $\theta$ -Parameters fast konstant und der des  $v$ -Parameters stark fallend. In der letzten Woche vor Auslauf ist der Mittelwert des  $\sigma$ -Parameters dagegen stark steigend und  $\theta$  stark fallend. Der  $v$ -Parameter bildet hier eine Ausnahme, da er weiterhin stark fallend bleibt.

Die Standardabweichung ist beim  $\sigma$ -Parameter quasi konstant, beim  $\theta$ -Parameter leicht steigend und beim  $v$ -Parameter stark fallend.

Der Fehlerfunktionswert bleibt fast immer unter 0.2. Beim Vergleich des Fehlers im VG Modell (Abb. 4.9) mit dem Fehler im CEV Modell (Abb. 4.5) zeigt sich, dass sich der Fehler ungefähr halbiert hat.



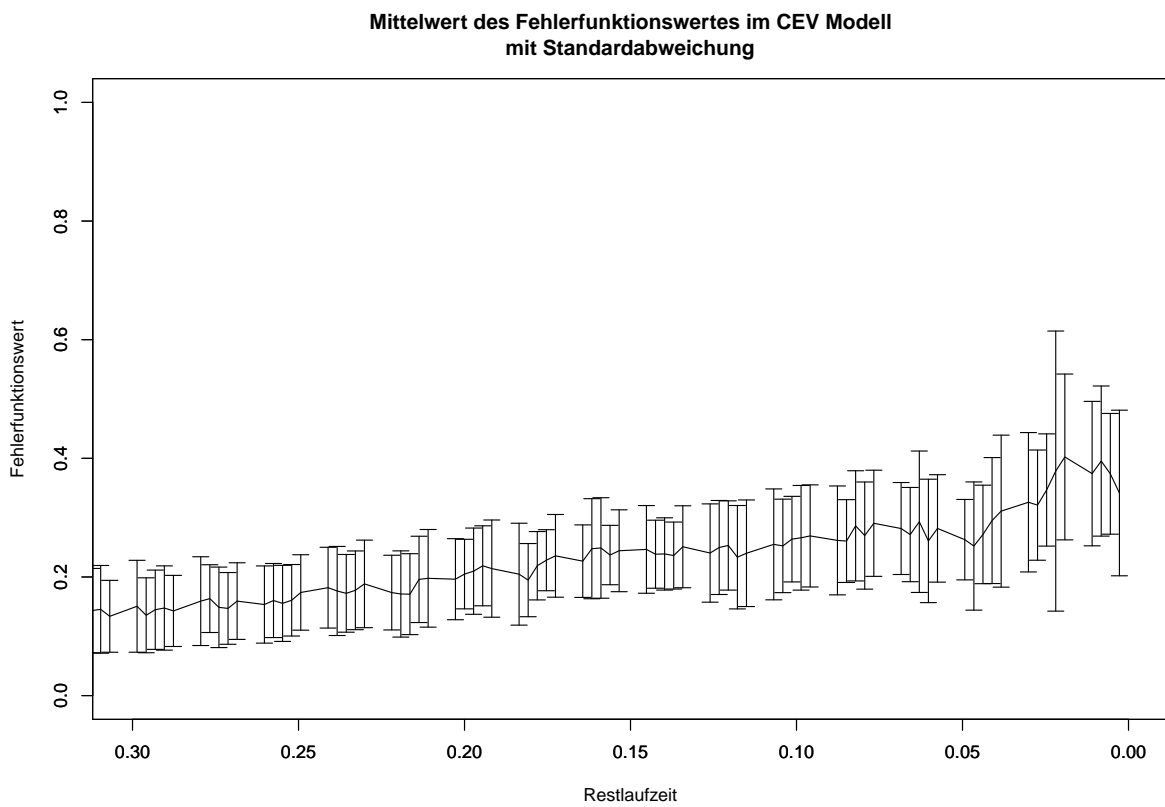
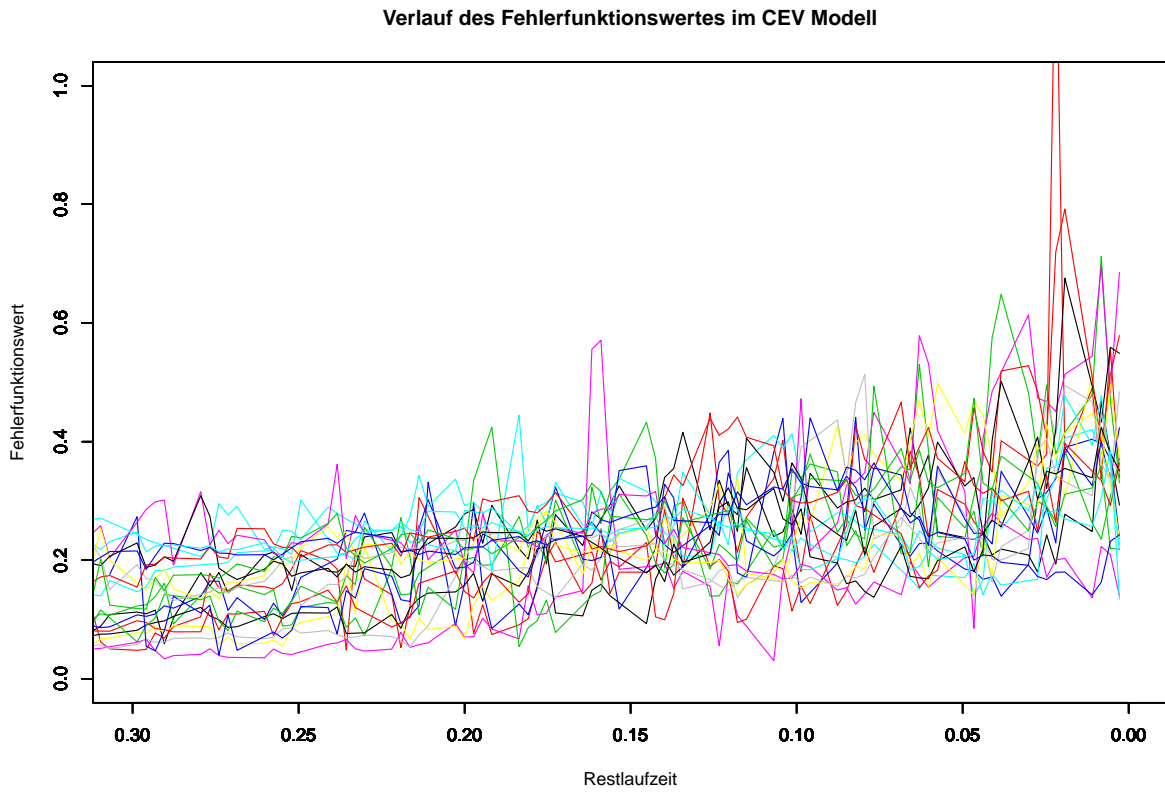
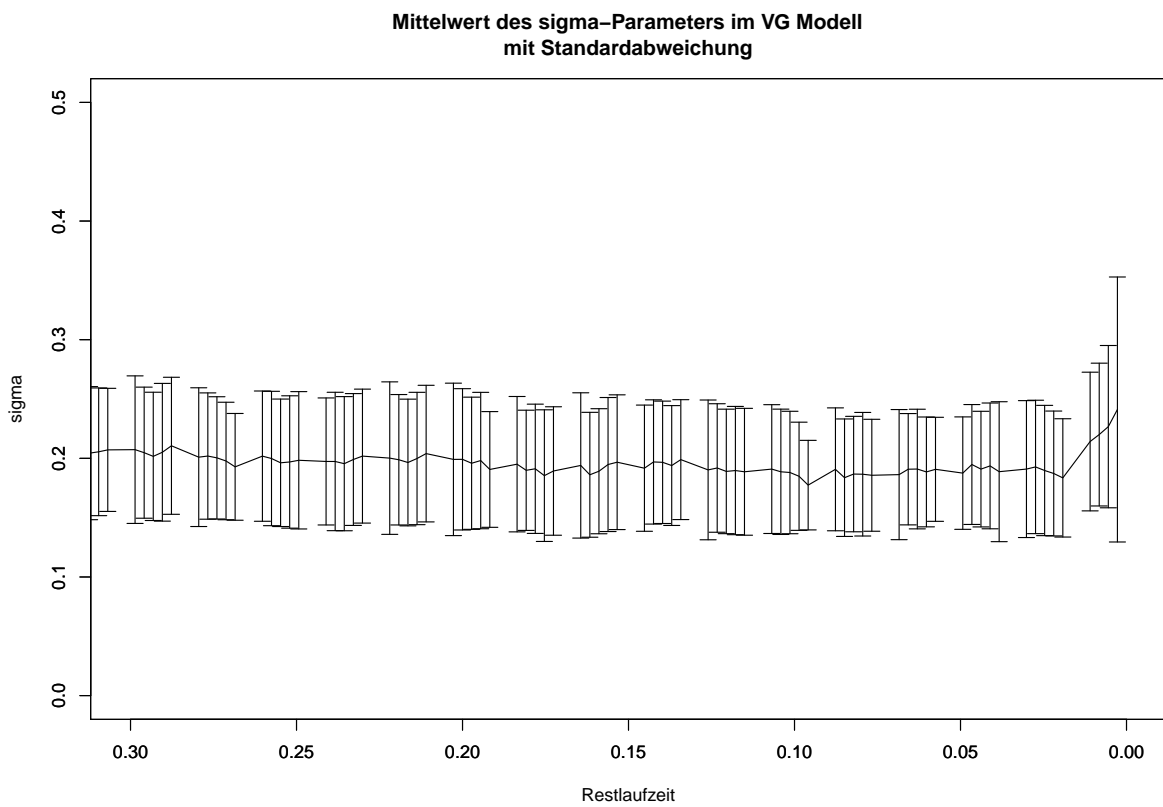
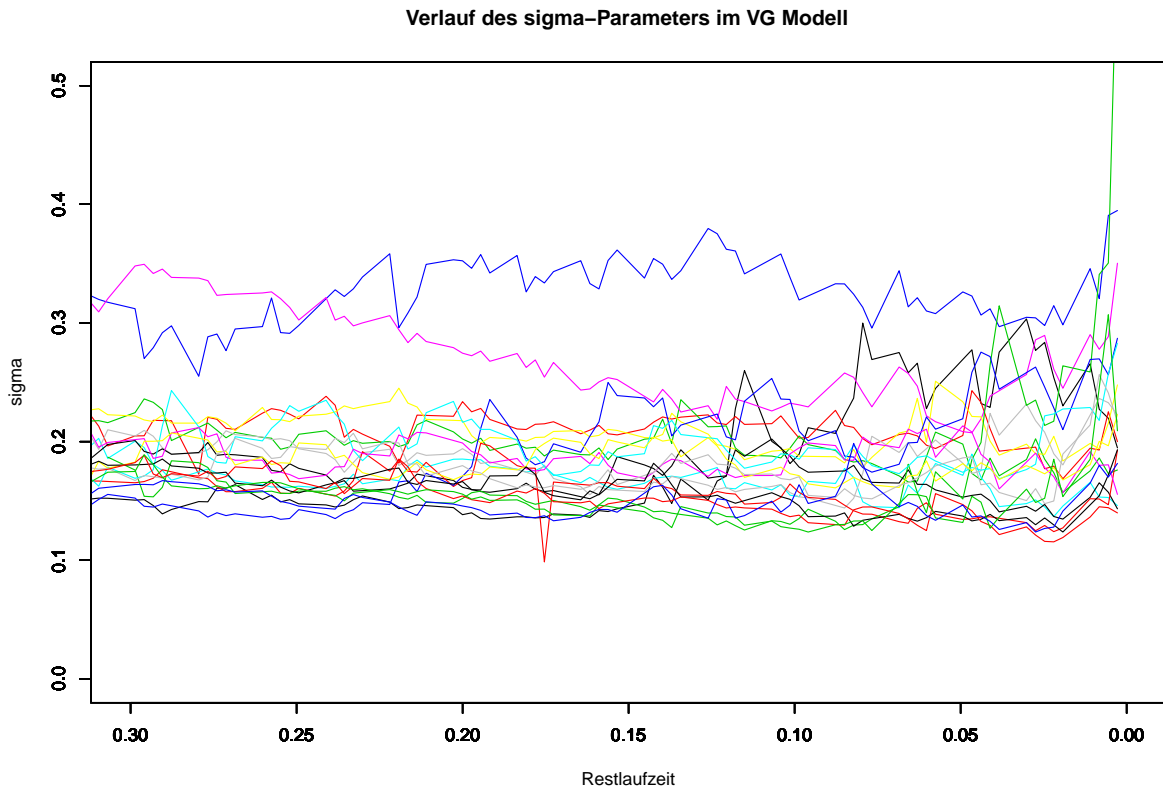


Abbildung 4.5.: Verlauf der Fehlerfunktion im CEV Modell



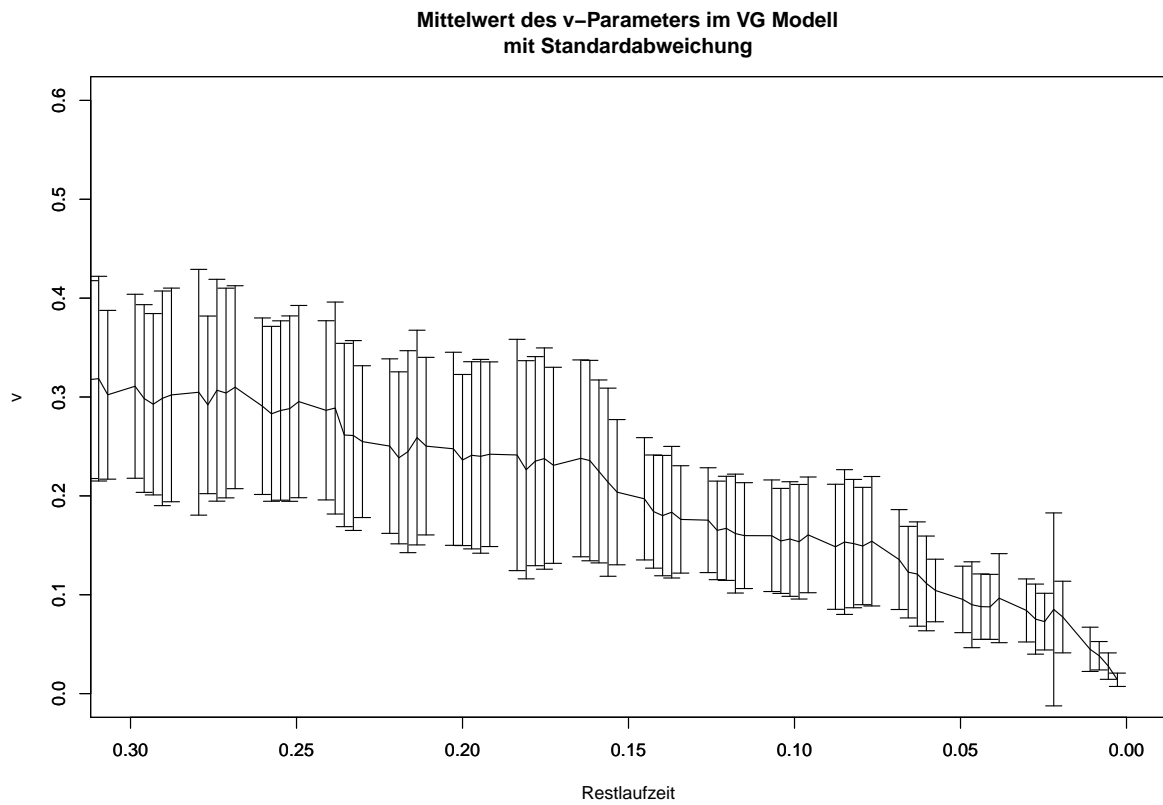
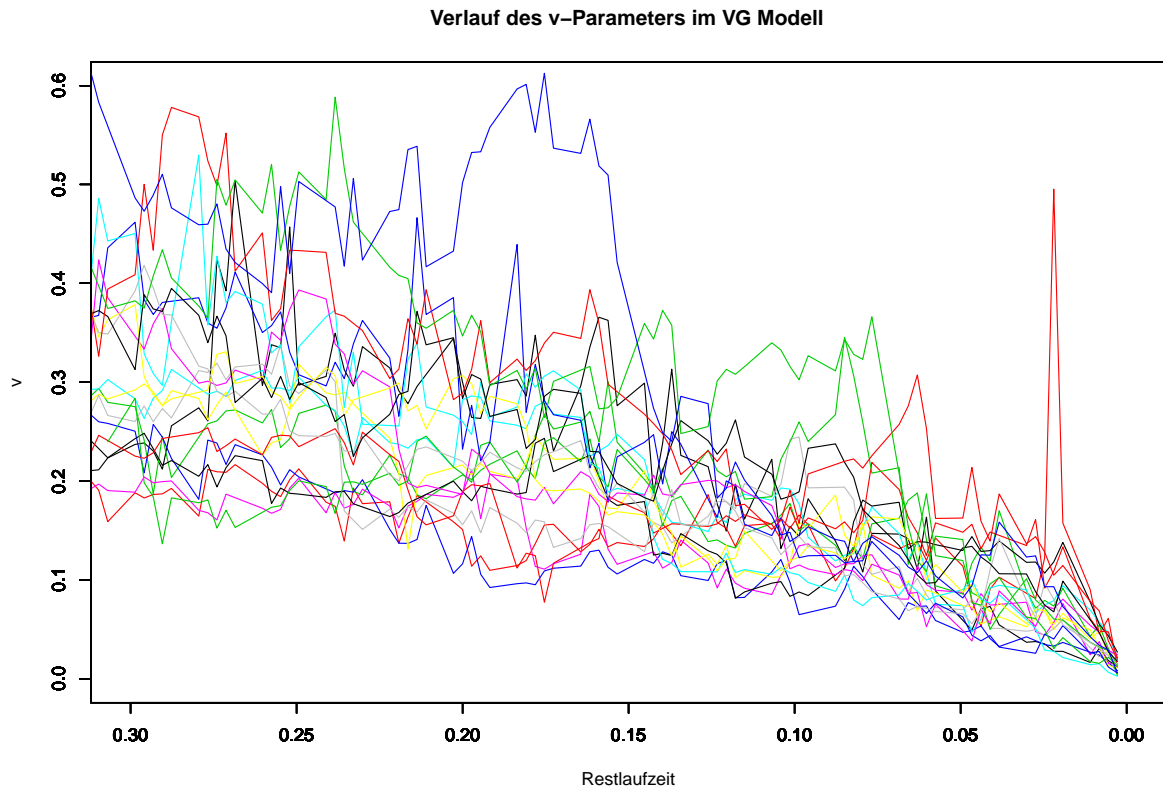
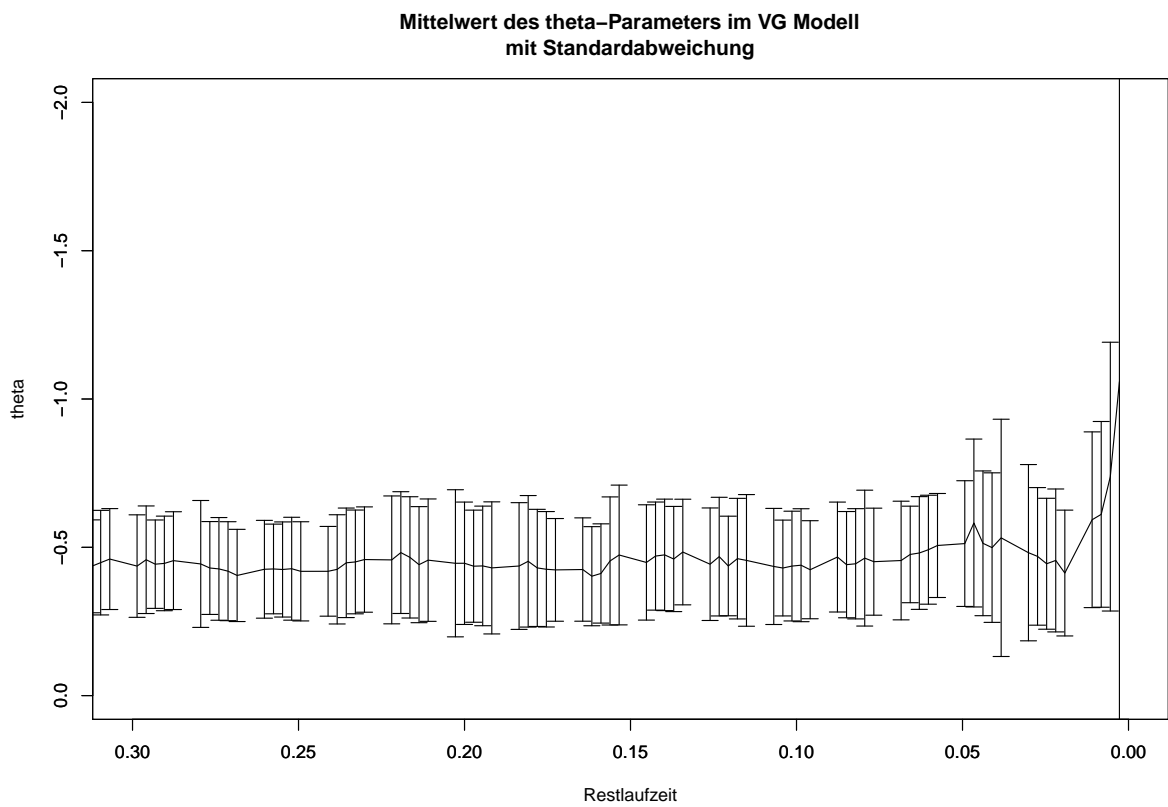
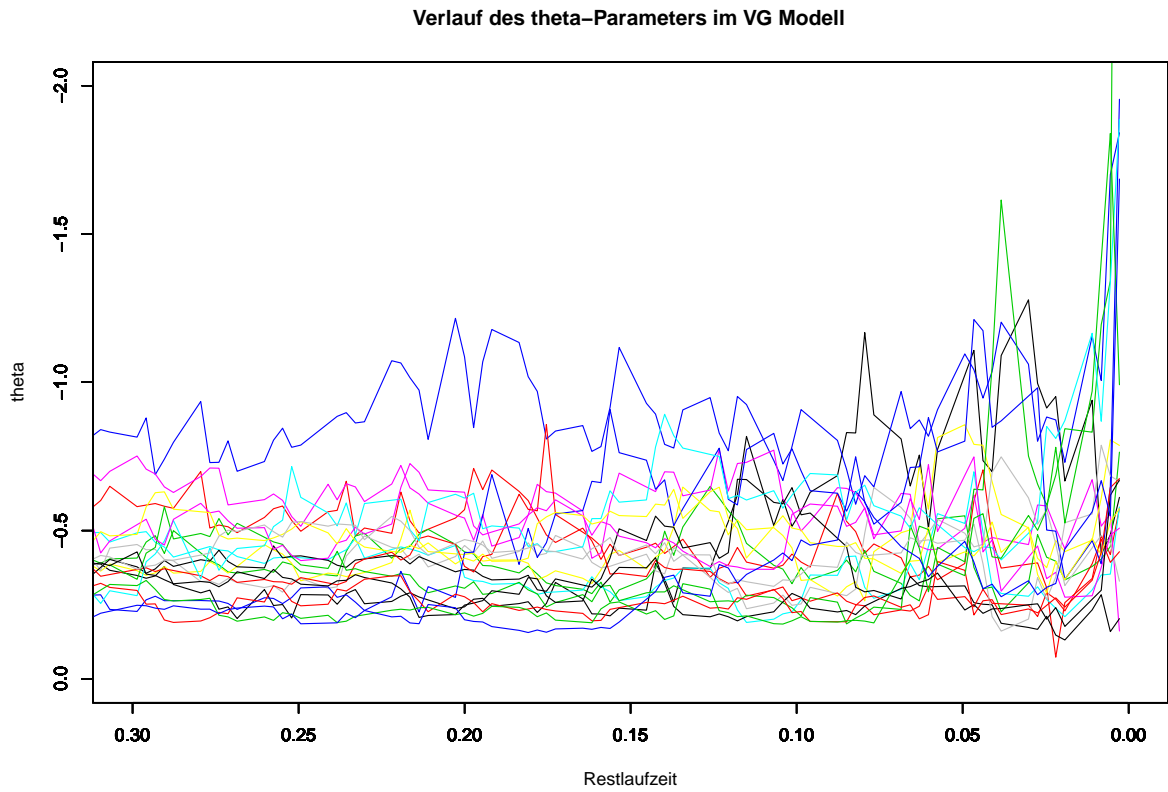


Abbildung 4.7.: Verlauf des  $v$ -Parameters im VG Modell

4. Analyse der Parameter aus gegebenen Marktdaten



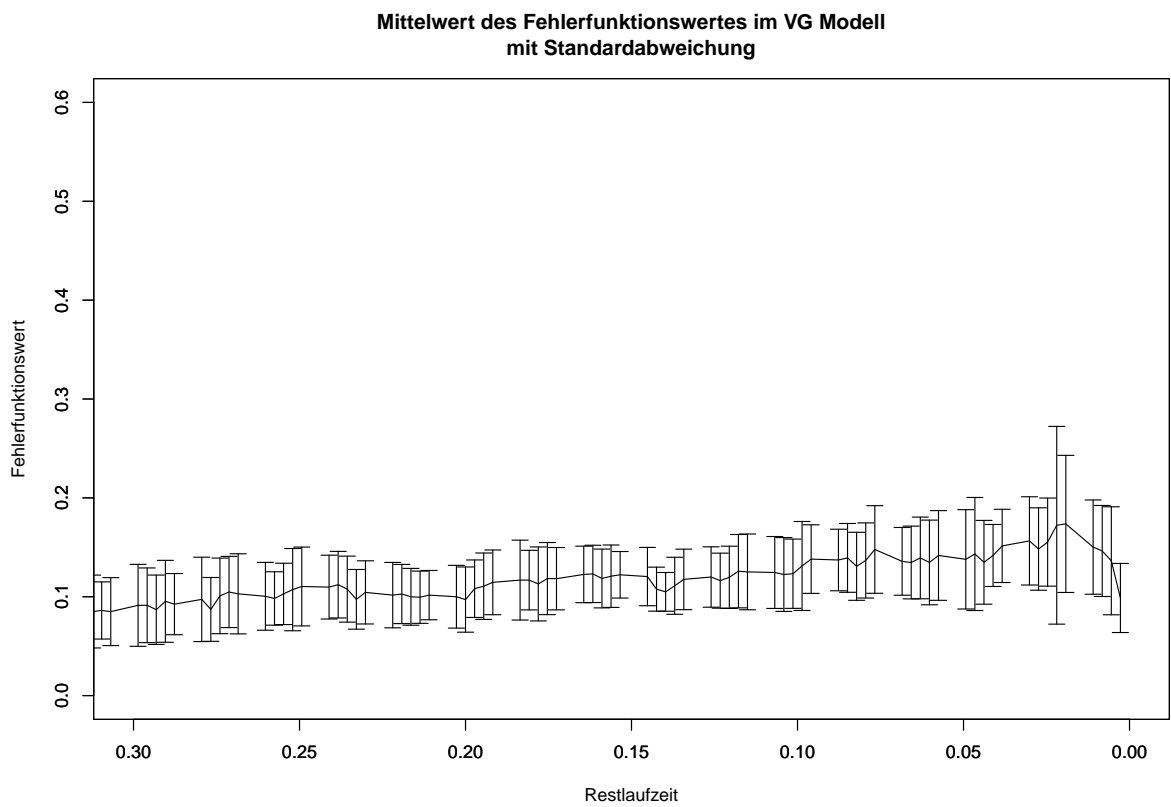
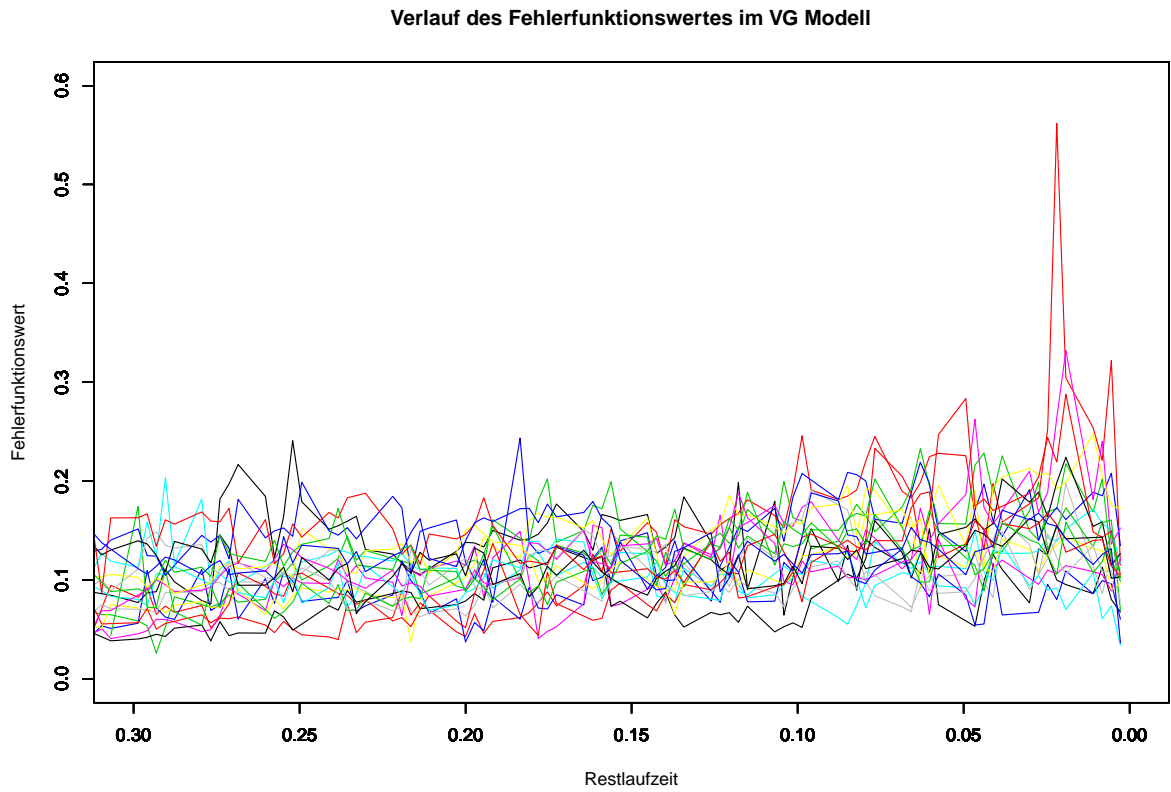


Abbildung 4.9.: Verlauf der Fehlerfunktion im VG Modell





## 5. Multilevel Monte Carlo

Das Multilevel Monte Carlo (MLMC) Verfahren wurde erstmals von Giles [11] in der Finanznumerik verwendet. In seiner Arbeit wird der recht allgemeine Fall

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dB_t, \quad 0 < t < T$$

betrachtet. Giles nutzt den MLMC Ansatz um Erwartungswerte der Art  $\mathbb{E}[f(S_T)]$  für Lipschitzstetige Funktionen  $f$  zu berechnen. Ein typisches Beispiel ist  $f(x) = (x - K)^+$ , die Payofffunktion einer Europäischen Calloption. Die Technik ist für den Fall gedacht, dass zu der stochastischen Differentialgleichung keine geschlossene Lösung bekannt ist. Das MLMC Verfahren wird in dem Paper dazu eingesetzt, um den Rechenaufwand der Euler-Diskretisierung zu reduzieren. Für diesen Fall ist bekannt (siehe z.B. [1]), dass der mittlere quadratische Fehler (MSE) gegeben ist durch

$$\text{MSE} \approx c_1 N^{-1} + c_2 h^2.$$

Dabei ist  $N$  die Anzahl der Simulationen und  $h$  die Diskretisierungsschrittweite. Im normalen Monte Carlo Verfahren ist die Reduktion des MSE Fehlers auf  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , also des Standardfehlers auf  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , in  $\mathcal{O}(\epsilon^{-3})$  möglich. Im MLMC kann der Aufwand auf  $\mathcal{O}(\epsilon^{-2}(\log \epsilon)^2)$  verringert werden.

### 5.1. Die Idee

Sei  $f$  eine Funktion vom Raum der integrierbaren Funktionen über  $[0, T]$  nach  $\mathbb{R}$ . Sei weiterhin  $f_n$  eine Folge von Funktionen von  $\mathbb{R}^{d+1}$  nach  $\mathbb{R}$  mit  $d = d(n) < \infty$  und  $f_n(x_0, x_{\frac{T}{d(n)}}, \dots, x_T) \rightarrow f(x_{[0, T]})$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}(f(x_{[0, T]})) = \mathbb{E}(f_0(x_0, x_{\frac{T}{d(0)}}, \dots, x_T)) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})(x_0, x_{\frac{T}{d(n)}}, \dots, x_T). \quad (5.1)$$

Durch diese Teleskopsummen-Erweiterung ist es möglich, den Wert von kontinuierlich pfadabhängigen Optionen deutlich schneller zu bestimmen – besonders in Fällen, in denen eine hohe Auflösung erforderlich ist. Durch die Umformung ist es mit recht geringem Aufwand möglich, zunächst den Wert von  $f_0$  sehr exakt zu bestimmen und dann in höheren Dimensionen immer weniger Pfade zu betrachten, da  $|f_n - f_{n-1}| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . An dieser Stelle habe ich die Stützstellen äquidistant gewählt. Bei der Betrachtung von Markow-Prozessen ist dies die einzige sinnvolle deterministische Methode für Funktionen, die gleichmäßig von dem Prozess abhängen. Dies muss jedoch nicht immer der Fall sein.

### 5.2. Brückenkonstruktion im Variance Gamma Modell

Zur Umsetzung des MLMC Verfahrens ist es hilfreich den VG Prozess nachträglich verfeinern zu können. Außerdem ist die Möglichkeit zur rekursiven Verfeinerung für das angepasste Verfahren

aus Abschnitt 5.5 essentiell. Weiterhin ist es für Quasi Monte Carlo Verfahren wichtig eine Brückenkonstruktion zu haben, um die Konvergenz auch bei hoher Auflösung garantieren zu können. Wie auch im BS Modell konstruiere ich die Brücke nicht für das Underlying selber, sondern für den zugrundeliegenden VG Prozess. Dafür wird zuerst eine Brückenkonstruktion für den  $\Gamma$ -Prozess benötigt.

Die Dichte des  $\Gamma$ -Prozesses zur Zeit  $t$  mit Drift  $\mu$  und Varianzrate  $\nu$  sei gegeben durch

$$f_{\Gamma(t;\mu,\nu)}(g) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\mu^2 t} \nu \frac{g^{\frac{\mu^2 t}{\nu}-1} \exp -\frac{\mu}{\nu} g}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 t}{\nu}\right)}.$$

Damit gilt für die bedingte Dichte des  $\Gamma$ -Prozesses zur Zeit  $t = \frac{T}{2}$ , gegeben den Werten  $0$  und  $y$  zu den Zeiten  $0$  und  $T$ ,

$$\begin{aligned} f_{\Gamma(t;\mu,\nu)}(g|g + \Gamma_2 = y) &= \frac{f_{\Gamma(t;\mu,\nu)}(g) \cdot f_{\Gamma(t;\mu,\nu)}(y - g)}{f_{\Gamma(T;\mu,\nu)}(y)} \\ &= \frac{\Gamma\left(2\frac{\mu^2 t}{\nu}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\mu^2 t}{\nu}\right)} \cdot \frac{g^{\frac{\mu^2 t}{\nu}-1} (y - g)^{\frac{\mu^2 t}{\nu}-1}}{y^{2\frac{\mu^2 t}{\nu}-1}} \\ &= f_{\beta_{[0,y]}\left(\frac{\mu^2 t}{\nu}, \frac{\mu^2 t}{\nu}\right)}(g). \end{aligned}$$

Zur Verfeinerung der VG Pfade wird zunächst eine  $\beta$ -verteilte Zufallsvariable gezogen. Danach kann die gängige Brückenkonstruktion der Brownschen Bewegung verwendet werden – mit Startzeit  $0 = \gamma(0, 1, \nu)$ , Endzeit  $\gamma(T, 1, \nu)$  und Zwischenzeit  $\gamma(t, 1, \nu)$ . Dieses Verfahren entspricht der rekursiven Anwendung von Algorithmus 1. Die angegebenen Algorithmen sind in Pseudo-Code geschrieben, in dem einige R-spezifische Befehle auftauchen. Für nähere Informationen zur Programmiersprache R siehe z.B. das Handbuch von J. Groß und B. Peters [13].

---

**Algorithmus 1:** Verfeinerung des VG Prozess mittels Brückenkonstruktion

---

**Input :**  $X_1, X_2, \gamma_1, \gamma_2, T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ , Parameter  $\sigma, \nu$

**Output :**  $\gamma_{\text{neu}}, X_{\text{neu}} \in \mathbb{R}$

$dt \leftarrow \frac{T_2 - T_1}{2}$

$\gamma_{\text{neu}} \leftarrow \gamma_1 + \text{rbeta}\left(1, \frac{dt}{\nu}, \frac{dt}{\nu}\right) \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)$

$d\gamma_1 \leftarrow \gamma_{\text{neu}} - \gamma_1$

$d\gamma_2 \leftarrow \gamma_2 - \gamma_{\text{neu}}$

$X_{\text{neu}} \leftarrow \frac{X_2 \cdot d\gamma_1 + X_1 \cdot d\gamma_2}{d\gamma_1 + d\gamma_2} + \sigma \cdot \text{rnorm}(1) \cdot \sqrt{\frac{d\gamma_1 \cdot d\gamma_2}{d\gamma_1 + d\gamma_2}}$

return  $X_{\text{neu}}, \gamma_{\text{neu}}$

---

### 5.3. Konstruktion eines Abbruchkriteriums

In der Numerik ist es natürlich nicht möglich die Teleskopsumme aus Abschnitt 5.1 vollständig zu berechnen. Es bleibt also zu klären, wieviele Summanden berechnet werden müssen und welche vernachlässigt werden können.

Da mir keine theoretischen Ergebnisse zur Steuerung des Verhältnisses von Auflösung und Anzahl der Simulationen vorliegen, habe ich in die Algorithmen 2 und 4 ein nicht-deterministisches Abbruchkriterium eingebaut. Für ein vorgegebenes  $\varepsilon$  wird auf jedem Level  $d$  solange simuliert, bis für die geschätzte Standardabweichung  $\text{RMSE}_d \leq \varepsilon$  gilt. Weiterhin wird das Level  $d$  solange erhöht, bis die Quadratur der Inkremente  $\Delta Q_d = Q[f_d - f_{d-1}] < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{d-1}}$  ist.

Für die mathematische Begründung des Abbruchkriteriums treffe ich die Annahme, dass die Beträge der Erwartungswerte  $|\mathbb{E}[(f_{d+1} - f_d)(S_{[0:T]})]|$  monoton gegen Null konvergieren – welches z.B. für Payoff-Funktionen von Asiatischen und Barrier Optionen gegeben ist. Damit konvergieren approximativ auch die  $|\Delta Q_d|$  monoton gegen Null.

Die Verringerung des Diskretisierungsfehlers durch ein weiteres Level ist sicherlich kleiner, als die dadurch bewirkte Änderung der Quadratur  $\Delta Q_d$ . Wegen der Monotonie ist es also nicht sinnvoll weitere Level zu betrachten, falls die Änderung des Standardfehlers  $\Delta \text{RMSE}_d$  größer ist, als die Änderung der Quadratur  $\Delta Q_d$ . Durch ein weiteres Level erhöht sich der Standardfehler um

$$\Delta \text{RMSE}_d = \sqrt{\sum_{i=1}^d \text{RMSE}_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{d-1} \text{RMSE}_i^2}.$$

Nach Konstruktion der Auflösung auf den einzelnen Leveln sind die  $\text{RMSE}_d \approx \varepsilon$ . Damit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\begin{aligned} \Delta \text{RMSE}_d &\approx \sqrt{\sum_{i=1}^d \varepsilon^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon^2} \\ &= \sqrt{d \cdot \varepsilon^2} - \sqrt{(d-1) \cdot \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung  $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \frac{\delta}{2}$  kann der Term weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \Delta \text{RMSE}_d &\approx \sqrt{d \cdot \varepsilon^2} - \sqrt{(d-1) \cdot \varepsilon^2} \\ &= \varepsilon \cdot \sqrt{d-1} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{d-1}} - 1 \right) \\ &\approx \varepsilon \cdot \sqrt{d-1} \left( 1 + \frac{1}{2(d-1)} - 1 \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{d-1}} \end{aligned}$$

Der Fehler durch die Taylorentwicklung ist für große  $d$  vernachlässigbar. Der Fehler ist monoton fallend in  $d$  und bereits für  $d = 3$  kleiner als 5%.

## 5.4. Der MLMC Algorithmus

Da nun alle Voraussetzungen geklärt sind, kommen wir zum eigentlichen Thema dieses Kapitels. Der klassische MLMC Algorithmus funktioniert, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben. Ich habe die dyadische Verfeinerung  $d(n) = 2^n + 1$  gewählt. In jedem Level  $i$  werden Variance Gamma Prozesse simuliert und daraus die jeweilige Payoffdifferenz  $f_i(S_0, S_{2^{-i}}, \dots, S_{(2^i-1)2^{-i}}, S_T) - f_{i-1}(S_0, S_{2^{-i+1}}, \dots, S_{(2^{i-1}-1)2^{-i+1}}, S_T)$  bestimmt. Es werden solange neue Pfade simuliert, bis die

geschätzte Standardabweichung des Mittelwertes kleiner als ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  ist. Zu Anfang werden  $N_0 \in \mathbb{N}$  Pfade simuliert. Falls der RMSE größer als  $\varepsilon$  ist, wird die Anzahl der simulierten Pfade verdoppelt. Die Anzahl der Simulationen wird verdoppelt, um die Abweichung vom erwünschten Konvergenzkriterium gering zu halten. Eigentlich interessiert uns das Ereignis „ $\text{RMSE}_N < \varepsilon$ “ für ein gegebenes  $N$ . Bei ständiger Überprüfung des Kriteriums erhalten wir jedoch das Ereignis „ $\exists i < N : \text{RMSE}_i < \varepsilon$ “. Und natürlich ist  $P(\exists i < N : \text{RMSE}_i < \varepsilon) > P(\text{RMSE}_N < \varepsilon)$ . Ich habe zur Berechnung des RMSE den gesamten Payoffvektor gespeichert. Für hohe Genauigkeiten ist es sinnvoll, stattdessen den iterativen Varianzschätzer aus Abschnitt 5.6 zu verwenden.

Es werden solange neue Level hinzugefügt, bis das Abbruchkriterium aus 5.3 erreicht wird. Das Verfahren ist in Algorithmus 2 zusammengefasst.

**Algorithmus 2:** Multilevel Monte Carlo

---

**Input :**  $f : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon > 0, N_0 \in \mathbb{N}, S_0 \in \mathbb{R}^+, \text{Parametersatz } (\sigma, \theta, v)$   
**Output :**  $p \in \mathbb{R}$

bias  $\leftarrow \infty$   
level  $\leftarrow 0$   
 $N \leftarrow N_0$   
 $p \leftarrow 0$

**while**  $|\text{bias}| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{d-1}}$  **do**

$i \leftarrow 1$   
payoff.temp  $\leftarrow \text{data.frame}(\Delta p = 0)$   
**while** Fehler  $> \varepsilon$  **do**

**while**  $i \leq N$  **do**

Simuliere  $\gamma$ -Prozess mit Auflösung  $d = 2^{\text{level}} + 1$  durch iterative Anwendung von Algorithmus 1 und speichere diesen in den Vektor  $\gamma$   
Simuliere Brownsche Bewegung mit Auflösung  $d$ , die „Zeit“ sei dabei gegeben durch den Vektor  $\gamma$  und speichere diese in den Vektor X  
Berechne S aus X nach Formel (2.4)  
payoff.neu  $\leftarrow f(S)$   
**if** level  $> 0$  **then**

Berechne S aus X, benutze aber nur jeden 2. Eintrag (also die Auflösung des vorigen Levels)  
payoff.alt  $\leftarrow f(S)$

**end**  
**else**  
| payoff.alt  $\leftarrow 0$   
**end**  
payoff.temp[ $i$ ]  $\leftarrow \text{payoff.neu} - \text{payoff.alt}$   
 $i \leftarrow i + 1$

**end**  
Fehler  $\leftarrow \frac{1}{\sqrt{N}}$  Standardabweichung von payoff.temp  
 $N \leftarrow 2N$

**end**  
bias  $\leftarrow$  Mittelwert von payoff.temp  
 $p \leftarrow p + \text{bias}$   
level  $\leftarrow \text{level} + 1$   
 $N \leftarrow N_0$

**end**

---

### 5.5. Der angepasste MLMC Algorithmus

Das klassische MLMC Verfahren aus dem vorigen Abschnitt 5.4 ist hervorragend für stochastische Prozesse geeignet, deren Inkremente die gleiche Variation haben – wie z.B. die geometrische Brownsche Bewegung. In diesem Fall ist es sinnvoll, überall gleich zu verfeinern. Im Variance Gamma Modell ist dies apriori auch gegeben. Allerdings wird die Variation des VG Prozesses in einem Zeitintervall nicht nur von der Länge des Intervalls bestimmt, sondern auch von der Realisierung des  $\Gamma$ -Prozesses. Wenn sich in einem Intervall der  $\Gamma$ -Prozess wenig ändert, so ist die Variation des Pfades in dem Intervall gering. In solchen Intervallen lässt sich der Variance Gamma Prozess gut durch eine Gerade approximieren. Dagegen ist dies in einem Intervall, in dem sich der  $\Gamma$ -Prozess stark ändert, nicht gut möglich. Diese Eigenschaft des VG Prozesses hat mich auf die Idee gebracht, die Auflösung des Prozesses in Abhängigkeit von der Realisierung des  $\Gamma$ -Prozesses zu wählen, statt nach einem deterministischen Muster. Eine solche Konstruktion erfordert es, dass ein Intervall nachträglich verfeinert werden kann. Dieses Problem wird durch die Brückenkonstruktion aus Abschnitt 5.2 gelöst. Es ist uns also bei der Simulation eines VG Pfades möglich, durch die Werte des  $\Gamma$ -Prozesses an den bisherigen Stützstellen, die verschiedenen Variationen des VG Pfades zwischen den einzelnen Stützstellen einzuschätzen. Anhand dieser Werte kann dann entschieden werden, welche Intervalle weiter verfeinert werden sollen. Für Barrieroptionen wäre es interessant, die Varianz der Intervalle möglichst gering zu halten, also in allen Intervallen auf ein ähnliches Niveau zu bringen. Dies ist jedoch nicht uneingeschränkt möglich, da der  $\Gamma$ -Prozess ein Sprungprozess ist und damit auch in beliebig kleinen Intervallen stark wachsen kann. Für Asiatische Optionen ist die Variation in einem Intervall nur eines von zwei Kriterien, welche die Genauigkeit der Approximation bestimmen. Das zweite Kriterium ist die Länge des Intervalls. Für die Bewertung von Asiatischen Optionen ist es also sinnvoll die Variation mit der Größe des Intervalls zu gewichten. Diese Idee wird auch bei adaptiven Quadraturverfahren verwendet. In dem von mir angepassten MLMC Algorithmus wird aus diesen Gründen ein Level nicht durch die Anzahl an Stützstellen definiert, sondern durch den Wert von  $\Delta\gamma \cdot \Delta t$ .

Um diese Idee in das MLMC Verfahren integrieren zu können wird ein Algorithmus benötigt, der einen VG Pfad in Abhängigkeit von  $\Delta\gamma \cdot \Delta t$  simuliert. Alle dazu nötigen Mittel wurden bereits in diesem Kapitel hergeleitet. Das genaue Verfahren ist in Algorithmus 3 zusammengefasst. Es ist wichtig bei der Simulation auf einem bestimmten Level zu speichern, welche Stützstellen auch auf dem vorigen Level simuliert worden wären, um die Differenz  $f_i - f_{i-1}$  aus Gleichung (5.1) berechnen zu können.

Nach der Klärung des direkten Vorgehens bei der Verfeinerung, bleibt nur noch die Definition der verschiedenen Level. In Level  $i$  wird jedes Intervall solange verfeinert, bis der Wert von  $\Delta\gamma \cdot \Delta t < \Delta_i^2$  ist, wobei  $\Delta_i$  eine levelspezifische Konstante ist. Das Verfahren ist in Algorithmus 4 zusammengefasst. Dort habe ich  $\Delta_i = (T/2^i)^2$  gewählt.

**Algorithmus 3:** Varianzgesteuerte Simulation des VG Prozesses

---

**Input** :  $T, t, \Delta \in \mathbb{R}^+$ , Parametersatz  $(\theta, \sigma, v)$   
**Output** : Zeit,  $\gamma$ ,  $X \in \mathbb{R}^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$   
Zeit  $\leftarrow c(0, T)$   
 $\gamma \leftarrow c(0, \text{rgamma}(1, \text{shape} = T/v, \text{scale} = v))$   
 $X \leftarrow c(0, \text{rnorm}(1, \theta\gamma[2], \sigma\sqrt{\gamma[2]}))$   
Indikator  $\leftarrow c(1, 1)$   
 $k \leftarrow 2$   
**while** any( $(\gamma[2 : k] - \gamma[1 : (k - 1)])(\text{Zeit}[2 : k] - \text{Zeit}[1 : (k - 1)]) > \Delta$ ) **do**  
|  $i \leftarrow \min(\text{which}((\gamma[2 : k] - \gamma[1 : (k - 1)])(\text{Zeit}[2 : k] - \text{Zeit}[1 : (k - 1)]) > \Delta))$   
| **if**  $(\gamma[i + 1] - \gamma[i])(\text{Zeit}[i + 1] - \text{Zeit}[i]) > 4\Delta$  **then**  
| | Indikator  $\leftarrow c(\text{Indikator}[1 : i], 1, \text{Indikator}[i + 1 : k])$   
| **end**  
| **else**  
| | Indikator  $\leftarrow c(\text{Indikator}[1 : i], 0, \text{Indikator}[i + 1 : k])$   
| **end**  
|  $dt \leftarrow \frac{1}{2}(\text{Zeit}[i + 1] - \text{Zeit}[i])$   
|  $\text{Zeit}_{\text{neu}} \leftarrow \text{Zeit}[i] + dt$   
|  $\gamma_{\text{neu}} \leftarrow \gamma[i] + \text{rbeta}(1, \frac{dt}{v}, \frac{dt}{v}) \cdot (\gamma[i + 1] - \gamma[i])$   
|  $d\gamma_1 \leftarrow \gamma_{\text{neu}} - \gamma[i]$   
|  $d\gamma_2 \leftarrow \gamma[i + 1] - \gamma_{\text{neu}}$   
|  $X_{\text{neu}} \leftarrow \frac{X[i+1] \cdot d\gamma_1 + X[i] \cdot d\gamma_2}{d\gamma_1 + d\gamma_2} + \sigma \cdot \text{rnorm}(1) \cdot \sqrt{\frac{d\gamma_1 \cdot d\gamma_2}{d\gamma_1 + d\gamma_2}}$   
|  $\text{Zeit} \leftarrow c(\text{Zeit}[1 : i], \text{Zeit}_{\text{neu}}, \text{Zeit}[i + 1 : k])$   
|  $\gamma \leftarrow c(\gamma[1 : i], \gamma_{\text{neu}}, \gamma[i + 1, k])$   
|  $X \leftarrow c(X[1 : i], X_{\text{neu}}, X[i + 1, k])$   
|  $k \leftarrow k + 1$   
**end**  
**return** Zeit,  $\gamma$ , X

---

---

**Algorithmus 4:** Angepasstes Multilevel Monte Carlo

---

**Input :**  $f : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon > 0, N_0 \in \mathbb{N}, S_0 \in \mathbb{R}^+$   
**Output :**  $p \in \mathbb{R}$   
bias  $\leftarrow \infty$   
 $\Delta \leftarrow T^2$   
 $N \leftarrow N_0$   
 $p \leftarrow 0$   
**while** |bias|  $> \varepsilon$  **do**  
   $i \leftarrow 1$   
  payoff.temp  $\leftarrow \text{rep}(0, N/2)$   
  **while** Fehler  $> \varepsilon$  **do**  
    payoff.temp  $\leftarrow c(\text{payoff.temp}, \text{rep}(0, N/2))$   
    **while**  $i \leq N$  **do**  
      rufe „Varianzgesteuerte Simulation des VG Prozesses“ (Alg. 3) auf  
      Berechne S aus X  
      payoff.neu  $\leftarrow f(S, \text{Zeit})$   
      **if**  $\Delta < T^2$  **then**  
        Berechne S aus X[indikator]  
        payoff.alt  $\leftarrow f(S, \text{Zeit}[\text{indikator}])$   
      **end**  
      **else**  
        payoff.alt  $\leftarrow 0$   
      **end**  
      payoff.temp[ $i$ ]  $\leftarrow \text{payoff.neu} - \text{payoff.alt}$   
       $i \leftarrow i + 1$   
    **end**  
    Fehler  $\leftarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \text{RMSE}(\text{payoff.temp})$   
     $N \leftarrow 2N$   
  **end**  
  bias  $\leftarrow \text{mean}(\text{payoff.temp})$   
   $p \leftarrow p + \text{bias}$   
   $\Delta \leftarrow \frac{\Delta}{4}$   
   $N \leftarrow N_0$   
**end**

---



## 5.6. Ein iterativer Varianzschätzer

In den Algorithmen 2 und 4 wird die geschätzte Standardabweichung für das Abbruchkriterium verwendet. Um einen Schätzer für die Standardabweichung zu erhalten, benötigt man im einfachsten Fall alle bisherigen Realisierungen der Zufallsvariable. Durch einige elementare Umformungen kann man den Schätzer jedoch in einen iterativen Schätzer umwandeln. Gerade für eine große Anzahl von Simulationen ist dies wichtig, da das Speichern von Zwischenergebnissen eine nicht vernachlässigbare Menge an Arbeitsspeicher benötigt. Für die geschätzte Varianz des Mittelwertes  $\text{MSE}_N$  von  $N$  Simulationen gilt

$$\begin{aligned}\text{MSE}_N &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2 \\ &= \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\bar{x}_N \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N \bar{x}_N^2 \right) \\ &= \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}_N^2 \right) \\ &= \frac{N}{N-1} (\overline{x^2} - \bar{x}_N^2).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Quadratsumme der Beobachtungen

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i^2 = N\bar{x}_N^2 + (N-1)\text{MSE}_N.$$

Wenn nun zu den  $x_N$  bisher gemachten Beobachtungen (bzw. Simulationen)  $M$  weitere Beobachtungen  $x_M$  mit Mittelwert  $\bar{x}_M$  hinzukommen, ergibt sich das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\text{MSE}_{N+M} &= \frac{N+M}{N+M-1} (\overline{x^2}_{N+M} - \bar{x}_{N+M}^2) \\ &= \frac{N+M}{N+M-1} \left( \frac{1}{N+M} \sum_{i=1}^{N+M} x_i^2 - \left( \frac{N}{N+M} \bar{x}_N + \frac{M}{N+M} \bar{x}_M \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N+M-1} \left( \sum_{i=N+1}^{N+M} x_i^2 + N\bar{x}_N^2 + (N-1)\text{MSE}_N \right) - \frac{(N\bar{x}_N + M\bar{x}_M)^2}{(N+M-1)(N+M)}\end{aligned}$$

Diese Formel ermöglicht es den MSE rekursiv auszurechnen – und zwar in beliebigen Abständen. Im einfachsten Fall  $M = 1$  vereinfacht sich die Formel zu

$$\text{MSE}_{N+1} = \frac{1}{N} (x_{N+1}^2 + N\bar{x}_N^2 + (N-1)\text{MSE}_N) - \frac{(N\bar{x}_N + x_{N+1})^2}{N(N+1)}.$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man die äquivalente, aber numerisch stabilere Version

$$\text{MSE}_{N+1} = \frac{N-1}{N} \text{MSE}_N + \frac{1}{N+1} (\bar{x}_N - x_{N+1})^2.$$

Diese einfache Rekursionsvorschrift für die empirische Varianz kann in alle Arten von Monte Carlo Algorithmen eingebaut werden. Besonders wenn eine hohe Genauigkeit gewünscht wird - und damit eine große Anzahl an Simulationen benötigt wird - ist sie unverzichtbar.

## 5.7. Numerische Konvergenzanalyse

Wie bereits erwähnt, existiert bisher keine theoretische Analyse der Konvergenzeigenschaften. Um dennoch Aussagen über die Güte der Verfahren treffen zu können, wird in diesem Abschnitt eine numerische Analyse der Konvergenz gegeben. Dazu werde ich einerseits einen Spezialfall einer kontinuierlichen, arithmetischen Asiatischen Option betrachten, in dem es eine geschlossene Lösung für den Optionspreis gibt. Andererseits werde ich die Konvergenz für eine Down-Out Barrieroption betrachten.

### 5.7.1. Payoff-Funktionen

Die Wahl der  $f_n$  aus (5.1) für Barrieroptionen ist recht eindeutig: Seien  $S_0, S_2, \dots, S_{d(n)}$  die Kurse des Underlyings zu Zeiten  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{d(n)} = T$ . Für eine Down Out Barrier Calloption mit Strike  $K$  und Barrier  $H$  wähle ich

$$f_n(S_1, \dots, S_{d(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \exists j \in \{0, \dots, d(n)\} \text{ mit } S_j \leq H \\ (S_{d(n)} - K)^+ & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für eine arithmetische Asiatische Option ist die Wahl nicht eindeutig. Es bieten sich verschiedene Möglichkeiten zur Interpolation des Underlyingprozesses oder des VG Prozesses an. Ich habe mich dazu entschlossen, den VG Prozess  $X(t, \sigma, v, \theta) = B(\gamma(t; 1, v); \theta, \sigma)$  aus (2.4) linear zu interpolieren. Dies entspricht einer „geometrischen“ Interpolation des Underlyings. Zwischen zwei Punkten  $(0, S_0)$  und  $(T, S_T)$  wird also der Verlauf  $t \rightarrow S_0^{1-\frac{t}{T}} S_T^{\frac{t}{T}}$  angenommen. Dies entspricht

$$f_n(S_0, \dots, S_{d(n)}) = \left( \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{d(n)-1} (t_{j+1} - t_j) \frac{S_{j+1} - S_j}{\ln(S_{j+1}) - \ln(S_j)} - K \right)^+.$$

Falls  $\exists j \in \{0, \dots, d(n) - 1\}$  mit  $S_{j+1} = S_j$ , muss der entsprechende Summand durch  $(t_{j+1} - t_j)S_j$  ersetzt werden. Dies geschieht aber nur mit Wahrscheinlichkeit 0. Man beachte, dass beide Funktionen für beliebige Abstände zwischen den Stützstellen definiert sind.

### 5.7.2. Konvergenz für eine Asiatische Option

Um die Konvergenzeigenschaften der Algorithmen zu untersuchen, ist es hilfreich einen exakten Referenzwert zu haben. Für eine arithmetische Asiatische Calloption mit Strike  $K = 0$  kann der Wert unabhängig vom Modell und dessen Parametern berechnet werden. Der Payoff zur Zeit  $T$  ist gegeben durch  $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$ . Den gleichen Payoff erhält man, wenn man zur Zeit 0 ein Underlying zu  $S_0$  kauft und es gleichmäßig über die Restlaufzeit wieder verkauft – allerdings ohne den Verkaufserlös anzulegen. Mit Anlegen des erhaltenen Geldes müssen zur Zeit  $t$  nur

$\frac{dt}{T} \exp(-r(T-t))$  Aktien verkauft werden. Es müssen zur Zeit 0 also nur

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dt}{T} \exp(-r(T-t)) &= \frac{1}{T} \exp(-rT) \int_0^T \exp(rt) dt \\ &= \frac{1}{rT} (1 - \exp(-rT)) \end{aligned}$$

Aktien gekauft werden. Damit ist der Callpreis

$$C_{asia}(0, T) = \frac{S_0}{rT} (1 - \exp(-rT)). \quad (5.2)$$

Zur Analyse der Konvergenzgeschwindigkeit wird mit variablem Aufwand der Preis einer kontinuierlichen, arithmetischen Asiatischen Calloption bestimmt und mit dem Referenzwert verglichen. Ich habe den Parametersatz  $\sigma = 0.3$ ,  $\theta = -0.5$  und  $v = 0.4$  gewählt. Der Strike ist in diesem Beispiel  $K = 0$  um den deterministischen Referenzwert nutzen zu können. Weiterhin ist der kontinuierliche Zinssatz  $r = 0.02$ , der Startkurs des Underlyings  $S_0 = 100$  und die Restlaufzeit  $T = 1$ . Damit ergibt sich als Referenzwert  $C_{asia} = 99.0066$ . In Abbildung 5.1 ist der absolute Fehler gegen die Anzahl der insgesamt benutzten Stützstellen aufgetragen. Es ist sinnvoll die Anzahl der Stützstellen als Maß des Aufwandes des Algorithmus zu verwenden, da der Aufwand zur Simulation eines Pfades proportional zur Anzahl der Stützstellen des Pfades ist. Die Skalen der Abbildung sind logarithmisch gewählt. Unter der Annahme, dass der Fehler die Form  $F \approx c \cdot N^{-\alpha}$  hat, ergibt sich in der Abbildung durch die Logarithmierung der Skalen eine Gerade, deren Steigung gerade das Negative der Konvergenzrate  $-\alpha$  ist und deren Achsenabschnitt  $\log(c)$  ist.

Die Konvergenzraten der normalen MC Verfahren für festes Level sind in der Abbildung nur für die drei höchsten Level zu errahnen. Dies ist aber nicht weiter problematisch, da die theoretische Konvergenzrate von 0.5 für diese Verfahren bekannt ist. Allerdings konvergiert das MC Verfahren mit festem Level nicht gegen den Wert einer kontinuierlichen Asiatischen Option, sondern gegen den Wert einer diskreten Asiatischen Option mit dem entsprechenden Level.

Für das MLMC Verfahren ist eine klare Rate zu erkennen. Durch Regression ergibt sich die Rate 0.29. Die Rate des angepassten MLMC Verfahrens ist weniger eindeutig. Durch eine lineare Regression der Punkte ergibt sich eine Konvergenzrate von 0.41. Klar zu sehen ist jedenfalls, dass das angepasste MLMC Verfahren schneller konvergiert, als das normale MLMC Verfahren.

Für MC Verfahren mit adaptiver Auflösung ist eine Rate von ungefähr  $\frac{1}{3}$  zu erwarten. Das angepasste MLMC Verfahren hat in diesem Versuch die bessere Rate, die Rate des MLMC Verfahrens ist nicht deutlich schlechter. Die MLMC Verfahren sind also nicht deutlich langsamer als ein MC Verfahren mit adaptiver Auflösung, vermutlich sind sie sogar schneller. In jedem Fall haben sie aber einen großen Vorteil: Vor Start der Berechnung muss kein Verhältnis der Schrittweite zur Anzahl der Simulationen berechnet werden. Das Verhältnis wird während der Berechnung anhand der bisherigen Ergebnisse und der Fehlerschranke angepasst. Zudem ist in den MLMC Verfahren der Diskretisierungsfehler deutlich einfacher abzuschätzen, als in einem adaptiven MC Verfahren.

### 5.7.3. Konvergenz für eine Barrier Option

Die verschiedenen Konvergenzraten wurden auch anhand einer Barrier Option bestimmt. Ich habe dazu eine Down-Out Calloption mit Strike  $K = 100$  und Barrier  $H = 90$  gewählt. Die

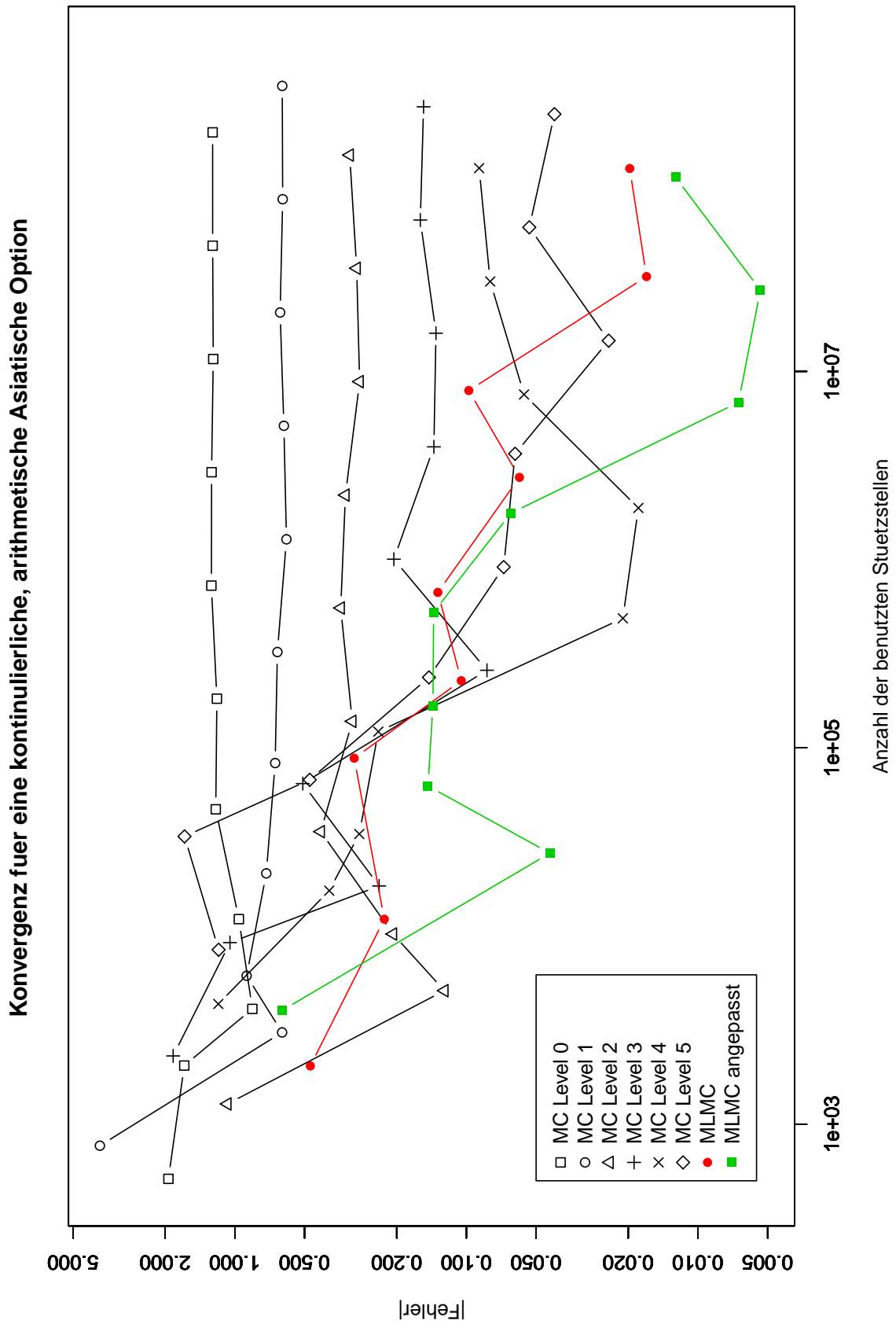


Abbildung 5.1.: Vergleich der Konvergenzraten von MC und MLMC, Asiatische Option

modellbestimmenden Parameter wurden genauso wie oben gewählt ( $\sigma = 0.3$ ,  $\theta = -0.5$ ,  $v = 0.4$ ,  $S_0 = 100$ ,  $r = 0.02$  und  $T = 1$ ). Für eine Barrier Option im VG Modell gibt es leider keine analytische Lösung. Als Referenzwert habe ich das Ergebnis eines Aufrufes des angepassten MLMC Verfahrens mit  $\varepsilon = 2^{-8}$  verwendet. Wie in Abb. 5.2 zu sehen ist, zeigen die Kurven des normalen MC Verfahrens das gleiche Verhalten, wie auch bei der Asiatischen Option. Das MLMC Verfahren und das angepasste MLMC Verfahren konvergieren in etwa gleich schnell. Das Abflachen der Konvergenz des MLMC Verfahrens für hohe Genauigkeiten rührt vermutlich von dem nicht exakten Referenzwert. Deutlicher als zuvor ist hier der Geschwindigkeitsgewinn des MLMC Verfahrens und des angepassten MLMC Verfahrens zu den normalen MC Verfahren zu sehen. Durch Regression der Punkte ergeben sich die Konvergenzraten  $\alpha = 0.32$  für das MLMC Verfahren und  $\alpha = 0.38$  für das angepasste MLMC Verfahren. Wenn man zur Bestimmung der Konvergenzrate des MLMC Verfahrens die letzten beiden Punkte ignoriert, ergibt sich eine Rate von  $\alpha = 0.44$ .

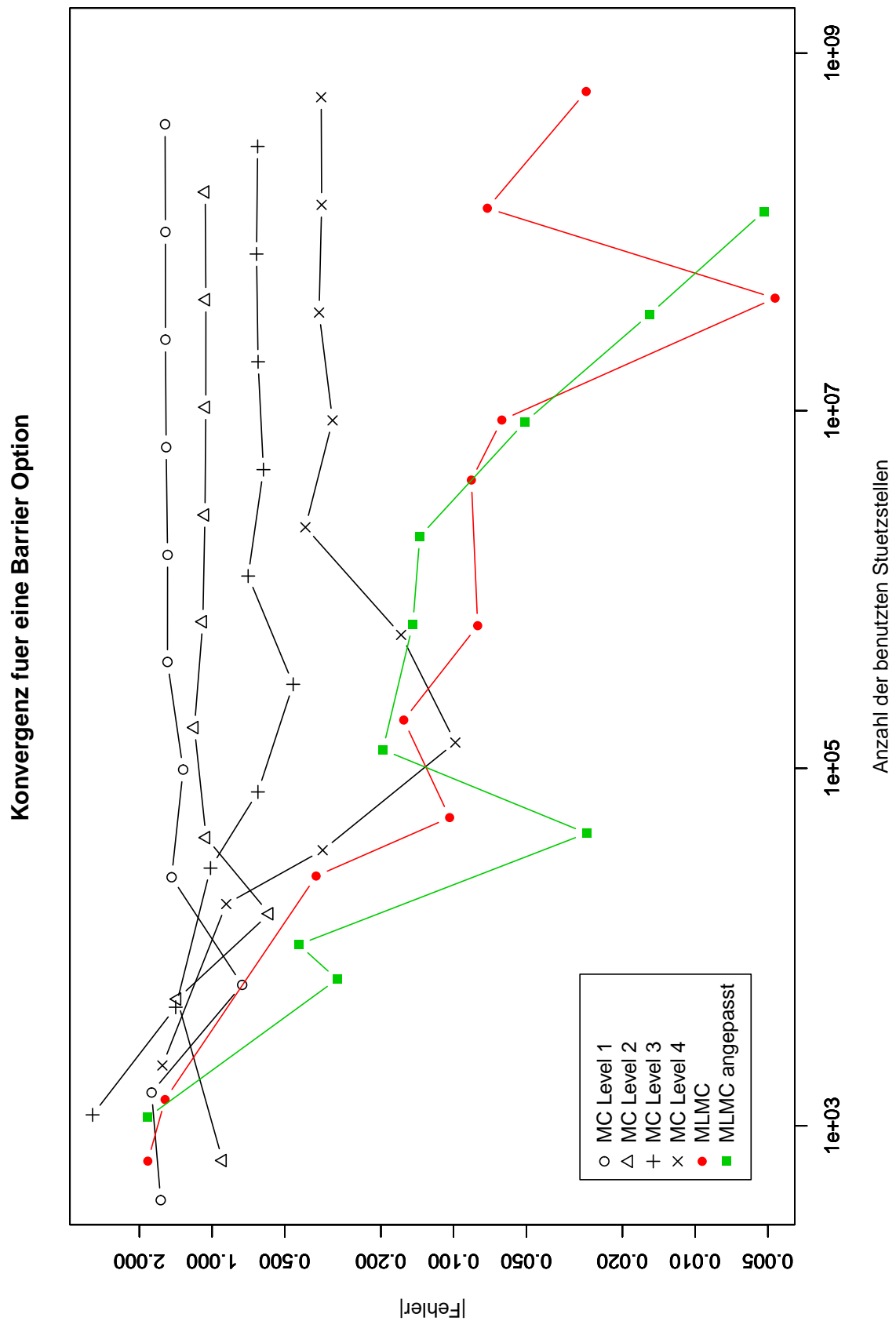


Abbildung 5.2.: Vergleich der Konvergenzraten von MC und MLMC, Barrier Option

## 6. Die „Griechen“ im Variance Gamma Modell

Um die Anwendungsmöglichkeiten des VG Modells in der Praxis zu erweitern, habe ich die „Griechen“ erster Ordnung berechnet. Die Ableitungen nach den Parametern  $\theta$ ,  $\sigma$  und  $v$  befinden sich in Anhang A. Die Ableitungen nach dem Zinssatz  $r$ , der Restlaufzeit  $T$ , dem Underlying  $S_0$ , sowie dem Strike  $K$  befinden sich in Anhang B.

Zur Veranschaulichung der Berechnungen möchte ich im Folgenden die Ableitungen für einige beispielhafte Optionen angeben, sowie erläutern. Ich habe die modellbestimmenden Faktoren entsprechend dem Beispiel 3.5 gewählt. Dies entspricht einer Restlaufzeit von  $T = 0.0822$ , einem Underlyingstartkurs von  $S_0 = 905.30$  Zählern und einem kontinuierlichen Zinssatz von  $r = 0.0031$ . Weiterhin sind die Parameter  $\sigma = 0.2542$ ,  $\theta = -0.6282$  und  $v = 0.1165$ . In der Tabelle 6.1 sind die realen Optionspreise, die vom VG Modell implizierten Optionspreise, sowie die verschiedenen Ableitungen für einige beispielhafte Optionen dargestellt.

Wie auch im BS Modell sind die Ableitungen nach  $\sigma$  sowohl für Put- als auch für Calloptionen positiv. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da auch die Bedeutung des  $\sigma$ -Parameters im BS Modell und im VG Modell sehr ähnlich ist. Der  $\theta$ -Parameter kontrolliert die Stärke von Kurseinbrüchen. Je negativer der Parameter ist, umso größer fallen Kursstürze aus. Außerdem werden die etwaigen Kursstürze mit einer vergrößerten Drift ausgeglichen. Ein Sinken des  $\theta$ -Parameters kündigt also eine volatilere Zeit an. Dies wird dadurch bestätigt, dass die Ableitung der Optionspreise nach  $\theta$  kollektiv positiv ausfällt. Der Einfluss des  $v$ -Parameters ist nicht trivial. Er steuert die Varianz des  $\Gamma$ -Prozesses – also wie stark die „gefühlte Zeit“ schwankt. Durch ein hohes  $v$  steigt einerseits die Wahrscheinlichkeit für VG Pfade, welche ohne viel zu springen linear mit der Drift wachsen. Dies tritt auf, falls der Gammaprozess  $\gamma(T, 1, v)$  zur Auslaufzeit deutlich kleiner als  $T$  ist. Andererseits erhöht sich aber auch die Wahrscheinlichkeit für Pfade, die einen Crash enthalten. Beides wirkt sich positiv auf den Optionspreis aus. Allerdings sinkt die Wahrscheinlichkeit, stärker zu wachsen als der Drift, rapide in  $v$ . Deswegen fällt der Optionspreis für Calloptionen aus dem Geld mit steigendem  $v$ . Da der Kurs des Underlyings exponentiell im VG Prozess ist, also der Underlyingkurs stärker im VG Prozess steigt als sinkt, fällt auch der Wert von Putoptionen im Geld.

Typ	Strike	realer Preis	VG Preis	$\frac{dV}{d\sigma}$	$\frac{dV}{d\theta}$	$\frac{dV}{dv}$	$\frac{dV}{dS_0}$	$\frac{dV}{dK}$	$\frac{dV}{dT}$	$\frac{dV}{dr}$
C	875	48,20	50.05	55.55	-18.36	33.71	0.77	-0.74	180.47	53.42
C	890	38,00	39.30	59.82	-18.87	27.00	0.72	-0.69	200.39	50.39
C	900	31,80	32.62	62.23	-18.84	20.96	0.68	-0.65	212.34	47.81
C	905	28,90	29.45	63.26	-18.68	17.46	0.65	-0.62	217.56	46.32
C	910	26,10	26.40	64.14	-18.39	13.64	0.63	-0.60	222.07	44.67
C	920	21,00	20.70	65.33	-17.36	5.12	0.57	-0.54	228.02	40.86
C	935	14,60	13.36	65.19	-14.24	-8.98	0.46	-0.43	223.66	33.39
P	875	17,90	19.53	55.55	-18.36	33.71	-0.23	0.26	177.73	-18.48
P	890	22,70	23.77	59.82	-18.87	27.00	-0.28	0.31	197.60	-22.74
P	900	26,50	27.09	62.23	-18.84	20.96	-0.32	0.35	209.52	-26.15
P	905	28,60	28.92	63.26	-18.68	17.46	-0.35	0.38	214.73	-28.05
P	910	30,80	30.86	64.14	-18.39	13.64	-0.37	0.40	219.22	-30.10
P	920	35,70	35.17	65.33	-17.36	5.12	-0.43	0.46	225.14	-34.74
P	935	44,30	42.81	65.19	-14.24	-8.98	-0.54	0.57	220.73	-43.44

**Tabelle 6.1.:** Beispiel zu den „Griechen“



## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Im Folgenden werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Anschließend erläutere ich mögliche weiterführende Forschungen in diesem Themengebiet.

### Resultate dieser Arbeit

Im ersten Teil der Arbeit haben wir gesehen, wie aus Optionspreisen die impliziten Parameter im Black Scholes (BS), Constant Elasticity of Variance (CEV) und Variance Gamma (VG) Modell gewonnen werden können. Zur Beschleunigung der Parameterbestimmung wurde der Gradient der Fehlerfunktion im VG Modell berechnet. Wir haben herausgefunden, dass das CEV Modell und das VG Modell die realen Optionspreise von S&P 500 Futureoptionen aus den Jahren 2009 - 2011 deutlich besser erklären konnten, als das BS Modell. Das VG Modell hat dabei noch wesentlich besser abgeschnitten als das CEV Modell. Wir haben allerdings auch festgestellt, dass die impliziten Parameter der Modelle nicht unabhängig von der Restlaufzeit der Optionen sind – was bei einem „korrekten“ Modell zu erwarten wäre.

Im zweiten Teil der Arbeit haben wir das Multilevel Monte Carlo (MLMC) Verfahren kennengelernt und es zur Preisbestimmung von Exotischen Optionen im VG Modell eingesetzt. Wir haben gesehen, wie mit dem MLMC Verfahren ohne vorherige Analyse des Problems eine ähnliche Konvergenzrate wie bei einem adaptiven MC Verfahren erreicht werden kann. Die Konvergenzrate scheint sogar etwas besser als die theoretische Rate von  $\frac{1}{3}$  des adaptiven MC Verfahrens zu sein. Des Weiteren haben wir ein an das VG Modell angepasstes MLMC Verfahren entwickelt, das die Preise von Exotischen Optionen schneller bestimmen kann als das normale MLMC Verfahren.

Schließlich haben wir ein Beispiel zum Verhalten der Optionspreise im VG Modell bei Änderung der Marktbedingungen betrachtet. Wir haben dazu die „Griechen“ des VG Modells berechnet.

### Ausblick

Ich möchte an dieser Stelle einige Anregungen für weitere Forschung geben. Von großem Interesse wäre es zu untersuchen, wie gut das VG und das CEV Modell auf anderen Underlyings abschneiden. Dabei denke ich einerseits an Optionen auf Rohstoff-Futures, da sich diese vollkommen anders verhalten als Optionen auf Aktien oder Aktienindizes. Andererseits denke ich an Aktienoptionen, da Optionen mit verschiedener Restlaufzeit das gleiche Underlying haben (anders als bei Futureoptionen). Damit könnten Optionen mit verschiedenen Restlaufzeiten gleichzeitig zur Parameterschätzung herangezogen werden – es gäbe also eine noch größere Datenmenge, die zur Schätzung herangezogen werden könnte.

Bezüglich des MLMC Verfahrens und des angepassten MLMC Verfahrens wäre es interessant zu erfahren, wie sich die Verfahren zur Preisbestimmung anderer pfadabhängiger Optionen eignen. Auch sollte noch eine theoretische Untersuchung – oder zumindest eine intensivere empirische Analyse – der Konvergenz erfolgen.

Schließlich könnten die beiden behandelten Modelle durch stochastische Zinsprozesse erweitert oder einer der Parameter durch einen ARMA-Prozess ersetzt werden.

## A. Gradient Fehlerfunktion im Variance Gamma Modell

In diesem Anhang wird der Gradient der Fehlerfunktion im VG Modell berechnet.

### A.1. Das Variance Gamma Modell

Der Prozess des Underlyings im VG Modell ist gegeben durch

$$\begin{aligned} S(T) &= S_0 \exp(rT + X(T, \sigma, v, \theta) + \omega T), \\ \omega &= \frac{1}{v} \ln(1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2}), \\ X(T, \sigma, v, \theta) &= B(\gamma(T; 1, v); \theta, \sigma). \end{aligned}$$

Dabei entspricht  $B(z, \theta, \sigma)$  einer „Brownsche Bewegung zur Zeit  $z$  mit Drift  $\theta$  und Varianz  $\sigma^2$ “.

### A.2. Calloptionspreis

Der Calloptionspreis im VG Modell ist

$$\begin{aligned} C(K, T) &= \int_0^\infty c(g) \rho_\gamma(g) dg, \\ c(g) &= S_0 \cdot \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) - K \cdot N(d) \cdot \exp(-rT), \\ d &= \frac{(r + \omega)T + g\theta - \ln(K/S_0)}{\sigma\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $N$  die Verteilungsfunktion der Normalverteilung,  $c(g)$  der Calloptionspreis gegeben dem  $\gamma$ -Zeitshift  $g$  und  $\rho_\gamma(g)$  die Dichte eines Gammaprozesses mit durchschnittlichem Zuwachs 1 und Varianz  $v$  zur Zeit  $T$ .

### A.3. Fehlerfunktion

Die von Madan verwendete Fehlerfunktion ist

$$F = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))^2}.$$

Dabei steht  $\bar{p}_i$  für den vom Modell implizierten Preis der  $i$ -ten Option.

Die Minimierung von  $\tilde{F}$  ist äquivalent zur Minimierung von

$$\tilde{F} = M \cdot F^2 = \sum_{i=1}^M (\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))^2.$$

Ich werde in diesem Anhang den Gradienten von  $\tilde{F}$  berechnen.

#### A.4. Ableitungen

##### A.4.1. Ableitungen von $\omega$

Sei  $z = (1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2})^{-1}$ . Dann gilt für die Ableitungen von  $\omega$  nach den Parametern  $\theta$ ,  $\sigma$  und  $v$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \omega &= -(1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2})^{-1} = -z \\ \frac{d}{d\sigma} \omega &= -\sigma (1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2})^{-1} = -\sigma z \\ \frac{d}{dv} \omega &= -\frac{1}{v^2} \ln(1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2}) - \frac{\theta + \frac{1}{2}\sigma^2}{v} (1 - \theta v - \sigma^2 \frac{v}{2})^{-1} \\ &= -\frac{\omega}{v} - \frac{1}{v} (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2) z \\ &= -\frac{1}{v} (\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2) z). \end{aligned}$$

##### A.4.2. Ableitungen von $d$

Für die Ableitungen von  $d$  nach den Parametern erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} d &= \frac{T}{\sigma \sqrt{g}} \frac{d}{d\theta} (\omega) + \frac{\sqrt{g}}{\sigma} = \frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma \sqrt{g}} z \\ \frac{d}{d\sigma} d &= \frac{T \frac{d}{d\sigma} (\omega) \sqrt{g} \sigma - \sqrt{g} [(r + \omega) T + g\theta - \ln(K/S_0)]}{g\sigma^2} = -\frac{T}{\sqrt{g}} z - \frac{1}{\sigma} d \\ \frac{d}{dv} d &= \frac{T}{\sigma \sqrt{g}} \frac{d}{dv} (\omega) = -\frac{T}{\sigma v \sqrt{g}} [\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2) z]. \end{aligned}$$

**A.4.3. Ableitungen von  $c(g)$** 

Mit der Dichte der Standardnormalverteilung  $n(x)$  sind die Ableitungen nach den Parametern

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}c(g) &= \exp\left(\frac{1}{2}g\sigma^2\right)S_0 \cdot \frac{d}{d\theta}[\exp(\omega T + g\theta)N(d + \sigma\sqrt{g})] - K \exp(-rT) \frac{d}{d\theta}[N(d)] \\
&= S_0 \exp\left(\frac{1}{2}g\sigma^2\right) \cdot [(g - zT) \exp(\omega T + g\theta)N(d + \sigma\sqrt{g}) \\
&\quad + \exp(\omega T + g\theta)\left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
&\quad - K \cdot \exp(-rT)\left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d) \\
&= S_0 \exp\left(\frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T + g\theta\right) \cdot [(g - zT)N(d + \sigma\sqrt{g}) + \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
&\quad - K \cdot \exp(-rT) \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}c(g) &= S_0 \cdot \exp(g\theta) \frac{d}{d\sigma}[\exp(\omega T + \frac{1}{2}g\sigma^2)N(d + \sigma\sqrt{g})] - K \cdot \exp(-rT) \frac{d}{d\sigma}N(d) \\
&= S_0 \exp(g\theta)[(g\sigma - \sigma zT) \exp(\omega T + \frac{1}{2}g\sigma^2) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) \\
&\quad - \left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{1}{\sigma}d - \sqrt{g}\right) \cdot n(d + \sigma\sqrt{g}) \cdot \exp(\omega T + \frac{1}{2}g\sigma^2)] \\
&\quad + K \cdot \exp(-rT)\left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{1}{\sigma}d\right) \cdot n(d) \\
&= S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2)[\sigma(g - zT) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) - \left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{1}{\sigma}d - \sqrt{g}\right) \cdot n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
&\quad + K \cdot \exp(-rT)\left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{d}{\sigma}\right) \cdot n(d)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv}c(g) &= S_0 \cdot \exp\left(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2\right) \cdot \frac{d}{dv}[\exp(\omega T) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g})] - K \cdot \exp(-rT) \cdot \frac{d}{dv}N(d) \\
&= S_0 \cdot \exp\left(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2\right) \left[-\frac{T}{v}(\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)z) \cdot \exp(\omega T) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g})\right. \\
&\quad \left. - \frac{T}{\sigma v \sqrt{g}}(\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)z) \cdot n(d + \sigma\sqrt{g}) \exp(\omega T)\right] \\
&\quad + K \cdot \exp(-rT) \frac{T}{\sigma v \sqrt{g}}[\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)z] \cdot n(d) \\
&= -\frac{T}{v}(\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)z)[S_0 \cdot \exp\left(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T\right)(N(d + \sigma\sqrt{g}) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d + \sigma\sqrt{g})) - K \cdot \exp(-rT)\frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d)].
\end{aligned}$$

#### A.4.4. Ableitungen der Dichte des Gammaprozesses

Um die Ableitung der Dichte der  $\Gamma$ -Verteilung bestimmen zu können, wird die Ableitung der Gammafunktion benötigt:

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x) = \Gamma(x)\Psi(x)$$

Dabei ist  $\Psi$  die Digammafunktion.

Die Dichte der  $\Gamma$ -Verteilung ist

$$\rho_\gamma(g) = \Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) \cdot \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{T}{v}}.$$

Damit ergeben sich die Ableitungen der Dichte als

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\rho_\gamma(g) &= 0, \\ \frac{d}{d\sigma}\rho_\gamma(g) &= 0, \\ \frac{d}{dv}\rho_\gamma(g) &= \frac{d}{dv}\left[\Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) \cdot \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{T}{v}}\right] \\ &= \frac{d}{dv}\left[\Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} \exp\left(\ln(g)\left(\frac{T}{v}-1\right) - \frac{g}{v} - \ln(v)\frac{T}{v}\right)\right] \\ &= -\frac{\Psi\left(\frac{T}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{T}{v}\right)} \cdot \left(-\frac{T}{v^2}\right) \cdot g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) v^{-\frac{T}{v}} \\ &\quad + \left(-\frac{T}{v^2} \ln(g) + \frac{g}{v^2} + \ln(v)\frac{T}{v^2} - \frac{T}{v^2}\right) \Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) v^{-\frac{T}{v}} \\ &= \Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) v^{-\left(\frac{T}{v}+2\right)} T \left[\Psi\left(\frac{T}{v}\right) - \ln(g) + \frac{g}{T} + \ln(v) - 1\right] \\ &= \rho_\gamma(g) \frac{T}{v^2} \left(\Psi\left(\frac{T}{v}\right) - \ln(g) + \frac{g}{T} + \ln(v) - 1\right). \end{aligned}$$

#### A.4.5. Ableitungen des Optionspreises

Für die Ableitung der Calloptionspreise im VG Modell ergibt sich das Folgende:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}C(K, T) &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \frac{d}{d\theta} c(g) dg \\
&= \Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} v^{-\frac{T}{v}} \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) \cdot [S_0 \exp\left(\frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T + g\theta\right) \\
&\quad \cdot [(g - zT)N(d + \sigma\sqrt{g}) + \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
&\quad - K \cdot \exp(-rT) \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d)] dg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}C(K, T) &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \frac{d}{d\sigma} c(g) dg \\
&= \Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} v^{-\frac{T}{v}} \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) [S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \\
&\quad \cdot [\sigma(g - zT) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) - \left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{1}{\sigma}d - \sqrt{g}\right) \cdot n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
&\quad + K \cdot \exp(-rT) \left(\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{d}{\sigma}\right) \cdot n(d)] dg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv}C(K, T) &= \int_0^\infty \frac{d}{dv}(\rho_\gamma(g)c(g)) dg \\
&= \int_0^\infty c(g) \frac{d}{dv}(\rho_\gamma(g)) + \rho_\gamma(g) \frac{d}{dv}(c(g)) dg \\
&= \int_0^\infty c(g) \rho_\gamma(g) \frac{T}{v^2} \left(\Psi\left(\frac{T}{v}\right) - \ln(g) + \frac{g}{T} + \ln(v) - 1\right) \\
&\quad - \frac{T}{v} \left(\omega + \left(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)z\right) \rho_\gamma(g) [S_0 \cdot \exp(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T) (N(d + \sigma\sqrt{g}) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d + \sigma\sqrt{g})) - K \cdot \exp(-rT) \frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d)] dg \\
&= C(K, T) \cdot \frac{T}{v^2} \left(\Psi\left(\frac{T}{v}\right) + \ln(v) - 1\right) + \frac{T}{v^2} \int_0^\infty c(g) \rho_\gamma(g) \left(\frac{g}{T} - \ln(g)\right) dg \\
&\quad - \frac{T}{v} \left(\omega + \left(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)z\right) \int_0^\infty \rho_\gamma(g) [S_0 \cdot \exp(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T) (N(d + \sigma\sqrt{g}) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d + \sigma\sqrt{g})) - K \cdot \exp(-rT) \frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d)] dg
\end{aligned}$$

Das Integral  $\int_0^\infty c(g) \rho_\gamma(g) \ln(g) dg$  ist numerisch schwer berechenbar. Deswegen werde ich an dieser Stelle mit Hilfe von partieller Integration die Berechnung vereinfachen. Dazu wird aller-

dings die Ableitung  $\frac{d}{dg}c(g)$  benötigt.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dg}d &= \frac{\theta}{\sigma\sqrt{g}} - \frac{d}{2g} \\
 \Rightarrow c'(g) &= \frac{d}{dg}c(g) = \frac{d}{dg}(S_0 \cdot \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) - K \cdot N(d) \cdot \exp(-rT)) \\
 &= S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) [(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) + n(d + \sigma\sqrt{g})(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{g}} - \frac{d}{2g} + \frac{\sigma}{2\sqrt{g}})] \\
 &\quad - K(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{g}} - \frac{d}{2g}) \cdot n(d) \cdot \exp(-rT) \\
 \\
 \Rightarrow &\int_0^\infty c(g)\rho_\gamma(g) \ln(g) dg \\
 &= \int_0^\infty c(g)\Gamma(\frac{T}{v})^{-1}g^{\frac{T}{v}-1} \exp(-\frac{g}{v}) \cdot (\frac{1}{v})^{\frac{T}{v}} \ln(g) dg \\
 &= \Gamma(\frac{T}{v})^{-1}v^{-\frac{T}{v}} \int_0^\infty [c'(g) \exp(-\frac{g}{v}) - \frac{1}{v}c(g) \exp(-\frac{g}{v})] g^{\frac{T}{v}} \frac{v}{T^2}(v - T \ln(g)) dg \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \cdot g(v - T \ln(g))(vc'(g) - c(g)) dg \\
 \\
 \Rightarrow \frac{d}{dv}C(K, T) &= C(K, T) \cdot \frac{T}{v^2}(\Psi(\frac{T}{v}) + \ln(v) - 1) - \frac{T}{v^2} \int_0^\infty c(g)\rho_\gamma(g) \ln(g) dg \\
 &\quad + \frac{T}{v^2} \int_0^\infty c(g)\rho_\gamma(g) \frac{g}{T} dg + I_1 \\
 &= C(K, T) \cdot \frac{T}{v^2}(\Psi(\frac{T}{v}) + \ln(v) - 1) - \frac{1}{Tv^2} \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \cdot g(v - T \ln(g))(vc'(g) - c(g)) dg \\
 &\quad + \frac{1}{v^2} \int_0^\infty c(g)\rho_\gamma(g) g dg + I_1 \\
 &= C(K, T) \cdot \frac{T}{v^2}(\Psi(\frac{T}{v}) + \ln(v) - 1) \\
 &\quad - \frac{1}{v^2} \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \cdot g[v(\frac{v}{T} - \ln(g))c'(g) - (\frac{v}{T} - \ln(g) + 1)c(g)] dg + I_1 \\
 &= C(K, T) \cdot \frac{T}{v^2}(\Psi(\frac{T}{v}) + \ln(v) - 1) \\
 &\quad + \frac{1}{v^2} \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \cdot g[(\frac{v}{T} - \ln(g) + 1)c(g) - v(\frac{v}{T} - \ln(g))c'(g)] dg + I_1
 \end{aligned}$$

Mit  $I_1 = -\frac{T}{v}(\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)z) \int_0^\infty \rho_\gamma(g)[S_0 \cdot \exp(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T)(N(d + \sigma\sqrt{g}) + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d + \sigma\sqrt{g})) - K \cdot \exp(-rT)\frac{1}{\sigma\sqrt{g}}n(d)] dg$ .



Die entsprechenden Ableitungen von Putoptionen lassen sich direkt aus denen der Calloptionen herleiten. Für  $x \in \{\theta, \sigma, v\}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}P(K, T) &= \frac{d}{dx}(C(K, T) - S_0 + Ke^{-rT}) \\ &= \frac{d}{dx}C(K_i). \end{aligned}$$

Es gilt also sowohl für Put- als auch für Calloptionen, dass

$$\frac{d}{dx}(\ln(p) - \ln(\bar{p}))^2 = -\Delta \frac{d}{dx}C(K, T),$$

wobei  $\Delta = (\bar{p})^{-1} \cdot 2(\ln(p) - \ln(\bar{p}))$  ist.

#### A.4.6. Ableitungen der Fehlerfunktion

Die Ableitung der Fehlerfunktion  $\tilde{F}$  aus (3.1) für M Optionen zu den Strikes  $K_i$  und der Restlaufzeit  $T$  mit den Marktpreisen  $p_i$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\tilde{F} &= \frac{d}{d\theta} \sum_{i=1}^M (\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))^2 \\ &= - \sum_{i=1}^M \frac{d}{d\theta}(C(K_i, T)) \cdot \Delta_i \\ &= -\Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} v^{-\frac{T}{v}} \cdot \sum_{i=1}^M \Delta_i \\ &\quad \cdot \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) \cdot [S_0 \exp\left(\frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T + g\theta\right) \\ &\quad \cdot [(g - zT)N(d_i + \sigma\sqrt{g}) + \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d_i + \sigma\sqrt{g})] \\ &\quad - K_i \cdot \exp(-rT) \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d_i)] dg \\ &= -\Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} v^{-\frac{T}{v}} \cdot \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) [S_0 \exp\left(\frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T + g\theta\right) \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^M \Delta_i [(g - zT)N(d_i + \sigma\sqrt{g}) + \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right)n(d_i + \sigma\sqrt{g})] \\ &\quad - \exp(-rT) \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{\sigma} - \frac{T}{\sigma\sqrt{g}}z\right) \sum_{i=1}^M K_i \Delta_i n(d_i)] dg, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma} \tilde{F} &= \frac{d}{d\sigma} \sum_{i=1}^M (\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))^2 \\
&= - \sum_{i=1}^M \Delta_i \frac{d}{d\sigma} (C(K_i, T)) \\
&= - \sum_{i=1}^M \Delta_i \left( \Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} v^{-\frac{T}{v}} \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) [S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \right. \\
&\quad \cdot [\sigma(g - zT) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) - (\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{1}{\sigma}d - \sqrt{g}) \cdot n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
&\quad \left. + K \cdot \exp(-rT) (\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{d}{\sigma}) \cdot n(d)] dg \right) \\
&= - \Gamma\left(\frac{T}{v}\right)^{-1} v^{-\frac{T}{v}} \int_0^\infty g^{\frac{T}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right) [S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^M \Delta_i [\sigma(g - zT) \cdot N(d + \sigma\sqrt{g}) - (\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{1}{\sigma}d - \sqrt{g}) \cdot n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
&\quad \left. + \exp(-rT) \sum_{i=1}^M \Delta_i K_i (\frac{T}{\sqrt{g}}z + \frac{d_i}{\sigma}) \cdot n(d_i)] dg
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv} \tilde{F} &= \frac{d}{dv} \sum_{i=1}^M (\ln(p_i) - \ln(\bar{p}_i))^2 \\
&= - \sum_{i=1}^M \frac{d}{dv} (C(K_i, T)) \cdot \Delta_i \\
&= - \sum_{i=1}^M (C(K, T) \cdot \frac{T}{v^2} (\Psi(\frac{T}{v}) + \ln(v) - 1) \\
&\quad + \frac{1}{v^2} \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \cdot g [(\frac{v}{T} - \ln(g) + 1)c(g) - v(\frac{v}{T} - \ln(g))c'(g)] dg + I_1) \cdot \Delta_i \\
&= \frac{T}{v^2} (1 - \Psi(\frac{T}{v}) - \ln(v)) \sum_{i=1}^M C(K_i, T) \Delta_i \\
&\quad - \frac{1}{v^2} \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \cdot g [(\frac{v}{T} - \ln(g) + 1) \sum_{i=1}^M \Delta_i c_i(g) - v(\frac{v}{T} - \ln(g)) \sum_{i=1}^M \Delta_i c'_i(g)] dg \\
&\quad + \frac{T}{v} (\omega + (\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)z) \int_0^\infty \rho_\gamma(g) [S_0 \cdot \exp(g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2 + \omega T) \sum_{i=1}^M \Delta_i (N(d_i + \sigma\sqrt{g}) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}} n(d_i + \sigma\sqrt{g})) - \exp(-rT) \frac{1}{\sigma\sqrt{g}} \sum_{i=1}^M \Delta_i K_i \cdot n(d_i)] dg.
\end{aligned}$$



## B. Die „Griechen“ für das Variance Gamma Modell

In diesem Anhang werden die „Griechen“ erster Ordnung für das VG Modell bestimmt. Die Ableitungen nach den Parametern  $(\sigma, \theta, v)$  befinden sich in Anhang A.

### B.1. Ableitungen des Parameters $d$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}d &= \frac{T}{\sigma\sqrt{g}} \\ \frac{d}{dK}d &= -\frac{1}{K\sigma\sqrt{g}} \\ \frac{d}{dS_0}d &= \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{g}} \\ \frac{d}{dT}d &= \frac{r+\omega}{\sigma\sqrt{g}}\end{aligned}$$

### B.2. Ableitungen des Callpreises gegeben $g$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}c(g) &= S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \frac{T}{\sigma\sqrt{g}} n(d + \sigma\sqrt{g}) - K \exp(-rT) [\frac{T}{\sigma\sqrt{g}} n(d) - N(d)T] \\ \frac{d}{dK}c(g) &= e^{-rT} (\frac{n(d)}{\sigma\sqrt{g}} - N(d)) \\ \frac{d}{dS_0}c(g) &= \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) [N(d + \sigma\sqrt{g}) + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}} \cdot n(d + \sigma\sqrt{g})] - K e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{g}} \cdot n(d) \\ \frac{d}{dT}c(g) &= S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) [\omega N(d + \sigma\sqrt{g}) + \frac{r+\omega}{\sigma\sqrt{g}} n(d + \sigma\sqrt{g})] - K e^{-rT} [\frac{r+\omega}{\sigma\sqrt{g}} n(d) - rN(d)]\end{aligned}$$

### B.3. Ableitungen der Dichte des Gammaprozesses

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\rho_\gamma(g) &= 0 \\ \frac{d}{dK}\rho_\gamma(g) &= 0 \\ \frac{d}{dS_0}\rho_\gamma(g) &= 0 \\ \frac{d}{dT}\rho_\gamma(g) &= \Gamma(\frac{T}{v})^{-1} g^{\frac{T}{v}-1} v^{-\frac{T}{v}-1} \exp(-\frac{g}{v}) [\ln(g) - \Psi(\frac{T}{v}) - \ln(v)]\end{aligned}$$

#### B.4. Ableitungen des Calloptionspreises

$$\begin{aligned}
 \frac{dC}{dr} &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \frac{d}{dr} c(g) dg \\
 &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) [S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) \frac{T}{\sigma\sqrt{g}} n(d + \sigma\sqrt{g}) - K \exp(-rT) [\frac{T}{\sigma\sqrt{g}} n(d) - N(d)T]] dg \\
 \frac{dC}{dK} &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \frac{d}{dK} c(g) dg \\
 &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) [e^{-rT} (\frac{n(d)}{\sigma\sqrt{g}} - N(d))] dg \\
 \frac{dC}{dS_0} &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) \frac{d}{dS_0} c(g) dg \\
 &= \int_0^\infty \rho_\gamma(g) [\exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) [N(d + \sigma\sqrt{g}) + \frac{1}{\sigma\sqrt{g}} \cdot n(d + \sigma\sqrt{g})] - K e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{g}} \cdot n(d)] dg \\
 \frac{dC}{dT} &= \int_0^\infty (\rho_\gamma(g) \frac{d}{dT} c(g) + c(g) \frac{d}{dT} \rho_\gamma(g)) dg \\
 &= \int_0^\infty (\rho_\gamma(g) [S_0 \exp(\omega T + g\theta + \frac{1}{2}g\sigma^2) [\omega N(d + \sigma\sqrt{g}) + \frac{r + \omega}{\sigma\sqrt{g}} n(d + \sigma\sqrt{g})] \\
 &\quad - K e^{-rT} [\frac{r + \omega}{\sigma\sqrt{g}} n(d) - rN(d)]] + c(g) [\Gamma(\frac{T}{v})^{-1} g^{\frac{T}{v}-1} v^{-\frac{T}{v}-1} \exp(-\frac{g}{v}) [\ln(g) - \Psi(\frac{T}{v}) - \ln(v)]]] dg
 \end{aligned}$$

#### B.5. Ableitungen des Putoptionspreises

Die Ableitungen des Putoptionspreises ergeben sich aus denen der Calloptionspreise über die Put-Call-Parität  $P(K, T) = C(K, T) + K e^{-rT} - S_0$ . Damit ergeben sich die Ableitungen des Putoptionspreises als

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dr} &= \frac{dC}{dr} - K T e^{-rT}, \\
 \frac{dP}{dK} &= \frac{dC}{dK} + e^{-rT}, \\
 \frac{dP}{dS_0} &= \frac{dC}{dS_0} - 1, \\
 \frac{dP}{dT} &= \frac{dC}{dT} - r K e^{-rT}.
 \end{aligned}$$

## Literaturverzeichnis

- [1] V. Bally and D. Talay. The law of the euler scheme for stochastic differential equations. *Probability theory and related fields*, 104(1):43–60, 1996.
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 637–654, 1973.
- [3] J. Cox. Notes on option pricing i: Constant elasticity of variance diffusions. *Working Paper Stanford University*, 1975.
- [4] F. Delbaen and H. Shirakawa. A note on option pricing for the constant elasticity of variance model. *Asia-Pacific financial markets*, 9(2):85–99, 2002.
- [5] C.G. Ding. Algorithm as 275: Computing the non-central  $\chi^2$  distribution function. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 41(2):478–482, 1992.
- [6] D.C. Emanuel and J.D. MacBeth. Further results on the constant elasticity of variance call option pricing model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(4):533–554, 1982.
- [7] F. Fiorani. Option pricing under the variance gamma process. *MPRA Paper*, 2004.
- [8] R.W. Freund and R.H.W. Hoppe. Stoer/bulirsch: Numerische mathematik 1. 2007.
- [9] M. Fu. Variance-gamma and monte carlo. *Advances in Mathematical Finance*, pages 21–34, 2007.
- [10] M. Giles. Improved multilevel monte carlo convergence using the milstein scheme. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006*, pages 343–358, 2008.
- [11] M.B. Giles. Multilevel monte carlo path simulation. 2006.
- [12] J. Hull. *Options, futures and other derivatives*. Pearson Prentice Hall, 2009.
- [13] Benjamin Peters Jörg Groß. *R Reader*, 2009.
- [14] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, and P.E. Wright. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):112–147, 1999.
- [15] D.B. Madan, P.P. Carr, and E.C. Chang. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2(1):79, 1998.
- [16] D.B. Madan and F. Milne. Option pricing with vg martingale components1. *Mathematical finance*, 1(4):39–55, 1991.
- [17] D.B. Madan and E. Seneta. The variance gamma (vg) model for share market returns. *Journal of business*, pages 511–524, 1990.

- [18] J.A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4):308, 1965.
- [19] C.C. Ribeiro and N. Webber. Valuing path dependent options in the variance-gamma model by monte carlo with a gamma bridge. 2002.
- [20] R. Schaback and H. Wendland. *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [21] M. Schroder. Computing the constant elasticity of variance option pricing formula. *Journal of Finance*, pages 211–219, 1989.
- [22] F.H. Walters, R. Lloyd Jr, S.L. Morgan, and S.N. Deming. *Sequential Simplex Optimization: A Technique for Improving Quality and Productivity in Research, Development, and Manufacturing (Chemometrics series)*. CRC Press, 1991.