seit 1558

Der Smolyak-Algorithmus in $H^1(\mathbb{T}^2)$ zur Approximation von Funktionen dominierend gemischter Glattheit

Masterarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Glenn Byrenheid

geb. am 29.08.1989 in Sömmerda

Betreuer: Prof. Dr. W. Sickel

21. August 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei der Untersuchung der Regularität von Eigenfunktionen bestimmter Hamilton-Operatoren der Quantenmechanik hat man in [15] und [16] festgestellt, dass diese Funktionen nicht nur zum isotropen Sobolev-Raum $H^1(\mathbb{R}^n)$, dem natürlichen Definitionsgebiet, gehören, sondern zu den kleineren Sobolev-Räumen $H^s_{mix}(\mathbb{R}^n)$ mit dominierend gemischter Glattheit.
Wir betrachten in dieser Masterarbeit ein zugehöriges Approximationsproblem auf dem zweidimensionalen Torus $\mathbb{T}^2$, das heißt für bivariate periodische Funktionen. Konkret beschäftigen wir uns mit zwei Typen von Operatoren zur Approximation von Funktionen aus $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$, nämlich geeigneten Fourier-Partialsummen bzw. angepassten Sampling-Operatoren. Die Qualität dieser Approximation wird jeweils bewertet durch den Vergleich mit den entsprechenden Approximationszahlen der Einbettung des betrachteten Funktionenraumpaars, also der optimalen Rang n Approximation.

Die oben genannten Operatoren werden mit Hilfe des klassischen Smolyak-Algorithmus und einer modifizierten Version dessen erzeugt. Die Idee des Smolyak-Algorithmus lässt sich anschaulich anhand von Folgen komplexer Zahlen erklären. Seien

$$(a^i_j)_{j=0}^{\infty} \xrightarrow[j\to\infty]{} a^i,\ i = 1,2$$

konvergente Folgen komplexer Zahlen mit $a^1_{-1} = a^2_{-1} = 0$, dann können wir den Grenzwert von $(a^i_j)_{j=0}^{\infty}$ für i=1,2 als eine Teleskopsumme

$$a^i = \sum_{j=0}^{\infty}(a^i_j - a^i_{j-1}),\ i = 1,2$$

darstellen. Mit dieser Identität gilt unter entsprechenden Voraussetzungen für das Produkt beider Grenzwerte

$$a^1 \cdot a^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a^1_j - a^1_{j-1})(a^2_k - a^2_{k-1}).$$

Die Idee von Smolyak war es, dass Produkt $a^1 \cdot a^2$ mit der Folge

$$\sum_{j+k\leq m}(a^1_j - a^1_{j-1})(a^2_k - a^2_{k-1})$$

zu approximieren. Wir ersetzen für unsere Konstruktion die Folgen komplexer Zahlen durch geeignete Operatorfolgen und die Multiplikation durch das Operator-Tensorprodukt.

So erzeugte Approximationsoperatoren wurden für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), L_2(\mathbb{T}^2))$

z.B. in [1], [2] und [9] betrachtet. Neben historischen Anmerkungen finden wir noch weitere Referenzen in [9]. Für die von uns betrachtete Fourier-Partialsumme S_m^H und einen Abtastoperator B_m sind im $L_2(\mathbb{T}^2)$-Fall die folgenden Resultate bekannt:

$$\|\mathrm{id} - S_m^H | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^s}{n^s}$$

für $s > 0$ und

$$\|\mathrm{id} - B_m | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s+\frac{1}{2}}}{n^s}$$

für $s > \frac{1}{2}$, wobei $n := \text{rank } S_m^H = \text{rank } B_m$ gilt. Dabei bleibt zu bemerken, dass sich die Approximationsgüte von S_m^H und B_m in der Ordnung des $\log_2$-Terms unterscheiden. Außerdem gilt für die Approximationszahlen der Einbettung

$$a_n(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), L_2(\mathbb{T}^2)) \asymp \frac{(\log_2 n)^s}{n^s},$$

was zeigt, dass S_m^H eine optimale Approximationsgüte aufweist.

In [4] wurde die Approximationsgüte einer speziellen Fourier-Partialsumme für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1(\mathbb{T}^2))$ untersucht. Diese lässt sich durch einen modifizierten Smolyak-Algorithmus konstruieren. Wir sind nachfolgend ebenfalls daran interessiert, den Approximationsfehler im isotropen Sobolev-Raum $H^1(\mathbb{T}^2)$ zu messen. Für den nicht-periodischen Fall sind dazu bereits einige Resultate aus [4] und [14] bekannt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In den Abschnitten 1 bis 5 führen wir zunächst die notwendigen Grundlagen (insbesondere der Räume $H^s(\mathbb{T}^2)$ und $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$) ein. Im Kapitel 6 beweisen wir für $s > 1$ und $n := \text{rank } (S_m^H) = \text{rank } (B_m)$ die oberen und unteren Schranken

$$\|\mathrm{id} - S_m^H | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

und

$$\|\mathrm{id} - B_m | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Das 7. Kapitel beschäftigt sich mit dem Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1_{mix}(\mathbb{T}^2))$. Wir berechnen unter anderem für $s > 1$ die oberen und unteren Schranken

$$\|\mathrm{id} - S_m^H | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

sowie

$$\|\mathrm{id} - B_m | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

und vergleichen diese mit den Approximationszahlen der Einbettung

$$a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}) \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Anschließend folgen wir im 8. Kapitel der Arbeit von Dung und Ullrich (siehe [4]) und berechnen Schranken für die Approximationsgüte einer Fourier-Partialsumme mit Frequenzen aus einem modifizierten hyperbolischen Kreuz. Letztendlich sind wir in der Lage für die Approximationszahl der Einbettung das Resultat

$$a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)}) \asymp \frac{1}{n^{s-1}}.$$

für alle $s > 1$ zu beweisen.

2 Notation und Bezeichnungen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen (ohne Null) und mit $\mathbb{N}_0$ die natürlichen Zahlen mit Null. Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die ganzen Zahlen und mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die reellen Zahlen, sowie mit $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen. Wir bezeichnen mit $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d$ den d-dimensionalen Torus. In dieser Arbeit beschränken wir uns dabei auf die Fälle $d = 1$ und $d = 2$. In $\mathbb{T}$ identifizieren wir zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ miteinander, falls ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $x - y = 2\pi k$ gilt. Mit dem Begriff einer Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{T}$ verbinden wir eine 2π-periodische Abbildung $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei periodisch heißt, dass $f(x) = f(x + 2\pi k)$ für alle $x \in \mathbb{T}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Eine Funktion $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist dann eine Funktion, die in jeder Komponente 2π-periodisch ist. Wir bezeichnen mit $|k|_2$ für $k \in \mathbb{Z}^2$

$$|k|_2 = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ meinen wir damit

$$|k|_2 = |k| = \max(k, -k).$$

Weiterhin treffen wir die folgenden Vereinbarungen. Mit $C(\mathbb{T}^d)$ bezeichnen wir den Funktionenraum der stetigen Funktionen

$$C(\mathbb{T}^d) = \Big\{ f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \text{ f ist stetig} \Big\}$$

ausgerüstet mit der Norm

$$\|f|C(\mathbb{T}^d)\| := \sup_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)|$$

und mit $L_2(\mathbb{T}^d)$ bezeichnen wir den Funktionenraum

$$L_2(\mathbb{T}^d) = \Big\{ f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \ \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx < \infty \Big\}.$$

Außerdem benennen wir mit $\mathcal{T}^d$ die Menge der trigonometrischen Polynome auf dem d-dimensionalen Torus, versehen mit der Supremumsnorm

$$\mathcal{T}^d = \Big\{ \sum_{k \in A} a_k e^{ikx}, (a_k)_{k \in A} \subset \mathbb{C}, \ A \subset \mathbb{Z}^d, \ |A| < \infty \Big\}.$$

Des Weiteren nutzen wir die Bezeichnung $\mathcal{T}_s^d$. Damit meinen wir die Menge der trigonometrischen Polynome auf dem d-dimensionalen Torus, versehen mit der im Laufe der Arbeit eingeführten $H^s_{mix}(\mathbb{T}^d)$-Norm. Außerdem definieren wir für zwei normierte Räume X und Y die Menge der stetigen linearen Operatoren

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y : \ T \text{ ist linear und stetig}\}$$

ausgerüstet mit der Norm

$$\|T|X \longrightarrow Y\| = \sup_{\|y\|_X \leq 1} \|Ty\|_Y.$$

Für einen Operator $T : X \longrightarrow Y$ definieren wir den Rang von T als

$$\text{rank}\, T = \dim T(X).$$

Wir bezeichnen außerdem mit id die identische Abbildung. Weiterhin definieren wir für $f \in L_2(\mathbb{T})$ die m-te Fourier-Partialsumme als

$$S_m f(x) = \sum_{|k| \leq m} c_k(f) e^{ikx},$$

wobei

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

ist. Analog definiert man auf dem zweidimensionalen Torus für $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$ den Fourierkoeffizient von f zur Frequenz $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ als

$$c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Wir verwenden zwischen Normen von Teilräumen des L_2 die Relation

$$\|f\| \asymp \|f\|^*.$$

Damit meinen wir, dass Konstanten $A_1, A_2 > 0$ existieren, die in der Regel höchstens von der Glattheit des jeweiligen Raumes abhängen, so dass für alle Funktionen $f \in L_2$

$$A_1 \|f\| \leq \|f\|^* \leq A_2 \|f\|$$

gilt. In diesem Fall reden wir auch von äquivalenten Normen. In einem anderen Kontext verwenden wir diese Relation für zwei positiv reellwertige Zahlenfolgen $(a_m^1)_{m=1}^{\infty}$ und $(a_m^2)_{m=1}^{\infty}$. Dann gilt

$$a_m^1 \asymp a_m^2$$

genau dann, wenn Konstanten $A_1, A_2 > 0$ unabhängig von m existieren, so dass

$$A_1 a_m^1 \leq a_m^2 \leq A_2 a_m^1$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Analog nutzen wir für zwei positiv reellwertige Zahlenfolgen $(a_m^1)_{m=1}^{\infty}$ und $(a_m^2)_{m=1}^{\infty}$ die Relation

$$a_m^1 \lesssim a_m^2.$$

Dies bedeutet, dass eine Konstante $A_1 > 0$ existiert, so dass

$$a_m^1 \leq A_1 a_m^2$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Die isotropen Sobolev Räume $H^s(\mathbb{T}^d)$

In diesem Kapitel führen wir die isotropen Sobolev-Räume H^s ein und beschäftigen uns mit ausgewählten Eigenschaften.

Definition 1. *Wir definieren für d=1,2 und $s \geq 0$ den isotropen Sobolev-Raum $H^s(\mathbb{T}^d)$ als*

$$H^s(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_2(\mathbb{T}^d) : \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k(f)|^2 (1 + |k|_2^2)^s < \infty \right\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f|H^s(\mathbb{T}^d)\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k(f)|^2 (1 + |k|_2^2)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 1. *Für $0 \leq s_1 \leq s_2$ gilt*

$$H^{s_2}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{T}^2).$$

Insbesondere ist

$$H^0(\mathbb{T}^2) = L_2(\mathbb{T}^2).$$

Beweis. Sei $0 \leq s_1 \leq s_2$, dann ist

$$\begin{aligned} \|f|H^{s_1}(\mathbb{T}^2)\| &= \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k(f)|^2 (1 + (k_1^2 + k_2^2))^{s_1} \Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k(f)|^2 (1 + (k_1^2 + k_2^2))^{s_2} \Big)^{1/2} \\ &= \|f|H^{s_2}(\mathbb{T}^2)\|. \end{aligned}$$

Der Fall $s = 0$ ist aufgrund der Parsevalgleichung klar. □

Lemma 2. *Für $s > \frac{1}{2}$ gilt*

$$H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T}).$$

Beweis. Siehe [8, Seite 170] für $p = q = 2$. □

Für das Weitere benötigen wir die folgende Zerlegung des $\mathbb{Z}^2$. Es sei für $j \in \mathbb{N}_0$

$$P_j := \{l \in \mathbb{Z} : 2^{j-1} < |l| \leq 2^j\}, \ j > 0$$

und

$$P_0 := \{-1, 0, 1\}.$$

Wir setzen für $k \in \mathbb{N}_0^2$

$$P_k := P_{k_1} \times P_{k_2}$$

und führen für $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$

$$\delta_k(f) := \sum_{(j_1,j_2)\in P_k} c_{(j_1,j_2)}(f) e^{i(j_1 x + j_2 y)}$$

ein.

Lemma 3. *Für $s \geq 0$ sind die Normen*

$$\|f|H^s(\mathbb{T}^2)\| \asymp \|f|H^s(\mathbb{T}^2)\|_* := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s|k|_\infty} \|\delta_k(f)\|_2^2 \right)^{1/2}$$

äquivalent auf $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Beweis. Für $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$ gilt

$$\|f|H^s(\mathbb{T}^2)\|^2 \quad = \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 (1 + |j_1|^2 + |j_2|^2)^s.$$

Wir zerlegen in

$$\|f|H^s(\mathbb{T}^2)\|^2 \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 (1 + |j_1|^2 + |j_2|^2)^s$$

und können das Gewicht abschätzen zu

$$\|f|H^s(\mathbb{T}^2)\|^2 \quad \leq \quad \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} (1 + 2^{2k_1} + 2^{2k_2})^s \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2.$$

Wir fahren fort mit

$$\|f|H^s(\mathbb{T}^2)\|^2 \quad \leq \quad 3^s \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s\max(k_1,k_2)} \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2.$$

Wenden wir die Parsevalgleichung an, so ist dies nichts anderes als

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s\max(k_1,k_2)} \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s|k|_\infty} \|\delta_k(f)\|_2^2.$$

Nun betrachten wir die andere Richtung der Abschätzung. Es ist

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s\max(k_1,k_2)} \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 \quad \leq \quad \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} (2^{2k_1} + 2^{2k_2})^s \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2.$$

Außerdem gilt

$$2^{k_1} \leq 2|j_1| \leq 2^{k_1+1} \quad \text{und} \quad 2^{k_2} \leq 2|j_2| \leq 2^{k_2+1}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} (2^{2k_1} + 2^{2k_2})^s \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} \sum_{j\in P_k} \Big((2|j_1|)^2 + (2|j_2|)^2\Big)^s |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 \\
&\leq 4^s \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \Big(1 + |j_1|^2 + |j_2|^2\Big)^s |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 \\
&= 4^s \|f|H^s(\mathbb{T}^2)\|^2.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Äquivalenz der Normen. □

4 Die klassische trigonometrische Interpolation

Wir möchten in diesem Kapitel auf die klassische trigonometrische Interpolation eingehen. Diese stellt einen wichtigen Baustein zur Konstruktion unseres später betrachteten Abtastoperators dar.

Definition 2. *Wir führen für $m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C(\mathbb{T})$ den trigonometrischen Interpolationsoperator m-ter Ordnung ein als*

$$I_m f(x) := \frac{1}{m+\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{2m} f(t_l^m) D_m(x - t_l^m).$$

Mit

$$t_l^m := \frac{2\pi l}{2m+1}$$

bezeichnen wir die Abtastpunkte und mit

$$D_m(x) := \sum_{|k|\leq m} e^{ikx}$$

den Dirichlet-Kern der Ordnung m.

Lemma 4. *Sei $f \in C(\mathbb{T})$. Dann ist $I_m f$ ein trigonometrisches Polynom vom Grade kleiner gleich m.*

Beweis. Da D_m ein trigonometrisches Polynom vom Grade m ist, gilt dies auch für jede endliche Linearkombination. □

Lemma 5. *Sei f ein trigonometrisches Polynom vom Grade kleiner gleich m. Dann gilt*

$$f(x) = I_m(f)(x)$$

für alle $x \in \mathbb{T}$.

Beweis. Das Resultat ist wohl bekannt in der klassischen Approximationstheorie. □

Lemma 6. *Für $f \in \mathcal{T}^1$ und $m \in \mathbb{N}_0$ mit $|k| \leq m$ gilt*

$$c_k(I_m f) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{k+\ell(2m+1)}(f).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt mit (offensichtlichen Vereinfachungen im eindimensionalen Fall) analog zum später in der Arbeit auftretenden Beweis von Lemma 8. □

Folgerung 1. *Für $f \in \mathcal{T}^1$ lautet die Fourierreihe zu $I_m f$*

$$I_m f(x) = \sum_{|k| \leq m} \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+l(2m+1)}(f) \Big) e^{ikx}$$

für alle $x \in \mathbb{T}$.

Satz 1. *Sei $s > 1$. Dann ist für $f \in H^s(\mathbb{T})$*

$$\|f - S_m f | H^1(\mathbb{T})\| \leq \frac{\sqrt{2}}{m^{s-1}} \|f | H^s(\mathbb{T})\|$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $s > 1$. Es ist

$$\begin{aligned}
\|f - S_m f | H^1(\mathbb{T})\|^2 &= \sum_{|k|>m} |c_k(f)|^2 (1 + k^2) \\
&\leq \sup_{|k|>m} \frac{1 + k^2}{(1 + k^2)^s} \sum_{|k|>m} |c_k(f)|^2 (1 + k^2)^s \\
&\leq \sup_{|k|>m} \frac{2}{k^{2s-2}} \|f | H^s(\mathbb{T}^2)\|^2 \\
&\leq \frac{2}{m^{2s-2}} \|f | H^s(\mathbb{T}^2)\|^2.
\end{aligned}$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Das nächste Lemma ist ein Resultat aus der Theorie beschränkter Operatoren. Es ermöglicht uns, lediglich dichte Teilmengen des Definitionsbereichs des jeweiligen Operators betrachten zu müssen, um Informationen über die zugehörige Operatornorm zu erhalten.

Satz 2. *Sei $D \subset X$ ein dichter Teilraum und Y ein Banachraum. Dann gibt es für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(D, Y)$ genau eine stetige Fortsetzung $A^* \in \mathcal{L}(X, Y)$ (d.h. mit $A^*|_D = A$). Außerdem gilt*

$$\|A|D \longrightarrow Y\| = \|A^*|X \longrightarrow Y\|.$$

Beweis. Wir finden den Beweis in [12, Satz II.1.5, Seite 48]. □

Satz 3. *Sei $s > 1$, dann existiert ein $C_s > 0$, so dass*

$$\|f - I_m f|H^1(\mathbb{T})\| \leq \frac{C_s}{m^{s-1}} \|f|H^s(\mathbb{T})\|$$

für alle $f \in H^s(\mathbb{T})$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. Sei f ein trigonometrisches Polynom. Wir beginnen mit

$$\|f - I_m f|H^1(\mathbb{T})\| \leq \|f - S_m f|H^1(\mathbb{T})\| + \|S_m f - I_m f|H^1(\mathbb{T})\|.$$

Nun nutzen wir die Rekonstruktionseigenschaft von I_m (Lemma 5) und erhalten

$$\|f - I_m f|H^1(\mathbb{T})\| \leq \|f - S_m f|H^1(\mathbb{T})\| + \|I_m(\underbrace{f - S_m f}_{=:h})|H^1(\mathbb{T})\|.$$

Aus Satz 6 wissen wir, dass

$$\|f - S_m f|H^1(\mathbb{T})\| \leq \frac{\sqrt{2}}{m^{(s-1)}} \|f|H^s(\mathbb{T})\|$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Offensichtlich ist

$$c_k(h) = 0 \tag{1}$$

für $|k| \leq m$. Wir verwenden Folgerung 1 und betrachten

$$\|I_m h|H^1(\mathbb{T})\| = \left\| \sum_{|k| \leq m} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{k+\ell(2m+1)}(h) e^{ikx} \middle| H^1(\mathbb{T}) \right\|.$$

Aufgrund von (1) können wir dies vereinfachen zu

$$\|I_m h|H^1(\mathbb{T})\| = \left\| \sum_{|k| \leq m} \sum_{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_{k+\ell(2m+1)}(h) e^{ikx} \middle| H^1(\mathbb{T}) \right\|.$$

Da f und somit h ein trigonometrisches Polynom ist, können wir folgende Umordnung vornehmen

$$\|I_m h|H^1(\mathbb{T})\| = \left\| \sum_{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{|k| \leq m} c_{k+\ell(2m+1)}(h) e^{ikx} \middle| H^1(\mathbb{T}) \right\|.$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|I_m h|H^1(\mathbb{T})\| \quad \le \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big\| \sum_{|k|\le m} c_{k+\ell(2m+1)}(h)e^{ikx} \Big| H^1(\mathbb{T})\Big\|.$$

Nun wenden wir die Definition der Norm in $H^1(\mathbb{T})$ an und erhalten

$$\|I_m h|H^1(\mathbb{T})\| \quad \le \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(\sum_{|k|\le m} |c_{k+\ell(2m+1)}(h)|^2(1+|k|^2)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir fügen einen Faktor mit Wert 1 ein und schätzen dies ab zu

$$\begin{aligned} \|I_m h|H^1(\mathbb{T})\| \quad &\le \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(\sum_{|k|\le m} |c_{k+\ell(2m+1)}(h)|^2(1+|k|^2)\frac{(1+|k+\ell(2m+1)|^2)^s}{(1+|k+\ell(2m+1)|^2)^s}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(\sup_{|k|\le m} \frac{(1+|k|^2)}{(1+|k+\ell(2m+1)|^2)^s} \\ &\qquad \times \sum_{|k|\le m} |c_{k+\ell(2m+1)}(h)|^2(1+|k+\ell(2m+1)|^2)^s\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\sup_{|k|\le m} \frac{(1+|k|^2)}{(1+|k+\ell(2m+1)|^2)^s} \le \frac{2m^2}{(2|l|-1)^{2s}m^{2s}} = \frac{2}{(2|l|-1)^{2s}m^{2(s-1)}}.$$

Außerdem gilt

$$c_k(f) = c_k(h)$$

für $|k| > m$. Daher können wir abschätzen zu

$$\begin{aligned} \|I_m h|H^1(\mathbb{T})\| \quad &\le \quad \|f|H^s(\mathbb{T})\|\frac{1}{m^{s-1}} \underbrace{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\sqrt{2}}{(2|l|-1)^s}}_{=:C_s} \\ &\le \quad \frac{C_s}{m^{s-1}}\|f|H^s(\mathbb{T})\|. \end{aligned}$$

Bei C_s handelt es sich um eine verallgemeinerte harmonische Reihe. Für diese ist bekannt, dass sie für $s > 1$ konvergiert. Daher gilt für $s > 1$

$$C_s < \infty.$$

Daraus folgt jetzt

$$\|f - I_m f|H^1(\mathbb{T})\| \le \frac{\max(C_s, \sqrt{2})}{m^{s-1}}\|f|H^s(\mathbb{T})\|.$$

Da $\mathcal{T}_s^1$ bekanntlich dicht liegt in $H^s(\mathbb{T})$, können wir das Resultat mit Satz 2 auf ganz $H^s(\mathbb{T}^2)$ fortsetzen. Dies schließt den Beweis ab. □

Wir möchten nun auf den zweidimensionalen Fall übergehen. Da $C(\mathbb{T}^2)$ eine Tensorproduktstruktur hat (siehe [5, Folgerung 1.14, Seite 10]), möchten wir Tensorprodukte nutzen, um aus Abtastoperatoren über $C(\mathbb{T})$ entsprechende Abtastoperatoren für Funktionen aus $C(\mathbb{T}^2)$ zu konstruieren.

Seien P und Q stetige lineare Operatoren, die von $C(\mathbb{T})$ nach $C(\mathbb{T})$ abbilden. Dann können wir das algebraische Tensorprodukt $P \otimes Q$ für trigonometrische Polynome

$$f = \sum_{k \in A} a_k e^{ik\cdot},$$

wobei $(a_k)_{k\in A} \subset \mathbb{C}$ und $A \subset \mathbb{Z}^2$ mit $|A| < \infty$, definieren als

$$(P \otimes Q)f := \sum_{k \in A} a_k P(e^{ik_1 x}) Q(e^{ik_2 y}).$$

Nach [5, Lemma 1.30, Seite 20] können diese Operatoren eindeutig stetig fortgesetzt werden auf $C(\mathbb{T}^2)$. Diese stetige Fortsetzung definieren wir nachfolgend für das Tensorprodukt zweier klassischer trigonometrischer Interpolationsoperatoren.

Definition 3. *Sei $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir für $f \in C(\mathbb{T}^2)$ den bivariaten Interpolationsoperator der Ordnung (n, m) als*

$$\begin{aligned} I_n \otimes I_m f(x,y) := \Big(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\Big) \sum_{j_1=0}^{2n} \sum_{j_2=0}^{2m} f\Big(\frac{2\pi j_1}{2n+1}, \frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big) \\ \times D_n\Big(x - \frac{2\pi j_1}{2n+1}\Big) D_m\Big(y - \frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big) \end{aligned}$$

Bemerkung 1. *Beschränken wir diesen Operator auf trigonometrische Polynome, so sehen wir, dass er mit dem formal über algebraische Tensorprodukte erzeugten Operator übereinstimmt. Also handelt es sich hierbei um die eindeutige stetige Fortsetzung auf $C(\mathbb{T}^2)$.*

Lemma 7. *Sei $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C(\mathbb{T}^2)$ dann ist*

$$I_n \otimes I_m f$$

ein trigonometrisches Polynom mit Frequenzen in

$$\{-n, \ldots, n\} \times \{-m, \ldots, m\}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} I_n \otimes I_m f(x,y) = \Big(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\Big) \sum_{j_1=0}^{2n} \sum_{j_2=0}^{2m} f\Big(\frac{2\pi j_1}{2n+1}, \frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big) \\ \times D_n\Big(x - \frac{2\pi j_1}{2n+1}\Big) D_m\Big(y - \frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big). \end{aligned}$$

Anhand der Definition des Dirichlet-Kerns ist ersichtlich, dass es sich bei

$$D_n\Big(y-\frac{2\pi j_2}{2n+1}\Big)$$

um ein trigonometrisches Polynom mit Frequenzen in $\{-n,\dots,n\}$ handelt. Analog handelt es sich bei

$$D_m\Big(y-\frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big)$$

um ein trigonometrisches Polynom mit Frequenzen in $\{-m,\dots,m\}$. Multipliziert man nun beide Dirichlet-Kerne (so wie es in der Definition von $I_n\otimes I_m$ der Fall ist), dann erhalten wir ein bivariates trigonometrisches Polynom mit Frequenzen in

$$G_{n,m}:=\{-n,\dots,n\}\times\{-m,\dots,m\}.$$

Eine Linearkombination trigonometrischer Polynome mit Frequenzen in $G_{n,m}$ ergibt natürlich wiederum ein trigonometrisches Polynom mit Frequenzen in $G_{n,m}$.

Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Lemma 8. *Für $f\in\mathcal{T}^2$ und $m,n\in\mathbb{N}_0$ mit $|k_1|\le n$ sowie $|k_2|\le m$ gilt*

$$c_{k_1,k_2}(I_n\otimes I_m f)=\sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell_2=-\infty}^{\infty}c_{k_1+(2n+1)\ell_1,k_2+(2m+1)\ell_2}(f).$$

Beweis. Sei $f\in\mathcal{T}^2$. Wir beginnen damit den $(k_1,k_2)-ten$ Fourierkoeffizienten von $I_n\otimes I_m f$ zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
c_{k_1,k_2}(I_n\otimes I_m f) &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\Big)\\
&\quad\times\sum_{j_1=0}^{2n}\sum_{j_2=0}^{2m}f\Big(\frac{2\pi j_1}{2n+1},\frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big)\\
&\quad\times D_n\Big(t_1-\frac{2\pi j_1}{2n+1}\Big)D_m\Big(t_2-\frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big)e^{-ik_1t_1}e^{-ik_2t_2}dt_1dt_2\\
&= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\Big(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\Big)\sum_{j_1=0}^{2n}\sum_{j_2=0}^{2m}f\Big(\frac{2\pi j_1}{2n+1},\frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big)\\
&\quad\times\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{|\ell_1|\le n}e^{i\ell_1\left(t_1-\frac{2\pi j_1}{2n+1}\right)}\right)e^{-ik_1t_1}dt_1\\
&\quad\times\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{|\ell_2|\le m}e^{i\ell_2\left(t_2-\frac{2\pi j_2}{2m+1}\right)}\right)e^{-ik_2t_2}dt_2.
\end{aligned}$$

Durch weitere Vertauschungen von Integral und Summe erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_{k_1,k_2}(I_n \otimes I_m f) &= \Big(\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(\frac{1}{2m+1}\Big)\sum_{j_1=0}^{2n}\sum_{j_2=0}^{2m} f\Big(\frac{2\pi j_1}{2n+1}, \frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big) \\
&\quad \times\Bigg(\sum_{|\ell_1|\le n} e^{-i\ell_1\frac{2\pi j_1}{2n+1}} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it_1(\ell_1-k_1)}dt_1}_{=\delta_{\ell_1,k_1}}\Bigg) \\
&\quad \times\Bigg(\sum_{|\ell_2|\le m} e^{-i\ell_2\frac{2\pi j_2}{2m+1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it_2(\ell_2-k_2)}dt_2\Bigg) \\
&= \Big(\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(\frac{1}{2m+1}\Big)\sum_{j_1=0}^{2n}\sum_{j_2=0}^{2m} f\Big(\frac{2\pi j_1}{2n+1}, \frac{2\pi j_2}{2m+1}\Big) \\
&\quad \times e^{ik_1\frac{2\pi j_1}{2n+1}} e^{ik_2\frac{2\pi j_2}{2m+1}}.
\end{aligned}$$

Da f ein trigonometrisches Polynom ist und somit nur endlich viele Fourierkoeffizienten verschieden von Null sind, können wir

$$\begin{aligned}
c_{k_1,k_2}(I_n \otimes I_m f) &= \Big(\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(\frac{1}{2m+1}\Big)\sum_{j_1=0}^{2n}\sum_{j_2=0}^{2m} \\
&\quad \times\Big(\sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell_2=-\infty}^{\infty} c_{\ell_1,\ell_2}(f) e^{i\ell_1\frac{2\pi j_1}{2n+1}} e^{i\ell_2\frac{2\pi j_2}{2m+1}}\Big) e^{-ik_1\frac{2\pi j_1}{2n+1}} e^{-ik_2\frac{2\pi j_2}{2m+1}}
\end{aligned}$$

umordnen zu

$$\begin{aligned}
c_{k_1,k_2}(I_n \otimes I_m f) &= \Big(\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(\frac{1}{2m+1}\Big)\sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell_2=-\infty}^{\infty} c_{\ell_1,\ell_2}(f) \\
&\quad \times\sum_{j_1=0}^{2n} e^{ij_1\left(\frac{2\pi\ell_1}{2n+1}-\frac{2\pi k_1}{2n+1}\right)} \sum_{j_2=0}^{2m} e^{ij_2\left(\frac{2\pi\ell_2}{2m+1}-\frac{2\pi k_2}{2m+1}\right)}.
\end{aligned}$$

Offenbar ist

$$\sum_{j_1=0}^{2n} e^{ij_1\left(\frac{2\pi\ell_1}{2n+1}-\frac{2\pi k_1}{2n+1}\right)} = \begin{cases} \frac{1-e^{\frac{i2\pi(\ell_1-k_1)(2n+1)}{2n+1}}}{1-e^{\frac{i2\pi(\ell_1-k_1)}{2n+1}}} = 0 & \text{falls } e^{i\frac{2\pi}{2n+1}(\ell_1-k_1)} \neq 1, \\ 2n+1 & \text{falls } e^{i\frac{2\pi}{2n+1}(\ell_1-k_1)} = 1, \end{cases}$$

und es gilt

$$e^{i\frac{2\pi}{2n+1}(\ell_1-k_1)} = 1 \iff \frac{1}{2n+1}(\ell_1-k_1) \in \mathbb{Z} \iff \exists v \in \mathbb{Z} : \ell_1 = k_1 + v(2n+1).$$

Nutzen wir diese Erkenntnis analog für die zweite Komponente, so erhalten wir

$$c_{k_1,k_2}(I_n \otimes I_m f) = \sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell_2=-\infty}^{\infty} c_{k_1+(2n+1)\ell_1, k_2+(2m+1)\ell_2}(f).$$

Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Folgerung 2. *Für $f \in \mathcal{T}^2$ lautet die Fourierreihe zu $I_n \otimes I_m f$*

$$I_n \otimes I_m f(x,y) = \sum_{|k_1| \leq n} \sum_{|k_2| \leq m} \Big(\sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell_2=-\infty}^{\infty} c_{k_1+(2n+1)\ell_1, k_2+(2m+1)\ell_2}(f) \Big) e^{i(k_1 x + k_2 y)}.$$

5 Die Räume $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$

In diesem Kapitel führen wir die Sobolev-Räume dominierend gemischter Glattheit $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ ein, welche die Ausgangsräume unserer zu approximierenden Funktionen darstellen. Außerdem diskutieren wir diverse Eigenschaften dieser Räume.

Definition 4. *Wir definieren für $s \geq 0$ den Sobolev-Raum dominierend gemischter Glattheit $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ als*

$$H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) := \left\{ f \in L_2(\mathbb{T}^2) : \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k(f)|^2 (1+|k_1|)^{2s} (1+|k_2|)^{2s} < \infty \right\},$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k(f)|^2 (1+|k_1|)^{2s} (1+|k_2|)^{2s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 9. *Für $0 \leq s_1 \leq s_2$ gilt*

$$H^{s_2}_{mix}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow H^{s_1}_{mix}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{T}^2).$$

Insbesondere ist

$$H^0_{mix}(\mathbb{T}^2) = L_2(\mathbb{T}^2).$$

Beweis. Sei $0 \leq s_1 \leq s_2$, dann ist

$$\begin{aligned} \|f|H^{s_1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\| &= \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k(f)|^2 (1+|k_1|)^{2s_1} (1+|k_2|)^{2s_1} \Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k(f)|^2 (1+|k_1|)^{2s_2} (1+|k_2|)^{2s_2} \Big)^{1/2} \\ &= \|f|H^{s_2}_{mix}(\mathbb{T}^2)\|. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned}(1+|k_1|^2+|k_2|^2)^s &\leq (1+|k_1|+|k_2|)^{2s}\\ &\leq (1+|k_1|+|k_2|+|k_1||k_2|)^{2s}\\ &= (1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}.\end{aligned}$$

Damit können wir wie folgt einbetten

$$\begin{aligned}\|f|H^{s_1}(\mathbb{T}^2)\| &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|c_k(f)|^2(1+|k_1|^2+|k_2|^2)^s\Big)^{1/2}\\ &\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|c_k(f)|^2(1+|k_1|)^{2s_1}(1+|k_2|)^{2s_1}\Big)^{1/2}\\ &= \|f|H^{s_1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.\end{aligned}$$

Der Fall $s = 0$ ist klar, da in diesem Fall das Gewicht konstant 1 wird. □

Lemma 10. *Für $s > 1/2$ gilt*

$$H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^2).$$

Beweis. Siehe [1, Lemma 20]. □

Lemma 11. *Für $s \geq 0$ sind die folgenden Normen äquivalent*

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_* := \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s|k|_1}\|\delta_k(f)\|_2^2\Big)^{1/2}.$$

Beweis. Für $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ gilt

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2}|c_{(j_1,j_2)}(f)|^2(1+|j_1|)^{2s}(1+|j_2|)^{2s}.$$

Dies zerlegen wir in

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2}\sum_{j\in P_k}|c_{(j_1,j_2)}(f)|^2(1+|j_1|)^{2s}(1+|j_2|)^{2s}.$$

Wir schätzen das Gewicht ab

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2}(1+2^{k_1})^{2s}(1+2^{k_2})^{2s}\sum_{j\in P_k}|c_{(j_1,j_2)}(f)|^2$$

und können weiter abschätzen zu

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \leq 4^{2s}\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2}2^{2s(k_1+k_2)}\sum_{j\in P_k}|c_{(j_1,j_2)}(f)|^2.$$

Unter Anwendung der Parsevalgleichung ist dies nichts anderes als

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \leq 4^{2s} \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s|k|_1}\|\delta_k(f)\|_2^2.$$

Außerdem ist

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s(k_1+k_2)} \sum_{j\in P_k} |c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0^2}\sum_{j\in P_k}(2|j_1|)^{2s}(2|j_2|)^{2s}|c_{(j_1,j_2)}(f)|^2,$$

da

$$2^{k_i-1} \leq |j_i| \leq 2^{k_i},\ i = 1,2$$

gilt. Dies können wir wiederum abschätzen gegen

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2}\sum_{j\in P_k}(2|j_1|)^{2s}(2|j_2|)^{2s}|c_{(j_1,j_2)}(f)|^2 &\leq 4^{2s}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}|c_{k_1,k_2}(f)|^2 \\ &= 4^{2s}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass beide Normen äquivalent sind. □

6 Der Smolyak-Algorithmus angewandt auf die klassische trigonometrische Interpolation in $H^1(\mathbb{T}^2)$

Im nachfolgenden Abschnitt werden spezielle, mit dem Smolyak-Algorithmus konstruierte, Fourier-Partialsummen und Abtastoperatoren in Verbindung mit dem Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1(\mathbb{T}^2))$ untersucht.

Definition 5. *Sei $J = (J_{2^\ell})_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge linearer Operatoren und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir*

$$\Delta_k(J) := J_{2^k} - J_{2^{k-1}},$$

wobei $J_{2^{-1}} := 0$ gesetzt wird.

Definition 6. *Sei $J = (J_{2^\ell})_{\ell\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{L}(L_2(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T}))$ oder $J = (J_{2^\ell})_{\ell\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{L}(C(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T}))$ mit $J_{-1} = 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann führen wir den Smolyak-Algorithmus m-ter Ordnung angewendet auf J ein, als*

$$A_m(J)f := \sum_{j+k\leq m} \Delta_j(J) \otimes \Delta_k(J)f$$

für alle $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$.

Wir sind nachfolgend für $S := (S_{2^j})_{j=0}^{\infty}$ (Fourier-Partialsumme) und $I := (I_{2^j})_{j=0}^{\infty}$ (klassische trigonometrische Interpolation) interessiert an $A_m(I)$ bzw. $A_m(S)$.

Wir bezeichnen mit B_m den Operator

$$B_m := A_m(I).$$

Zunächst beweisen wir eine alternative Darstellung des bivariaten Smolyak-Algorithmus.

Lemma 12. *Sei $J = (J_{2^\ell})_{\ell \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{L}(L_2(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T}))$ bzw. $J = (J_{2^\ell})_{\ell \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{L}(C(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T}))$ eine entsprechende Folge von Operatoren mit $J_{2^{-1}} = 0$. Dann gilt*

$$A_m(J)f = \sum_{j=0}^{m} (J_{2^j} \otimes J_{2^{m-j}})f - \sum_{j=0}^{m-1} (J_{2^j} \otimes J_{2^{m-j-1}})f.$$

Beweis. Aufgrund der Bilinearität des Tensorproduktes erhalten wir

$$\begin{aligned}
A_m(J)f &= \sum_{j+k \le m} \Delta_j(J) \otimes \Delta_k(J) f \\
&= \sum_{j+k \le m} (J_{2^j} \otimes \Delta_k(J))f - \sum_{j+k \le m} (J_{2^{j-1}} \otimes \Delta_k(J))f \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} (J_{2^j} \otimes \Delta_k(J))f}_{=:R} - \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} (J_{2^{j-1}} \otimes \Delta_k(J))f.}_{=:S}
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun beide Terme getrennt, so können wir die Teleskopsummen vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} (J_{2^j} \otimes \Delta_k(J))f \\
&= \sum_{j=0}^{m} (J_{2^j} \otimes (J_{2^{m-j}} - J_{2^{m-j-1}} + J_{2^{m-j-1}} - \dots + J_{2^0} - J_{2^{-1}}))f \\
&= \sum_{j=0}^{m} (J_{2^j} \otimes J_{2^{m-j}})f
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} (J_{2^{j-1}} \otimes (J_{2^k} - J_{2^{k-1}}))f \\
&= \sum_{j=0}^{m} (J_{2^{j-1}} \otimes (J_{2^{m-j}} - J_{2^{m-j-1}} + J_{2^{m-j-1}} - \cdots + J_{2^0} - J_{2^{-1}}))f \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (J_{2^j} \otimes J_{2^{m-j-1}})f.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Mit dieser Darstellung können wir für $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C(\mathbb{T}^2)$ den Abtastoperator $A(m, I)$ auf $\mathbb{T}^2$ darstellen als

$$
\begin{aligned}
B_m f(x,y) &= \sum_{j=0}^{m} \Big(\frac{1}{2^j + \frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{1}{2^{m-j} + \frac{1}{2}}\Big) \sum_{j_1=0}^{2^{j+1}} \sum_{j_2=0}^{2^{m-j+1}} f\Big(\frac{2\pi j_1}{2^{j+1}+1}, \frac{2\pi j_2}{2^{m-j+1}+1}\Big) \\
&\quad \times D_{2^j}\Big(x - \frac{2\pi j_1}{2^{j+1}+1}\Big) D_{2^{m-j}}\Big(y - \frac{2\pi j_2}{2^{m-j+1}+1}\Big) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\frac{1}{2^j + \frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{1}{2^{m-j-1} + \frac{1}{2}}\Big) \sum_{j_1=0}^{2^{j+1}} \sum_{j_2=0}^{2^{m-j}} f\Big(\frac{2\pi j_1}{2^{j+1}+1}, \frac{2\pi j_2}{2^{m-j}+1}\Big) \\
&\quad \times D_{2^j}\Big(x - \frac{2\pi j_1}{2^{j+1}+1}\Big) D_{2^{m-j-1}}\Big(y - \frac{2\pi j_2}{2^{m-j}+1}\Big).
\end{aligned}
$$

Hiermit lässt sich sehr einfach das Gitter der Abtastpunkte bestimmen.

Definition 7. *Wir definieren das Gitter der Abtastpunkte von B_m als*

$$
\begin{aligned}
K(m) &:= \bigcup_{j=0}^{m} \bigcup_{j_1=0}^{2^{j+1}} \bigcup_{j_2=0}^{2^{m-j+1}} \Big\{\Big(\frac{2\pi j_1}{2^{j+1}+1}, \frac{2\pi j_2}{2^{m-j+1}+1}\Big)\Big\} \\
&\quad \cup \bigcup_{j=0}^{m-1} \bigcup_{j_1=0}^{2^{j+1}} \bigcup_{j_2=0}^{2^{m-j}} \Big\{\Big(\frac{2\pi j_1}{2^{j+1}+1}, \frac{2\pi j_2}{2^{m-j}+1}\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Lemma 13. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$|K(m)| \lesssim m2^m$$

Beweis. Wir definieren zunächst die Hilfsmenge

$$T(m) := \bigcup_{j=0}^{m} \bigcup_{j_1=0}^{2^{j+1}} \bigcup_{j_2=0}^{2^{m-j+1}} \Big\{\Big(\frac{2\pi j_1}{2^{j+1}+1}, \frac{2\pi j_2}{2^{m-j+1}+1}\Big)\Big\}.$$

Damit können wir $K(m)$ darstellen als

$$K(m) = T(m) \cup T(m-1).$$

Berechnen wir nun eine entsprechende obere Schranke für $|T(m)|$:

$$\begin{aligned}
|T(m)| &\leq \sum_{j=0}^{m} \sum_{j_1=0}^{2^{j+1}} \sum_{j_2=0}^{2^{m-j+1}} 1 \\
&= \sum_{j=0}^{m} (2^{j+1}+1)(2^{m-j+1}+1) \\
&= 4(m+1)2^m + 22^m \underbrace{\sum_{j=0}^{m} 2^{-j}}_{\leq 2} + 2\sum_{j=0}^{m} 2^j + (m+1) \\
&\leq 4(m+1)2^m + 42^m + 2(m+1)2^m + (m+1) \\
&\lesssim m2^m.
\end{aligned}$$

Folglich gilt für $|T(m-1)|$:

$$|T(m-1)| \lesssim (m-1)2^{m-1} \leq m2^m.$$

Wir können den Beweis abschließen mit

$$|K(m)| \leq |T(m)| + |T(m-1)| \lesssim m2^m.$$

□

Definition 8. *Wir bezeichnen für $m \in \mathbb{N}$ die Menge*

$$H(m) \quad := \quad \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \exists p, q \in \mathbb{N}, |k_1| \leq 2^p, |k_2| \leq 2^q, p + q = m\}$$

als dyadisches hyperbolisches Kreuz m-ter Ordnung.

Lemma 14. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt die Identität*

$$H(m) = \bigcup_{\substack{k_1+k_2 \leq m \\ k_1,k_2 \in \mathbb{N}_0}} P_k.$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Der Beweis ergibt sich aus der Definition von P_k mit folgender Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in H(m) &\iff \exists p, q \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } p + q = m : \ |x_1| \leq 2^p, |x_2| \leq 2^q \\
&\iff \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k_1 + k_2 \leq m : \ (x_1, x_2) \in P_{(k_1,k_2)} \\
&\iff (x_1, x_2) \in \bigcup_{\substack{k_1+k_2 \leq m \\ k_1,k_2 \in \mathbb{N}_0}} P_k.
\end{aligned}$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Definition 9. *Wir bezeichnen für $m \in \mathbb{N}_0$ die Menge der trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem hyperbolischen Kreuz als*

$$V(m) := \Big\{ \sum_{k\in A} a_k e^{ikx} : (a_k)_{k\in A} \subset \mathbb{C},\ A \subseteq H(m) \Big\}.$$

Lemma 15. *Es gilt für $m \in \mathbb{N}_0$*

$$|H(m)| = 2^m(2m+8)+1.$$

Beweis. Sei $m \geq 1$. Wir betrachten zunächst das Paar

$$0 \leq |k_1| \leq 2^m \ und\ 0 \leq |k_2| \leq 2^0.$$

Offensichtlich haben wir in diesem Fall $3(2^{m+1}+1)$ Kombinationsmöglichkeiten zur Auswahl von k_1 und k_2. Dagegen haben wir im Fall

$$0 \leq |k_1| \leq 2^{m-j},\ 2^{j-1} < |k_2| \leq 2^j\ für\ j = 1, \ldots, m$$

$(2^{m-j+1}+1)2^j$ Kombinationsmöglichkeiten zur Auswahl von k_1 und k_2. Also gilt

$$\begin{aligned} |H(m)| &= \sum_{j=1}^{m} (2^{m-j+1}+1)2^j + 3(2^{m+1}+1) \\ &= m2^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} 2^j + 3\cdot 2^{m+1} + 3 \\ &= m2^{m+1} + 2^{m+1} - 2 + 3\cdot 2^{m+1} + 3 \\ &= (2m+8)2^m + 1. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2. *$|H(m)|$ wächst streng monoton in m.*

Folgerung 3. *Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\dim V(m) = (2m+8)2^m + 1.$$

Beweis. Wir können $V(m)$ schreiben als lineare Hülle aller Funktionen $e^{ik_1x+ik_2y}$ mit $(k_1,k_2) \in H(m)$. V(m) hat also eine Basis der Mächtigkeit $|H(m)|$. Damit folgt das Resultat aus der Definition der Dimension. □

Lemma 16. *Sei $f \in C(\mathbb{T}^2)$. Dann gilt*

$$B_m f \in V(m).$$

Beweis. Sei $f \in C(\mathbb{T}^2)$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Wir wissen aus Lemma 7, dass $I_n \otimes I_m f$ ein trigonometrisches Polynom mit Frequenzen in $\{-n, \dots, n\} \times \{-m, \dots, m\}$ ist. Daher hat

$$\begin{aligned}
\Delta_{k_1}(I) \otimes \Delta_{k_2}(I) f &= (I_{2^{k_1}} - I_{2^{k_1-1}}) \otimes (I_{2^{k_2}} - I_{2^{k_2-1}}) f \\
&= I_{2^{k_1}} \otimes I_{2^{k_2}} f - I_{2^{k_1}} \otimes I_{2^{k_2-1}} f \\
&\quad - I_{2^{k_1-1}} \otimes I_{2^{k_2}} f + I_{2^{k_1-1}} \otimes I_{2^{k_2-1}} f
\end{aligned}$$

für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ Frequenzen in

$$G_{k_1,k_2} := \{-2^{k_2}, \dots, 2^{k_1}\} \times \{-2^{k_2}, \dots, 2^{k_1}\}.$$

Damit liegen die Frequenzen von

$$B_m f = \sum_{k_1+k_2 \le m} \Delta_{k_1}(I) \otimes \Delta_{k_2}(I)$$

in

$$\bigcup_{k_1+k_2 \le m} G_{k_1,k_2} = H(m).$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Folgerung 4. *Es gilt für* $m \in \mathbb{N}_0$

$$rank\,(B_m) \le (2m+8)2^m + 1$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Mit Lemma 16 gilt

$$B_m(C(\mathbb{T}^2)) \subseteq V(m).$$

Daher ist

$$\text{rank}\,(B_m) \le |H(m)|.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Lemma 17. *Sei* $(J_k)_{k=0}^{\infty}$ *eine geeignete Folge linearer Operatoren mit der Eigenschaft*

$$J_i(e^{ik\cdot})(t) = e^{ikt},\ t \in \mathbb{T},\ |k| \le i,\ k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Dann gilt

$$A_m(J)e^{iut} = e^{iut}$$

für alle $u \in H(m)$ *und* $t \in \mathbb{T}^2$.

Beweis. Sei $e^{i(k_1x+k_2y)}$ ein trigonometrisches Polynom mit $(k_1,k_2)\in H(m)$ für ein $m\geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A_m(J)e^{i(k_1x+k_2y)} &= \sum_{j+l\leq m} \Delta_j(I)\otimes\Delta_l(I)e^{i(k_1x+k_2y)} \\
&= \sum_{j+l\leq m} (I_{2^j}-I_{2^{j-1}})e^{ik_1x}(I_{2^l}-I_{2^{l-1}})e^{ik_2y} \\
&= \sum_{j=0}^{m}(I_{2^j}-I_{2^{j-1}})e^{ik_1x}\sum_{l=0}^{m-j}(I_{2^l}-I_{2^{l-1}})e^{ik_2y}.
\end{aligned}$$

Da $(k_1,k_2)\in H(m)$ gilt, existiert ein $p,q\in\mathbb{N}_0$ mit $|k_1|\leq 2^p$ und $|k_2|\leq 2^q$ und $p+q=m$. Es gilt aufgrund von (2)

$$(I_{2^j}-I_{2^{j-1}})e^{ik_1x}=0$$

für $j>p$ und

$$(I_{2^l}-I_{2^{l-1}})e^{ik_2y}=0$$

für $l>q$. Daher können wir vereinfachen zu

$$A_m(J) = \sum_{j=0}^{p}(I_{2^j}-I_{2^{j-1}})e^{ik_1x}\sum_{l=0}^{q}(I_{2^l}-I_{2^{l-1}})e^{ik_2y}.$$

Nun lösen wir die Teleskopsummen auf und erhalten

$$A_m(J)e^{i(k_1x+k_2y)}=I_{2^p}e^{ik_1x}I_{2^q}e^{ik_2y}.$$

Aufgrund der Reproduktionseigenschaft (2) werden nun beide trigonometrischen Polynome reproduziert und es gilt

$$A_m(J)e^{i(k_1x+k_2y)}=e^{i(k_1x+k_2y)}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{T}^2$. □

Folgerung 5. *Sei $m\in\mathbb{N}$. Es gilt für $f\in V(m)$*

$$B_mf(x)=f(x)$$

für alle $x\in\mathbb{T}^2$.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 17 und der Linearität des Operators A(m,I). □

Lemma 18. *Sei $m\in\mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\mathit{rank}\,(B_m)=(2m+8)2^m+1.$$

Beweis. Die Abschätzung

$$\text{rank}\,(B_m) \leq H(m)$$

wurde in Folgerung 4 bewiesen. Die untere Schranke ergibt sich aus der Tatsache, dass mit Folgerung 5

$$V(m) \subseteq B_m(C(\mathbb{T}^2))$$

gilt. Daher schlussfolgern wir für die Dimension

$$\dim V(m) = |H(m)| \leq \text{rank}\,(B_m).$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Folgerung 6. *Es gilt für $m \in \mathbb{N}$*

$$|K(m)| \asymp m2^m.$$

Insbesondere gilt

$$|K(m)| \asymp \textit{rank}\,(B_m).$$

Beweis. Die obere Schranke folgt aus Lemma 13. Sei nachfolgend $(x_i^m)_{i=1}^{|K(m)|} \subset \mathbb{T}^2$ die endliche Folge von Abtastpunkten des Operators B_m, wobei nicht klar ist, ob für $i \neq j$ auch $x_i \neq x_j$ gilt. Wir definieren

$$X(m) := \Big\{ \big(f(x_1^m), \ldots, f(x_{|K(m)|}^m) \big) : \ f \in C(\mathbb{T}^2) \Big\}.$$

Nun betrachten wir $B_m : X(m) \longrightarrow V(m)$ als einen Operator, der von einer Folge von Abtastwerten in den Abtaststellen $(x_i^m)_{i=1}^{|K(m)|}$ der zu approximierenden stetigen Funktion auf $V(m)$ abbildet.

Aus Folgerung 5 wissen wir, dass

$$B_m(X(m)) = V(m)$$

gilt. Nun erhalten wir mit dem aus der linearen Algebra bekannten Dimensionssatz für lineare Abbildungen und Folgerung 3 die Abschätzung

$$(2m+8)2^m + 1 = \dim V(m) \leq \dim X(m).$$

Also existiert eine Basis in X(m), deren Mächtigkeit größer oder gleich $(2m+8)2^m + 1$ ist. Folglich existieren mindestens $(2m+8)2^m + 1$ verschiedene Abtaststellen. Daher gilt

$$|K(m)| \geq (2m+8)2^m + 1.$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Bemerkung 3. *Man bezeichnet ein solches Gitter von Abtastpunkten mit den hier genannten Kardinalitätsabschätzungen auch als ein dünnes Gitter.*

Definition 10. *Wir führen für $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$ die Fourier-Partialsumme bezüglich des dyadischen hyperbolischen Kreuzes m-ter Ordnung*

$$S_m^H f(x) := \sum_{k \in H(m)} c_k(f) e^{ikx}$$

ein.

Bemerkung 4. *Bei diesem Operator handelt es sich um die orthogonale Projektion auf die trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus $H(m)$.*

Lemma 19. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $f \in L_2(T^2)$*

$$S_m^H f = A_m(S) f.$$

Insbesondere gilt

$$\mathit{rank}\ (S_m^H f) = |H(m)|.$$

Beweis. Für $j + k \leq m$ gilt

$$\begin{aligned}
&\Delta_j(S) \otimes \Delta_k(S) f(x,y) = (S_{2^j} \otimes S_{2^k}) f(x,y) - (S_{2^j} \otimes S_{2^{k-1}}) f(x,y) \\
&-(S_{2^{j-1}} \otimes S_{2^k}) f(x,y) + (S_{2^{j-1}} \otimes S_{2^{k-1}}) f(x,y) \\
&= \sum_{\substack{|\ell_1| \leq 2^j \\ |\ell_2| \leq 2^k}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f) e^{i(\ell_1 x + \ell_2 y)} - \sum_{\substack{|\ell_1| \leq 2^j \\ |\ell_2| \leq 2^{k-1}}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f) e^{i(\ell_1 x + \ell_2 y)} \\
&- \sum_{\substack{|\ell_1| \leq 2^{j-1} \\ |\ell_2| \leq 2^k}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f) e^{i(\ell_1 x + \ell_2 y)} + \sum_{\substack{|\ell_1| \leq 2^{j-1} \\ |\ell_2| \leq 2^{k-1}}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f) e^{i(\ell_1 x + \ell_2 y)} \\
&= \sum_{(\ell_1,\ell_2) \in P_{(j,k)}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f) e^{i(\ell_1 x + \ell_2 y)}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
A_m(S) f(x,y) &= \sum_{j+k \leq m} \Delta_j(S) \otimes \Delta_k(S) f(x,y) \\
&= \sum_{j+k \leq m} \sum_{(\ell_1,\ell_2) \in P_{(j,k)}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f) e^{ilx} \\
&= \sum_{(l_1,l_2) \in H(m)} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f) e^{i(\ell_1 x + \ell_2 y)}.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit

$$\text{rank}\ (A_m(S)) = |H(m)|$$

folgt unmittelbar daraus, dass die $(e^{ikx})_{k \in H(m)}$ in L_2 paarweise orthogonal sind und die Fourierkoeffizienten eine entsprechende Anzahl an Freiheitsgraden erlauben. Dies schließt den Beweis ab. □

Satz 4. *Für jedes $s > 1$ und $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ gilt*

$$\|f - S^H_m(f)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \le \frac{\sqrt{3}}{2^{m(s-1)}} \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sei $s > 1$ und $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$. Wir beginnen mit der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|f - S^H_m f|H^1(\mathbb{T}^2)\| &= \|\sum_{(k_1,k_2)\notin H_m} c_k(f)e^{ikx}|H^1(\mathbb{T}^2)\| \\
&= \left(\sum_{(k_1,k_2)\notin H_m} |c_k(f)|^2(1+k_1^2+k_2^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{(k_1,k_2)\notin H_m} |c_k(f)|^2 \frac{(1+k_1^2+k_2^2)(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\sup_{(k_1,k_2)\notin H_m} \frac{(1+k_1^2+k_2^2)}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}}\right)^{\frac{1}{2}} \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen können wir uns bei der Untersuchung des Supremums auf folgende zwei Fälle beschränken. Für $k_1 = 0$ ist

$$\begin{aligned}
\sup_{(0,k_2)\notin H(m)} \frac{1+k_2^2}{(1+k_2)^{2s}} &\le \sup_{\substack{k_2>2^m\\ k_2\in\mathbb{N}}} \frac{(1+k_2)^2}{(1+k_2)^{2s}} \\
&= \frac{1}{(2^m+1)^{2s-2}} \\
&\le \frac{1}{2^{2m(s-1)}}.
\end{aligned}$$

Weiter ist für $1 \le k_1 \le k_2$

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{1\le k_1\le k_2\\ (k_1,k_2)\notin H(m)}} \frac{1+k_2^2+k_2^2}{(1+k_1)^{2s}(1+k_2)^{2s}} &\le \sup_{\substack{1\le k_1\le k_2\\ (k_1,k_2)\notin H(m)}} \frac{3(k_1k_2)^2}{(k_1k_2)^{2s}} \\
&\le \frac{3}{2^{2m(s-1)}},
\end{aligned}$$

da $1 + k_1^2 + k_2^2 \le 3(k_1k_2)^2$ gilt.

Setzen wir dies ein, so erhalten wir das Resultat

$$\|f - S^H_m f|H^1(\mathbb{T}^2)\| \le \sqrt{3}\frac{1}{2^{m(s-1)}} \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

$\square$

Lemma 20. *Sei für $m \in \mathbb{N}$*

$$f_m(x,y) := e^{i(2^m+1)x+iy}, \; x,y \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\|f_m|H^1(\mathbb{T}^2)\| = \|f_m - S_m^H f_m|H^1(\mathbb{T}^2\| \asymp 2^m$$

sowie

$$\|f_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp 2^{ms}.$$

Beweis. Da f_m nur über Frequenzen außerhalb des m-ten hyperbolischen Kreuzes verfügt, gilt

$$S_m^H f_m = 0.$$

Daher ist

$$\|f_m|H^1(\mathbb{T}^2)\| = \|f_m - S_m^H f_m|H^1(\mathbb{T}^2\|.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|f_m|H^1(\mathbb{T}^2)\| &= \sqrt{(1+|2^m+1|^2+|1|^2)} \\ &\asymp 2^m \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|f_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| &= \sqrt{(1+|2^m+1|)^{2s}(1+|1|)^{2s}} \\ &\asymp 2^{ms}. \end{aligned}$$

□

Folgerung 7. *Sei $s > 1$. Dann existieren Konstanten $A_1^s, A_2^s > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$*

$$\frac{A_1^s}{2^{m(s-1)}} \leq \frac{\|f_m - S_m^H f_m|H^1(\mathbb{T}^2)\|}{\|f_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|} \leq \|id - S_m^H|H^s_{mix} \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{A_2^s}{2^{m(s-1)}}$$

gilt. Insbesondere gilt für rank $(S_m^H) \leq n <$ rank (S_{m+1}^H) mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 21$

$$\|id - S_m^H|H^s_{mix} \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Beweis. Die untere Schranke des ersten Resultats folgt unmittelbar aus Lemma 20 und die obere Schranke folgt aus Theorem 4.

Beweisen wir nun das zweite Resultat. Es ist

$$|H(1)| = 21.$$

Da $|H(m)|$ streng monoton in m wächst, finden wir für $n > 21$ ein $m > 0$ mit

$$\text{rank }(B_m) \leq n < \text{rank }(B_{m+1}).$$

Mit Lemma 18 können wir dies wie folgt einschränken

$$m2^m \asymp \text{rank }(B_m) \leq n < \text{rank }(B_{m+1}) \asymp (m+1)2^{m+1} \asymp m2^m.$$

Also gilt

$$n \asymp m2^m.$$

Nun berechnen wir die obere und untere Schranke in Abhängigkeit von n für

$$\|I - S_m^H | H_{mix}^s(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\|.$$

Mit Satz 4 erhalten wir

$$\|I - S_m^H | H_{mix}^s(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{1}{2^{m(s-1)}}.$$

Es ist

$$\frac{1}{2^{m(s-1)}} = \frac{m^{s-1}}{(m2^m)^{s-1}} \asymp \frac{m^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

1. Schritt:

Offensichtlich gilt die Ungleichung

$$2^m \leq m2^m \lesssim n.$$

Dies ist äquivalent zu

$$m \lesssim \log_2(n).$$

Daher gilt

$$\frac{1}{2^{m(s-1)}} \lesssim \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

2. Schritt:

Außerdem gilt

$$n \lesssim m2^m.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\log_2(n) \lesssim m + \log_2(m) \leq 2m.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2^{m(s-1)}} \gtrsim \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Damit erhalten wir

$$\|I - S_m^H | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Satz 5. *Für jedes $s > 1$ existiert ein $C_s > 0$, sodass für jedes $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$*

$$\|f - B_m f | H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{C_s}{2^{m(s-1)}} \|f | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

gilt, für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Schritt 1: Vorbereitungen

Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{T}_s^2$ in $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ genügt es, trigonometrische Polynome f auf $\mathbb{T}^2$ zu betrachten (siehe Satz 2). Zunächst fügen wir die Fourier-Partialsumme bzgl. des hyperbolischen Kreuzes ein und wenden die Dreiecksungleichung an.

$$\begin{aligned} \|f - B_m f | H^1(\mathbb{T}^2)\| &= \|f - S_m^H(f) + S_m^H(f) - B_m f | H^1(\mathbb{T}^2)\| \\ &\leq \|f - S_m^H(f) | H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|S_m^H(f) - B_m f | H^1(\mathbb{T}^2)\|. \end{aligned}$$

Anschließend nutzen wir Lemma 17. Die Reproduktionseigenschaft liefert

$$\|f - B_m f | H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \|\underbrace{f - S_m^H(f)}_{=:g} | H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|B_m(g) | H^1(\mathbb{T}^2)\|.$$

Wir können die Funktion g mit ihrer Fourier-Reihe identifizieren

$$g = \sum_{k \notin H_m} c_k(f) e^{ik_1 x + ik_2 y}$$

und somit gilt $c_k(g) = 0$ für $k \in H_m$, sowie $c_k(g) = c_k(f)$ für $k \notin H_m$.

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} B_m g(x,y) &= \sum_{j=0}^{m} (L_j \otimes L_{m-j}) g(x,y) - \sum_{j=0}^{m-1} (L_j \otimes L_{m-j-1}) g(x,y) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{|k_1| \leq 2^j} \sum_{|k_2| \leq 2^{m-j}} \left(\sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1 + l_1(2^{j+1}+1), k_2 + l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) \right) \\ &\quad \times e^{i(k_1 x + k_2 y)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|k_1| \leq 2^j} \sum_{|k_2| \leq 2^{m-j-1}} \left(\sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1 + l_1(2^{j+1}+1), k_2 + l_2(2^{m-j}+1)}(g) \right) \\ &\quad \times e^{i(k_1 x + k_2 y)}. \end{aligned}$$

Da f und somit auch g trigonometrische Polynome mit endlich vielen Fourierkoeffizienten verschieden von Null sind, können wir folgende Umordnung vornehmen

$$\begin{aligned} B_m g(x,y) &= \sum_{l_1\in\mathbb{Z}}\sum_{l_2\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right.\\ &\quad \left.-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right). \end{aligned}$$

Die Doppelsumme $\sum_{l_1\in\mathbb{Z}}\sum_{l_2\in\mathbb{Z}}$ zerlegen wir nun in die folgenden vier Terme

$$B_m g(x,y) = Ag(x,y)+Bg(x,y)+Cg(x,y)+Dg(x,y),$$

wobei

$$\begin{aligned} Ag(x,y) &:= \sum_{\substack{l_1=0\\ l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right.\\ &\quad \left.-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bg(x,y) &:= \sum_{\substack{l_2=0\\ l_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right.\\ &\quad \left.-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cg(x,y) &:= \sum_{\substack{|l_1|>0\\ |l_2|>0}}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right.\\ &\quad \left.-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dg(x,y) &:= \sum_{\substack{|l_1|=0\\ |l_2|=0}}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right.\\ &\quad \left.-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\right). \end{aligned}$$

In den folgenden Schritten schätzen wir jetzt diese 4 Terme separat ab.

Schritt 2: Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} Ag(x,y) &= \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\sum_{j=0}^{m} \sum_{|k_1|\le 2^j} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \right. \\ &\left. -\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|k_1|\le 2^j} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j-1}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \right] \end{aligned}$$

und verschieben den Index über j

$$\begin{aligned} Ag(x,y) &= \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\sum_{j=0}^{m} \sum_{|k_1|\le 2^j} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \right. \\ &\left. -\sum_{j=1}^{m} \sum_{|k_1|\le 2^{j-1}} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \right]. \end{aligned}$$

Anschließend fassen wir zusammen zu

$$\begin{aligned} Ag(x,y) &= \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{|k_1|\le 1} \sum_{|k_2|\le 2^{m}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \\ &+\sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1}<|k_1|\le 2^{j-1}} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Norm in $H^1(\mathbb{T}^2)$, so können wir diese mittels Dreiecksungleichung folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned} &\|Ag|H^1(\mathbb{T}^2\| \le \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\left\| \sum_{|k_1|\le 1} \sum_{|k_2|\le 2^{m}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \right| H^1(\mathbb{T}^2) \right\| \\ &\left. +\left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1}<|k_1|\le 2^{j-1}} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \right| H^1(\mathbb{T}^2 \right\| \Bigg] \\ &= \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\|A_1 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|A_2 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \right] \end{aligned}$$

wobei

$$A_1 g(x,y) \;:=\; \sum_{|k_1|\le 1} \sum_{|k_2|\le 2^{m}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)}$$

und

$$A_2 g(x,y) \;:=\; \sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1}<|k_1|\le 2^{j-1}} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)}.$$

Wir fahren mit der Abschätzung von $\|A_1 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\|$ fort. Aus der Definition der Norm in $H^1(\mathbb{T}^2)$ folgt

$$\begin{aligned}
\|A_1 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\| &= \Big\| \sum_{|k_1|\le 1} \sum_{|k_2|\le 2^m} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \Big| H^1(\mathbb{T}^2) \Big\| \\
&= \left(\sum_{|k_1|\le 1} \sum_{|k_2|\le 2^m} |c_{k_1,k_2+l_2(2^{m+1}+1)}(g)|^2 (1+k_1^2+k_2^2) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Anschließend fügen wir einen Faktor mit Wert 1 ein und bekommen

$$\begin{aligned}
\|A_1 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\| &= \Bigg(\sum_{|k_1|\le 1} \sum_{|k_2|\le 2^m} |c_{k_1,k_2+l_2(2^{m+1}+1)}(g)|^2 (1+k_1^2+k_2^2) \\
&\qquad \times \frac{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m+1}+1)|)^{2s}} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \underbrace{\left(\sup_{\substack{|k_1|\le 1\\ |k_2|\le 2^m}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m+1}+1)|)^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=:S_1(l_2)} \\
&\qquad \times \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
S_1(l_2) &= \sup_{\substack{|k_1|\le 1\\ |k_2|\le 2^m}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m+1}+1)|)^{2s}} \\
&\le \sup_{\substack{|k_1|\le 1\\ |k_2|\le 2^m}} \frac{3\;2^{2m}}{(1+|k_1|)^{2s}(|l_2|(2^{m+1}+1)|-|k_2|)^{2s}} \\
&\le \frac{3\;2^{2m}}{(|l_2|(2^{m+1})-2^m)^{2s}} \\
&\le \frac{3}{2^{2m(s-1)}(2|l_2|-1)^{2s}}.
\end{aligned}$$

Fahren wir nun mit A_2 fort

$$\begin{aligned}
&\|A_2 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\| \\
&= \Big\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1}<|k_1|\le 2^j} \sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) e^{i(k_1x+k_2y)} \Big| H^1(\mathbb{T}^2) \Big\|.
\end{aligned}$$

Betrachten wir die Summierung über $|k_1|$, so stellen wir fest, dass durch die Summierung über j eine disjunkte Zerlegung des Intervalls $[-2^m, 2^m]$ erfolgt. Daher ist jeder Summand der Summe über $j, |k_1|, |k_2|$ orthogonal im Sinne von L_2 (bzw. H^1) zu jedem anderen Summanden mit verschiedenen Summationsindex.

Aufgrund der Orthogonalität können wir folgendermaßen unter Anwendung der Definition der Norm in $H^1(\mathbb{T}^2)$ fortfahren

$$\begin{aligned}
&\|A_2 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\| \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1}<|k_1|\leq 2^j} \sum_{|k_2|\leq 2^{m-j}} |c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)|^2 (1+|k_1|^2+|k_2|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Außerdem stellen wir anhand der disjunkten Zerlegung der Summierung über $|k_1|$ und der ersten Komponente der Fourierkoeffizienten $c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}$ fest, dass jeder Fourierkoeffizient nur einmal in der Summierung vorkommt. Wir fügen wieder einen Faktor mit Wert 1 ein

$$\begin{aligned}
\|A_2 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\| &= \Bigg(\sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1}<|k_1|\leq 2^j} \sum_{|k_2|\leq 2^{m-j}} |c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)|^2 \\
&\quad \times (1+|k_1|^2+|k_2|^2) \frac{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}} \Bigg)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

und können mit vorher genanntem Argument abschätzen zu

$$\begin{aligned}
&\|A_2 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\|^2 \\
&\leq \underbrace{\left(\sup_{1\leq j\leq m} \sup_{\substack{2^{j-1}<|k_1|\leq 2^j \\ |k_2|\leq 2^{m-j}}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}} \right)}_{=:S_2(l_2)} \\
&\times \Bigg(\sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1}<|k_1|\leq 2^j} \sum_{|k_2|\leq 2^{m-j}} |c_{k_1,k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)|^2 (1+|k_1|)^{2s} \\
&\times (1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s} \Bigg) \\
&\leq S_2(l_2) \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2.
\end{aligned}$$

$S_2(l_2)$ kann folgendermaßen abgeschätzt werden

$$\begin{aligned}
S_2(l_2) &= \sup_{1\le j\le m} \sup_{\substack{2^{j-1}<|k_1|\le 2^j\\ |k_2|\le 2^{m-j}}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}}\\
&\le \sup_{1\le j\le m} \sup_{\substack{2^{j-1}<|k_1|\le 2^j\\ |k_2|\le 2^{m-j}}} \frac{3\ 2^{2m}}{(|k_1|)^{2s}(|l_2|(2^{m-j+1}+1)-|k_2|)^{2s}}\\
&\le \sup_{1\le j\le m} \frac{3\ 2^{2m}}{2^{2s(j-1)}2^{2s(m-j)}(2|l_2|-1)^{2s}}\\
&= \frac{3\ 2^{2s}}{2^{2m(s-1)}(2|l_2|-1)^{2s}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|Ag|H^1(\mathbb{T}^2\| &\le \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Bigg[\|A_1g|H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|A_2g|H^1(\mathbb{T}^2)\|\Bigg].\\
&\le \frac{1}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{\sqrt{3}}{(2|l_2|-1)^s} + \frac{\sqrt{3}\ 2^s}{(2|l_2|-1)^s}\right)\\
&\le \frac{1}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \underbrace{\sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{\sqrt{3}\ 2^{s+1}}{(2|l_2|-1)^s}\right)}_{=:K_1^s}.
\end{aligned}$$

Bei dieser Reihe handelt es sich um eine verallgemeinerte harmonische Reihe, für die wohl bekannt ist, dass sie für $s>1$ konvergiert. Also ist $K_1^s<\infty$ und es gilt

$$\|Ag|H^1(\mathbb{T}^2\| \le \frac{K_1^s}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

Schritt 3: Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
Bg(x,y) = \sum_{l_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Bigg[&\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\\
&-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\le 2^j}\sum_{|k_2|\le 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\Bigg]
\end{aligned}$$

bzw. dessen Vereinfachung

$$Bg(x,y) = \sum_{l_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Bigg[\sum_{|k_1|\le 2^m} \sum_{|k_2|\le 2} c_{k_1+l_1(2^{m+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|k_1|\le 2^j} \sum_{2^{m-j-1}<|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \Bigg].$$

Wir können wieder unter Anwendung der Dreiecksungleichung folgendermaßen abschätzen

$$\|Bg(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \le \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Bigg[\Bigg\| \sum_{|k_1|\le 2^m} \sum_{|k_2|\le 2} c_{k_1+l_1(2^{m+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \Bigg| H^1(\mathbb{T}^2) \Bigg\|$$
$$+\Bigg\| \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|k_1|\le 2^j} \sum_{2^{m-j-1}<|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \Bigg| H^1(\mathbb{T}^2 \Bigg\| \Bigg]$$

und wir zerlegen in

$$\|Bg(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2\| \le \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big[\|B_1g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|B_2g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \Big]$$

mit

$$B_1g(x,y) := \sum_{|k_1|\le 2^m} \sum_{|k_2|\le 2} c_{k_1+l_1(2^{m+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}$$

und

$$B_2g(x,y) := \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|k_1|\le 2^j} \sum_{2^{m-j-1}<|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}.$$

Analog zu oben ist

$$\|B_1g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\| = \Bigg\| \sum_{|k_1|\le 2^m} \sum_{|k_2|\le 2} c_{k_1+l_1(2^{m+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \Bigg| H^1(\mathbb{T}^2) \Bigg\|$$
$$\le \underbrace{\left(\sup_{\substack{|k_1|\le 2^m \\ |k_2|\le 2}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1+l_1(2^{m+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=:S_3(l_1)}$$
$$\times \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

mit

$$S_3(l_1) = \sup_{\substack{|k_1|\le 2^m\\|k_2|\le 2}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1+l_1(2^{m+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}}$$
$$\le \sup_{|k_1|\le 2^m} \frac{3\,2^{2m}}{(|l_1|(2^{m+1}+1)-|k_1|)^{2s}}$$
$$\le \frac{3\,2^m}{(|l_1|(2^{m+1})-2^m)^{2s}}$$
$$\le \frac{3}{(2|l_1|-1)^{2s}2^{2m(s-1)}}.$$

Auch für $\|B_2 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|$ gelten die für $\|A_2 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|$ genannten Orthogonalitätsargumente, jedoch in $|k_2|$, so dass wir folgendermaßen abschätzen können

$$\|B_2 g(x,y)|(\mathbb{T}^2)\| \tag{3}$$
$$= \Big\| \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|k_1|\le 2^j} \sum_{2^{m-j-1}<|k_2|\le 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \Big| H^1(\mathbb{T}^2)\Big\|$$
$$\le \underbrace{\left(\sup_{0\le j\le m} \sup_{\substack{|k_1|\le 2^j\\2^{m-j-1}<|k_2|\le 2^{m-j}}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1+l_1(2^{j+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=:S_4(l_1)} \tag{4}$$
$$\times \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

mit

$$S_4(l_1) = \sup_{0\le j\le m} \sup_{\substack{|k_1|\le 2^j\\2^{m-j-1}<|k_2|\le 2^{m-j}}} \frac{1+k_1^2+k_2^2}{(1+|k_1+l_1(2^{j+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2|)^{2s}}$$
$$\le \sup_{0\le j\le m} \sup_{\substack{|k_1|\le 2^j\\2^{m-j-1}<|k_2|\le 2^{m-j}}} \frac{3\,2^{2m}}{(|l_1|(2^{j+1}+1)-|k_1|)^{2s}(|k_2|)^{2s}}$$
$$\le \sup_{0\le j\le m} \frac{3\,2^{2m}}{(|l_1|(2^{j+1}+1)-2^j)^{2s}(2^{m-j-1})^{2s}}$$
$$\le \frac{3\,2^{2s}}{(2|l_1|-1)^{2s}2^{2m(s-1)}}.$$

Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\|Bg|H^1(\mathbb{T}^2\| &\leq \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Bigg[\|B_1g|H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|B_2g|H^1(\mathbb{T}^2)\|\Bigg] \\
&\leq \frac{1}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{\sqrt{3}}{(2|l_2|-1)^s} + \frac{\sqrt{3}\,2^s}{(2|l_2|-1)^s}\right) \\
&\leq \frac{1}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \underbrace{\sum_{l_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{2\sqrt{3}\,2^s}{(2|l_2|-1)^s}\right)}_{=:K_2^s<\infty, s>1}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|Bg|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{K_2^s}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

Schritt 4:

Nun betrachten wir

$$\begin{aligned}
&Cg(x,y) \\
&= \sum_{|l_1|>0}\sum_{|l_2|>0}\Bigg[\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\leq 2^j}\sum_{|k_2|\leq 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \\
&-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\leq 2^j}\sum_{|k_2|\leq 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\Bigg].
\end{aligned}$$

Dies zerlegen wir in

$$Cg(x,y) = \sum_{|l_1|>1}\sum_{|l_2|>1}\Bigg[C_1g(x,y) - C_2g(x,y)\Bigg]$$

mit

$$C_1g(x,y) := \sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\leq 2^j}\sum_{|k_2|\leq 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}$$

und

$$C_2g(x,y) := \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\leq 2^j}\sum_{|k_2|\leq 2^{m-j-1}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}.$$

Wenden wir nun die Dreiecksungleichung auf die Norm an, so gilt

$$\|Cg(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \sum_{|l_1|>0}\sum_{|l_2|>0}\Big[\|C_1g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|C_2g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|\Big].$$

Zunächst betrachten wir

$$\begin{aligned} C_1g(x,y) &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\leq 2^j}\sum_{|k_2|\leq 2^{m-j}} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \\ &= \sum_{(j,k_1,k_2)\in Z(m)} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+(2^{m-j+1}+1)}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}. \end{aligned}$$

Wir möchten die Summierung umordnen. Dazu definieren wir die Menge der Summationsindizes

$$Z(m) := \{(j,k_1,k_2)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}^2 : j=0,\ldots,m,\ |k_1|\leq 2^j, |k_2|\leq 2^{m-j}\}.$$

Offenbar ergibt sich aus $|k_1|\leq 2^j$ und $|k_2|\leq 2^{m-j}$ die von j unabhängige Folgerung, dass

$$|k_1||k_2|\leq 2^m$$

gilt. Also ist

$$Z(m) = \{(j,k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2 : j=0,\ldots,m,\ |k_1|\leq 2^j, |k_2|\leq 2^{m-j}, |k_1||k_2|\leq 2^m\}. \quad (5)$$

Außerdem ist $|k_1|\leq 2^j$ äquivalent zu

$$\log_2|k_1|\leq j$$

Daher ist

$$\begin{aligned} Z(m) = \{&(j,k_1,k_2)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}^2 : |k_1|\leq 2^m, \\ &\max(0,\log_2|k_1|)\leq j\leq m,\ |k_2|\leq 2^{m-j}, |k_1||k_2|\leq 2^m\}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt die Äquivalenz

$$|k_2|\leq 2^{m-j} \Longleftrightarrow j\leq m-\log_2|k_2|.$$

Damit können wir $Z(m)$ schreiben als

$$\begin{aligned} Z(m) = \{&(j,k_1,k_2)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}^2 : |k_1|\leq 2^m,\ ;|k_2|\leq 2^m, \\ &j\in I(m,k_1,k_2), |k_1||k_2|\leq 2^m\}, \end{aligned}$$

wobei

$$I(m,k_1,k_2) := \{j\in\mathbb{N}_0 : \max(0,log|k_1|)\leq j\leq \min(m,m-log|k_2|)\}$$

bezeichnet. Damit können wir umordnen zu

$$\begin{aligned} C_1 g(x,y) &= \sum_{|k_1|\le 2^m} \sum_{\substack{|k_2|\le 2^m \\ |k_1||k_2|\le 2^m}} \Bigg(\sum_{j\in I(m,k_1,k_2)} \\ &\quad \times c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+(2^{m-j+1}+1)}(g) \Bigg) e^{i(k_1x+k_2y)}. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Definition der Norm in $H^1(\mathbb{T}^2)$ an und erhalten

$$\|C_1 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2 = \sum_{|k_1|\le 2^m} \sum_{\substack{|k_2|\le 2^m \\ |k_1||k_2|\le 2^m}}$$

$$\times \Bigg| \sum_{j\in I(m,k_1,k_2)} c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g) \Bigg|^2 (1+k_1^2+k_2^2).$$

Nach Anwendung der Dreiecksungleichung und der Hölderschen-Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\|C_1 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2 \le \sum_{|k_1|\le 2^m} \sum_{\substack{|k_2|\le 2^m \\ |k_1||k_2|\le 2^m}} |I(m,k_1,k_2)|$$

$$\times \sum_{j\in I(m,k_1,k_2)} |c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)|^2 (1+k_1^2+k_2^2).$$

Wir sehen, dass wir wieder über $Z(m)$ summieren und schreiben daher

$$\begin{aligned} \|C_1 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2 &\le \sum_{(j,k_1,k_2)\in Z(m)} |c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)|^2 \\ &\quad \times |I(m,k_1,k_2)|(1+k_1^2+k_2^2). \end{aligned}$$

Nun fügen wir einen Faktor mit Wert 1 ein und schätzen ab zu

$$\begin{aligned} &\|C_1 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2 \\ &\le \sup_{(j,k_1,k_2)\in Z(m)} \frac{|I(m,k_1,k_2)|(1+k_1^2+k_2^2)}{(1+|k_1+l_1(2^{j+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}} \\ &\times \sum_{(j,k_1,k_2)\in Z(m)} |c_{k_1+l_1(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}(g)|^2 \\ &\times (1+|k_1+l_1(2^{j+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}. \end{aligned}$$

Anschließend klären wir, wie oft der gleiche Summand

$$|c_{k_1+l_2(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}|^2(1+|k_1+l_2(2^{j+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s} \quad (6)$$

für unterschiedliche Paare $(j, k_1, k_2) \in Z(m)$ auftauchen kann. Es geht also darum zu klären, wieviele zulässige Paare $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ existieren mit

$$k_i + l_i(2^{j+1} + 1) = \tilde{k}_i + l_i(2^{\tilde{j}+1} + 1),\ i = 1, 2,$$

wo sich j und $\tilde{j}$ unterscheiden können, aber stets

$$(j, k_1, k_2), (\tilde{j}, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \in Z(m)$$

gilt. Sei nun $(k_1, k_2) \neq (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ und $|l_1|, |l_2| \geq 1$ (fest). Wir suchen Lösungen $(j, k_1, k_2), (\tilde{j}, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \in Z(m)$ des folgenden Gleichungssystems

$$k_1 + l_1(2^{j+1} + 1) \quad = \quad \tilde{k}_1 + l_1(2^{\tilde{j}+1} + 1) \tag{7}$$

$$k_2 + l_2(2^{j+1} + 1) \quad = \quad \tilde{k}_2 + l_2(2^{m-\tilde{j}+1} + 1). \tag{8}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $m \geq \tilde{j} \geq j$ und $\tilde{j} = j + n$. Zunächst führen wir eine Fallunterscheidung in n durch.

Fall 1: Sei $n = 0$.

Dann gilt

$$l_1(2^{j+1} + 1) = l_1(2^{\tilde{j}+1} + 1)$$

und

$$l_2(2^{m-j+1} + 1) = l_2(2^{m-\tilde{j}+1} + 1).$$

Daraus folgt, dass $k_1 = \tilde{k}_1$ und $k_2 = \tilde{k}_2$ gilt. Also existiert in diesem Fall keine Lösung des Gleichungssystems mit $(k_1, k_2) \neq (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$.

Fall 2: Sei $n \neq 0$.

Es ist

$$k_1 - \tilde{k}_1 = l_1(2^{j+1} - 2^{\tilde{j}+}) = l_1(2^{j+1} - 2^{j+n+1}),$$

sowie

$$k_2 - \tilde{k}_2 = l_2(2^{m-j+1} - 2^{m-\tilde{j}+1}) = l_2(2^{m-j+1} - 2^{m-j+n+1}).$$

Außerdem gilt für $(k_1, k_2, j), (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, j + n) \in Z(m)$

$$|k_1 - \tilde{k}_1| \leq |k_1| + |\tilde{k}_1| \leq 2^j + 2^{j+n}$$

und

$$|k_2 - \tilde{k}_2| \leq |k_2| + |\tilde{k}_2| \leq 2^{m-j} + 2^{m-j+n}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & |l_1(2^{j+1} - 2^{j+n+1})| \leq 2^j + 2^{j+n} \\ \iff \quad & |l_1||(2^{n+1} - 2)| \leq 2^n + 1 \\ \iff \quad & |l_1| \leq \frac{2^n + 1}{2^{n+1} - 2}. \end{aligned}$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
& |l_2(2^{m-j+1} - 2^{m-j+n+1})| \leq 2^{m-j} + 2^{m-j+n} \\
\iff \quad & |l_2| \leq \frac{2^n + 1}{2^{n+1} - 2}.
\end{aligned}
$$

Für $n = 1$ gilt somit

$$|l_1|, |l_2| \leq \frac{3}{2} < 2$$

sowie für $n = 2$

$$|l_1|, |l_2| \leq \frac{5}{6} < 1.$$

Ebenso gilt aufgrund der strengen Monotonie von $\frac{2^n+1}{2^{n+1}-2}$ für $n > 2$

$$|l_1|, |l_2| < 1.$$

Daher können wir unsere weitere Untersuchung auf die Fälle $n = 1$ mit $|l_1| = |l_2| = 1$, sowie $n \geq 2$ mit $l_1 = l_2 = 0$ beschränken. Der zweite Fall ist uninteressant, da wir lediglich bei der Untersuchung des C-Terms $l_1, l_2 \neq 0$ benötigen. Zum Abschluss des Beweisschrittes genügt es also, den Fall $n = 1$ und $|l_1|, |l_2| = 1$ zu betrachten. Sei zunächst $l_1 = 1$. Es gilt

$$k_1 + 2^{j+1} + 1 = \tilde{k}_1 + 2^{\tilde{j}+1} + 1 = \tilde{k}_1 + 2^{j+2} + 1.$$

Dann ist

$$k_1 - \tilde{k_1} = 2^{j+1} - 2^{j+2} = -2^{j+1}.$$

Es ist zum Beispiel $k_1 = 0$ und $\tilde{k_1} = 2^{j+1}$ eine Lösung von (7). Sämtliche Lösungen von (7) erhält man mit

$$k_1 = u_1 \quad und \quad \tilde{k_1} = u_1 + 2^{j+1}$$

für $u_1 = -2^j, \ldots, 0$.

Sei nun n=1 und $l_1 = -1$. Dann gilt

$$k_1 - 2^{j+1} - 1 \quad = \quad \tilde{k}_1 - 2^{j+2} - 1 \iff \tilde{k}_1 = k_1 + 2^{j+1}.$$

Alle Lösungen von (7) erhält man durch

$$k_1 = u_2 \quad und \quad \tilde{k}_1 = u_2 - 2^{j+1}$$

für $u_2 = 0, \ldots, 2^j$. Als Lösungen von (8) erhält man vollkommen analog im Fall $l_2 = 1$

$$k_2 = q_2 \quad und \quad \tilde{k_2} = q_2 + 2^{m-j+1}$$

für $q_1 = -2^{m-j}, \ldots, 0$, sowie im Fall $l_2 = -1$

$$k_2 = q_2 \; und \; \tilde{k}_2 = q_2 - 2^{m-j+1}$$

für $q_2 = 0, \ldots, 2^{m-j}$. Damit können wir schlussfolgern, dass in allen relevanten Fällen höchstens eine Lösung mit $(k_1, k_2) \neq (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ für das Gleichungssystem existiert. Somit kann jeder Summand (6) höchstens doppelt in der Summierung vorkommen. Daher können wir die folgende Abschätzung vornehmen

$$\begin{aligned}
&\sum_{(j,k_1,k_2)\in Z(m)} |c_{k_1+l_2(2^{j+1}+1),k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)}|^2(1+|k_1+l_2(2^{j+1}+1)|)^{2s} \\
&\times(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s} \\
&\leq 2 \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{Z}^2} |c_{\omega_1,\omega_2}(f)|^2(1+|\omega_1|)^{2s}(1+|\omega_2|)^{2s} \\
&\leq 2\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2.
\end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$|I(m,k_1,k_2)| = [1+\min(m-\log_2|k_2|, m|) - \max(0, \log_2|k_1|)].$$

Nun können wir die Abschätzung von $\|C_1 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)|$ fortsetzen zu

$$\|C_1 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq S_5(l_1,l_2)\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2$$

mit

$$\begin{aligned}
S_5(l_1,l_2) \;:=\; & \sup_{(j,k_1,k_2)\in Z(m)} \\
& \frac{[1+\min(m-\log_2|k_2|, m|) - \max(0,\log_2|k_1|)](1+k_1^2+k_2^2)}{(1+|k_1+l_1(2^{j+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}} \\
=\; & \sup_{0\leq j\leq m}\ \sup_{|k_1|\leq 2^j}\ \sup_{|k_2|\leq 2^{m-j}} \\
& \frac{[1+\min(m-\log_2|k_2|, m) - \max(0,\log_2|k_1|)](1+k_1^2+k_2^2)}{(1+|k_1+l_1(2^{j+1}+1)|)^{2s}(1+|k_2+l_2(2^{m-j+1}+1)|)^{2s}}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $S_5(l_1,l_2)$. Zunächst können wir wieder den Nenner abschätzen zu

$$\begin{aligned}
S_5(l_1,l_2) \;\leq\; & \sup_{0\leq j\leq m}\ \sup_{|k_1|\leq 2^j}\ \sup_{|k_2|\leq 2^{m-j}} \\
& \frac{[1+\min(m-\log_2|k_2|, m) - \max(0,\log_2|k_1|)](1+k_1^2+k_2^2)}{(2|l_1|-1)^{2s}(2|l_1|-1)^{2s}2^{2ms}}.
\end{aligned}$$

Da lediglich die Indexmenge noch von j abhängt, können wir diese vergrößern und erhalten

$$S_5(l_1, l_2) \leq \sup_{|k_1| \leq 2^m} \sup_{\substack{|k_2| \leq 2^m \\ |k_1||k_2| \leq 2^m}} \frac{[1 + \min(m - \log_2 |k_1|, m) - \max(0, \log_2 |k_1|)](1 + k_1^2 + k_2^2)}{(2|l_1| - 1)^{2s}(2|l_1| - 1)^{2s} 2^{2ms}}.$$

Nun betrachten wir den Zähler. Wir unterscheiden die folgenden Fälle

$k_1 = 0$ und $k_2 = 0$:

$$[1 + m] \leq 2^{2m}$$

$k_1 = 0$ und $k_2 \neq 0$:

$$[1 + m - \log_2 |k_2|](1 + k_2^2) \leq 2 \cdot 2^{2m}$$

$k_1 \neq 0$ und $k_2 = 0$:

$$[1 + m - \log_2 |k_1|](1 + k_1^2) \leq 2 \cdot 2^{2m}.$$

Für den Fall $k_1 \neq 0$ und $k_2 \neq 0$ sei $i_1, i_2 \in \{0, \ldots, m - 1\}$ mit $i_2 + i_2 \leq m - 2$, so dass

$$2^{i_1} \leq |k_1| \leq 2^{i_1+1} \tag{9}$$

und

$$2^{i_2} \leq |k_2| \leq 2^{i_2+1}$$

gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} [1 + m - \log_2 |k_1 k_2|](1 + k_1^2 + k_2^2) &\leq [1 + m - (i_1 + i_1)](1 + 2^{2i_1+2} + 2^{2i_2+2}) \\ &\leq 12[1 + m - (i_1 + i_1)]2^{2(i_1+i_2)}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun Extremstellen der Funktion

$$h(x) = (1 + m - x)2^{2x}$$

im Intervall $x \in [0, m]$. Offenbar ist

$$h(0) = (1 + m)$$

und

$$h(m) = 2^{2m}.$$

Offensichtlich gilt

$$h'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = m + 1 - \frac{1}{2ln(2)} > m.$$

Also existiert ein $K_1 > 0$ mit

$$S_5(l_1, l_2) \leq \frac{K_1}{(2|l_1| - 1)^{2s}(2|l_1| - 1)^{2s} 2^{2m(s-1)}}.$$

Daher gilt

$$\|C_1 g(x, y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{\sqrt{K_1}}{(2|l_1| - 1)^s(2|l_1| - 1)^s 2^{m(s-1)}} \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

Nun betrachten wir

$$C_2 g(x, y) \;=\; \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|k_1| \leq 2^j} \sum_{|k_2| \leq 2^{m-j-1}} c_{k_1 + l_1(2^{j+1}+1), k_2 + l_2(2^{m-j}+1)}(g) e^{i(k_1 x + k_2 y)}.$$

Offenbar handelt es sich bei der Menge der Summationsindizes um $Z(m-1)$. Damit können wir $C_2 g(x, y)$ schreiben als

$$\begin{aligned} C_2 g(x, y) &= \sum_{(j, k_1, k_2) \in Z(m-1)} c_{k_1 + l_1(2^{j+1}+1), k_2 + l_2(2^{m-j}+1)}(g) e^{i(k_1 x + k_2 y)} \\ &= \sum_{|k_1| \leq 2^{m-1}} \sum_{\substack{|k_2| \leq 2^{m-1} \\ |k_1||k_2| \leq 2^{m-1}}} \sum_{j \in I(m-1, k_1, k_2)} c_{k_1 + l_1(2^{j+1}+1), k_2 + l_2(2^{m-j}+1)}(g) \\ &\quad \times e^{i(k_1 x + k_2 y)}. \end{aligned}$$

Die Norm $\|C_2 g(x, y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|$ kann analog zu $\|C_1 g(x, y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|$ (mit $m - 1$ anstatt von m) abgeschätzt werden durch

$$\|C_2 g(x, y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq S_6(l_1, l_2) \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2$$

mit

$$\begin{aligned} S_6(l_1, l_2) &:= \sup_{(j, k_1, k_2) \in Z(m-1)} \\ &\quad \frac{[1 + \min(m - 1 - \log_2|k_2|, m - 1) - \max(0, \log_2|k_1|)](1 + k_1^2 + k_2^2)}{(1 + |k_1 + l_1(2^{j+1} + 1)|)^{2s}(1 + |k_2 + l_2(2^{m-j} + 1)|)^{2s}} \\ &= \sup_{0 \leq j \leq m-1} \sup_{|k_1| \leq 2^j} \sup_{|k_2| \leq 2^{m-1-j}} \\ &\quad \frac{[1 + \min(m - 1 - \log_2|k_2|, m - 1) - \max(0, \log_2|k_1|)](1 + k_1^2 + k_2^2)}{(1 + |k_1 + l_1(2^{j+1} + 1)|)^{2s}(1 + |k_2 + l_2(2^{m-j} + 1)|)^{2s}}. \end{aligned}$$

Aus der Berechnung von $S_5(l_1,l_2)$ ist bekannt, dass ein $K_2^*>0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned}
S_6(l_1,l_2) &\leq \frac{K_2^*}{(2|l_1|-1)^{2s}(2|l_2|-1)^{2s}2^{2(m-1)(s-1)}} \\
&= \frac{2^2(s-1)K_2^*}{(2|l_1|-1)^{2s}(2|l_2|-1)^{2s}2^{2m(s-1)}}
\end{aligned}$$

gilt. Wir setzen nun $K_2^s = 2^{2(s-1)}K_2^*$ und erhalten die Abschätzung

$$\|C_2 g(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{\sqrt{K_2^s}}{(2|l_1|-1)^s(2|l_1|-1)^s 2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

Wir können die Abschätzung des C-Terms beenden durch

$$\|Cg(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{C_3^s}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

mit

$$\begin{aligned}
C_3^s := \sum_{|l_1|>0}\sum_{|l_2|>0}\Big[&\frac{\sqrt{K_1}}{(2|l_1|-1)^s(2|l_2|-1)^s} \\
&+\frac{\sqrt{K_2^s}}{(2|l_1|-1)^s(2|l_1|-1)^s}\Big].
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich wieder um eine verallgemeinerte harmonische Reihe, für die bekannt ist, dass sie für $s>1$ konvergiert. Also gilt $C_3^s<\infty$.

Schritt 5:

Die Abschätzung von Dg folgt trivialerweise als

$$\begin{aligned}
\|Dg|H^1(\mathbb{T}^2)\| &= \Big\|\sum_{j=0}^{m}\sum_{|k_1|\leq 2^j}\sum_{|k_2|\leq 2^{m-j}} c_{k_1,k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)} \\
&- \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|k_1|\leq 2^j}\sum_{|k_2|\leq 2^{m-j-1}} c_{k_1,k_2}(g)e^{i(k_1x+k_2y)}\Big|H^1(\mathbb{T}^2)\Big\| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $(k_1,k_2)\in H(m)$ und somit jeweils $c_{k_1,k_2}(g)=0$ gilt. Wir können nun unter Verwendung von Satz 4 fortsetzen mit

$$\|g|H^1(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{D_s}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

für ein $D_s > 0$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f - B_m f | H^1(\mathbb{T}^2)\| &\leq \|g|H^1(\mathbb{T}^2)\| + \|B_m(g)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \\
&\leq \left(\frac{D_s}{2^{m(s-1)}} + \underbrace{\max\{C_1^s, C_2^s, C_3^s\}}_{=:C_s^*} \frac{3}{2^{m(s-1)}} \right) \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \\
&\leq C_s \frac{4}{2^{m(s-1)}} \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|
\end{aligned}$$

mit $C_s := \max\{C_s^*, D_s\}$. Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Wir möchten nun eine untere Schranke für die Approximationsrate berechnen. Dazu betrachten wir für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq u \leq m-1$ die Folge von Testfunktionen

$$f_m(x,y) := e^{i(2x+2^m)y}.$$

Lemma 21. *Es gilt für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq u \leq m-1$*

$$B_m f_m(x,y) = e^{-ix} e^{i2^m y} + \left(e^{i2x} - e^{-ix}\right) e^{-iy}.$$

Beweis. Wir wollen die Fourierreihe von $B_m f_m(x,y)$ berechnen. Zuerst bemerken wir, dass aufgrund der Reproduktionseigenschaft (siehe (5))

$$\Delta_j(I)(e^{i2x}) = 0 \qquad \text{falls} \quad j > 1,$$

gilt. Folglich ist

$$\begin{aligned}
B_m f(x,y) &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} \Big(\Delta_j(I)\,(e^{i2x})\Big) \cdot \Big(\Delta_k(I)(e^{i2^m y})\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{m-j} \Big(\Delta_j(I)\,(e^{i2x})\Big) \cdot \Big(\Delta_k(I)(e^{i2^m y})\Big) \\
&= \Big(\Delta_0(I)\,(e^{i2x})\Big) \sum_{k=0}^{m} \cdot \Big(\Delta_k(I)(e^{i2^m y})\Big) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m-1} \Big(\Delta_1(I)\,(e^{i2x})\Big) \cdot \Big(\Delta_k(I)(e^{i2^m y})\Big).
\end{aligned}$$

Aufgrund ihres Teleskopsummencharakters kann man die einzelnen Summen nun leicht auswerten. Es ist

$$\begin{aligned}
\Big(\Delta_0(I)\,(e^{i2x})\Big) &= I_1(e^{i2x})\,; \\
\Big(\Delta_1(I)\,(e^{i2x})\Big) &= I_2(e^{i2x}) - I_1(e^{i2x}) = e^{i2x} - I_1(e^{i2x})\,; \\
\sum_{k=0}^{m} \Delta_k(I)(e^{i2^m y}) &= I_{2^m}(e^{i2^m y}) = e^{i2^m y}\,; \\
\sum_{k=0}^{m-1} \Delta_k(I)(e^{i2^m y}) &= I_{2^m}(e^{i2^m y})\,.
\end{aligned}$$

Es bleiben Terme der Form $I_{2^{u-1}}(e^{i2^u x})$ auszuwerten. Wir verwenden Lemma 6. Für $|k| \leq 2^{u-1}$ ist

$$c_k(I_{2^{u-1}}(e^{i2^u x})) = \sum_{w=-\infty}^{\infty} c_{k+w(2^u+1)}(e^{i2^u x})\,.$$

Demzufolge interessieren wir uns für alle ganzzahligen Lösungen w der Gleichung

$$k + w(2^u + 1) = 2^u\,.$$

Ist $w = 0$, dann existiert offensichtlich keine Lösung auf Grund der Einschränkung an k. Ist $|w| \geq 2$, dann folgt

$$|k + w(2^u + 1)| \geq 2\,(2^u + 1) - 2^{u-1} > 2^u\,.$$

Also bleiben nur noch $w = \pm 1$ zu untersuchen. Für $w = 1$ erhalten wir

$$k + 2^u + 1 = 2^u \qquad \Longleftrightarrow k = -1\,,$$

für $w = -1$ erhalten wir

$$k - 2^u - 1 = 2^u \qquad \Longleftrightarrow k = 2^{u+1} + 1\,,$$

was in Widerspruch zu unserer Restriktion bzgl. k steht. Für jedes Paar (k, u) gibt es also genau eine Lösung w. Damit erhalten wir

$$I_{2^{u-1}}(e^{i2^u x}) = e^{-ix} \qquad \text{für jedes} \quad u \geq 1\,.$$

Einsetzen liefert

$$B_m f(x, y) = e^{-ix}\, e^{i2^m y} + (e^{i2x} - e^{-ix})\, e^{-iy}\,.$$

$\square$

Lemma 22. *Es gilt für $s > 1$*

$$\|f_m - B_m f_m(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp 2^m$$

und

$$\|f_m - B_m f_m(x,y)|H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp 2^m.$$

Außerdem ist

$$\|f_m(x,y)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp 2^{ms}.$$

Beweis. Es ist mit Lemma 21

$$\|f_m - B_m f_m(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\| = \|e^{i(2x+2^m y)} - e^{-ix}\, e^{i2^m y} - (e^{i2x} - e^{-ix})\, e^{-iy}|H^1(\mathbb{T}^2)\|.$$

Wenden wir nun die Definition der Norm in $H^1(\mathbb{T}^2)$ an so gilt

$$\|f_m - B_m f_m(x,y)|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2 \;=\; 2 \cdot 2^{2m} + 16 \asymp 2^{2m}.$$

Analog dazu ist

$$\begin{aligned}\|f_m - B_m f_m(x,y)|H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 &= \|e^{i(2x+2^m y)} - e^{-ix}\, e^{i2^m y} - (e^{i2x} - e^{-ix}) \\ &\quad \times e^{-iy}|H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \\ &= 9(1+2^m)^2 + 4(1+2^m)^2 + 52 \asymp 2^{2m}.\end{aligned}$$

Die $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$-Norm von f_m berechnen wir als

$$\|f_m(x,y)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \;=\; (1+2)^{2s}(1+2^m)^{2s} \asymp 2^{2ms}.$$

Dies schließt die Berechnung ab.

□

Folgerung 8. *Für $s > 1$ existieren Konstanten $A_1^s, A_2^s > 0$, so dass*

$$\frac{A_1^s}{2^{m(s-1)}} \le \frac{\|f_m - B_m f_m|H^1(\mathbb{T}^2)\|}{\|f_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|} \le \|id - B_m|H^s_{mix} \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \le \frac{A_2^s}{2^{m(s-1)}}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Weiterhin sei rank $(B_m) \le n <$ rank (B_{m+1}) für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 21$. Dann gilt

$$\|id - B_m|H^s_{mix} \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Beweis. Die obere Schranke der ersten Ungleichung folgt aus Theorem 5. Die untere Schranke folgt unmittelbar aus Lemma 22. Außerdem gilt

$$\operatorname{rank}(B_m) \asymp \operatorname{rank}(S_m^H).$$

Damit kann die zweite Gleichung analog zu Folgerung 7 bewiesen werden. □

Zusammenfassend stellen wir in diesem Kapitel fest, dass die Approximationsraten bezüglich der orthogonalen Projektion auf die trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem hyperbolische Kreuz S_m^H und unserem Sampling-Operator B_m asymptotisch gleichwertig sind.

7 Die Approximation in $H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)$

Wir haben bei den Abschätzungen im vorhergehenden Kapitel den Eindruck gewonnen, dass elementare Modifikationen der für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1(\mathbb{T}^2))$ erbrachten Resultate zu Resultaten für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1_{mix}(\mathbb{T}^2))$ führen. Aus diesem Grund möchten wir nachfolgend explizit auf den Fall, bei dem der Approximationsfehler in $H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)$ gemessen wird, eingehen.

Satz 6. *Für $s > 1$ existiert ein $C_s > 0$, so dass*

$$\|f - S^H_m f | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{C_s}{2^{m(s-1)}} \|f | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

gilt.

Beweis. Sei $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$. Mit der äquivalenten Norm aus Lemma 11 ist

$$\|f - S^H_m(f) | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \asymp \sum_{k_1+k_2>m} 2^{2|k|_1} \|\delta_k(f)\|_2^2.$$

Dies können wir folgendermaßen abschätzen

$$\|f - S^H_m(f) | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \lesssim \sup_{k_1+k_2>m} 2^{2|k|_1(1-s)} \sum_{k_1+k_2>m} 2^{2s|k|_1} \|\delta_k(f)\|_2^2.$$

Nun gilt

$$\sup_{k_1+k_2>m} 2^{2|k|_1(1-s)} \leq 2^{2m(1-s)}.$$

Außerdem ist mit Lemma 11

$$\sum_{k_1+k_2>m} 2^{2s|k|_1} \|\delta_k(f)\|_2^2 \lesssim \|f | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

Damit lässt sich der Beweis abschließen zu

$$\|f - S^H_m(f) | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2 \lesssim 2^{2m(1-s)} \|f | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2.$$

□

Folgerung 9. *Sei $s > 1$. Dann existieren Konstanten $A^s_1, A^s_2 > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$*

$$\frac{A^s_1}{2^{m(s-1)}} \leq \frac{\|f_m - S^H_m f_m | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|}{\|f_m | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|} \leq \|id - S^H_m | H^s_{mix} \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{A^s_2}{2^{m(s-1)}}$$

gilt. Weiterhin sei rank $(S^H_m) \leq n <$ rank (S^H_{m+1}). Dann gilt

$$\|id - S^H_m | H^s_{mix} \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 21$.

Beweis. Die obere Schranke der ersten Ungleichung folgt aus Theorem 4 und die untere Schranke aus Lemma 21. Die zweite Gleichung kann analog zu Folgerung 7 bewiesen werden. □

Satz 7. *Für jedes $s > 1$ existiert ein $C_s > 0$, sodass für jedes $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ und $m \in \mathbb{N}_0$*

$$\|f - B_m f | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{C_s}{2^{m(s-1)}} \|f | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

gilt.

Beweis. Da $\mathcal{T}^2_s$ dicht in $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ liegt, genügt es trigonometrische Polynome f zu betrachten. Zunächst fügen wir die Fourierpartialsumme bzgl. des hyperbolischen Kreuzes ein und wenden die Dreiecksungleichung an

$$\begin{aligned}\|f - B_m f | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| &= \|f - S^H_m(f) + S^H_m(f) - B_m f | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \\ &\leq \|f - S^H_m(f) | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| + \|S^H_m(f) - B_m f | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.\end{aligned}$$

Mit der aus Lemma 17 bekannten Reproduktionseigenschaft gilt

$$|f - B_m f | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)| \leq \|\underbrace{f - S^H_m(f)}_{=:g} | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| + \|B_m(f - S^H_m(f)) | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

Den ersten Term können wir mittels Satz 6 abschätzen zu

$$\|f - S^H_m(f) | H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{C^s_1}{2^{m(s-1)}} \|f | H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

für ein entsprechendes $C^s_1 > 0$. Zur Abschätzung des zweiten Terms betrachten wir den Beweis von Satz 5 und ersetzen in jedem Beweisschritt das Gewicht $(1+k_1^2+k_2^2)$ durch $(1+|k_1|)^2(1+|k_2|)^2$. Dabei stellen wir fest, dass die erfolgte Zerlegung der Fourierreihe sinnvoll bleibt und lediglich der Zähler der Suprema-Terme S_1 bis S_6 mit neuem Gewicht nachgerechnet werden muss. Für die Terme S_1 bis S_4 erfolgte stets für zulässige (k_1, k_2) aus Teilmengen von $H(m)$ die Abschätzung als

$$\sup_{(k_1,k_2) \in H(m)} (1 + k_1^2 + k_2^2) \leq 3 \cdot 2^m.$$

Analog kann die Abschätzung mit modifizierten Gewicht erfolgen als

$$\sup_{(k_1,k_2) \in H(m)} (1 + |k_1|)^2 (1 + |k_2|)^2 \leq 16 \cdot 2^m,$$

was bis auf eine andere absolute Konstante keinen Unterschied macht. Für die Terme S_5 und S_6 erfolgte die Abschätzung des Zählers durch eine Fallunterscheidung. Da für $k_1 = 0$ oder $k_2 = 0$

$$(1 + k_1^2 + k_2^2) \asymp (1 + |k_1|)^2 (1 + |k_2|)^2$$

gilt, müssen wir nur den Fall $|k_1| > 0$ und $|k_2| > 0$ betrachten. Dazu greifen wir das Setting von (9) auf. Das heißt wir nehmen an, dass ein $i_1, i_2 \in \{0, \ldots, m-1\}$ existiert, mit $i_2 + i_2 \leq m - 2$, so dass

$$2^{i_1} \leq |k_1| \leq 2^{i_1+1}$$

und

$$2^{i_2} \leq |k_2| \leq 2^{i_2+1}$$

gilt. Damit erfolgte im Fall von $H^1(\mathbb{T}^2)$ die Abschätzung als

$$\begin{aligned}[1 + m - log|k_1 k_2|](1 + k_1^2 + k_2^2) &\leq [1 + m - (i_1 + i_2)](1 + 2^{2i_1+2} + 2^{2i_2+2}) \\ &\leq 12[1 + m - (i_1 + i_2)](2^{2(i_1+i_2)}).\end{aligned}$$

Dies modifizieren wir im $H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)$-Fall zu

$$\begin{aligned}[1 + m - log|k_1 k_2|](1 + |k_1|)^2(1 + |k_2|)^2 &\leq [1 + m - (i_1 + i_2)] \\ &\quad \times(1 + 2^{i_1+1})^2(1 + 2^{i_2+1})^2 \\ &\leq 256[1 + m - (i_1 + i_2)](2^{2(i_1+i_2)}).\end{aligned}$$

Und wir sehen, dass auch hier sich lediglich die absolute Konstante ändert. Also existiert ein $C_2^s > 0$ mit

$$\|B_m g|H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{C_2^s}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.$$

Zusammenfassend ist

$$\|f - B_m f|H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{C_s}{2^{m(s-1)}}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

mit

$$C_s = 2\max(C_1^s, C_2^s).$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Folgerung 10. *Für $s > 1$ existieren Konstanten $A_1^s, A_2^s > 0$, so dass*

$$\frac{A_1^s}{2^{m(s-1)}} \leq \frac{\|f_m - B_m f_m|H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|}{\|f_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|} \leq \|id - B_m|H^s_{mix} \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \leq \frac{A_2^s}{2^{m(s-1)}}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Weiterhin sei rank $(S_m^H) \leq n <$ rank (S_{m+1}^H) für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 21$. Dann gilt

$$\|id - B_m|H^s_{mix} \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Beweis. Die obere Schranke der ersten Ungleichung folgt aus Theorem 7. Die untere Schranke der ersten Ungleichung folgt unmittelbar aus Lemma 20. Außerdem gilt

$$\text{rank}\ (B_m) \asymp \text{rank}\ (S_m^H).$$

Damit kann die zweite Gleichung analog zu Folgerung 7 bewiesen werden. □

Wir stellen fest, dass auch in dieser Raumkonfiguration die Approximationsraten für den Smolyak-Algorithmus, angewandt auf die klassische trigonometrische Interpolation, und den Smolyak-Algorithmus, angewandt auf die Fourier-Partialsumme, asymptotisch gleichwertig sind. Nun möchten wir die Güte dieser Approximation mit der Approximationszahl der Einbettung für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1_{mix}(\mathbb{T}^2))$ vergleichen. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Approximationszahl ein.

Definition 11. *Seien X und Y Banachräume und $T : X \longrightarrow Y$ ein stetiger linearer Operator. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}_0$ die n-te Approximationszahl von T als*

$$a_n(T) = \inf\{\|T - S\| : \ S : X \longrightarrow Y \textit{ linear und stetig},\ \textit{rank}\ (S) \leq n\}.$$

Wir benötigen die folgende Eigenschaft der Approximationszahlen.

Lemma 23. *Seien W,X,Y und Z Banachräume, sowie $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(W, X)$. Dann gilt*

$$a_n(RTS) \leq \|R\| a_n(T) \|S\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Das Resultat finden wir in [13, Seite 42]. □

Satz 8. *Sei $s > 0$. Dann gilt*

$$a_n(id_{H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}) = a_n(id_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)})$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Zunächst definieren wir für $s \geq 0$ einen Lift-Operator

$$L : \ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(f) e^{ikx} \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \frac{c_k(f)}{(1 + |k_1|)(1 + |k_2|)} e^{ikx} \in H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2).$$

Nun zeigen wir, dass es sich dabei um eine Isometrie handelt. Sei

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(f) e^{ikx} \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2).$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\|Lf|H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\| &= \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{c_k(f)}{(1+|k_1|)(1+|k_2|)} e^{ikx} \Big| H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2) \Big\| \\
&= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{|c_k(f)|^2}{(1+|k_1|)^2(1+|k_2|)^2} (1+|k_1|)^{2s+2}(1+|k_2|)^{2s+2} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|.
\end{aligned}
$$

Damit existiert der inverse Operator L^{-1} und es gilt

$$\|L\| = \|L^{-1}\| = 1.$$

Mit Hilfe von L können wir folgendes Abbildungsdiagramm

$$
\begin{tikzcd}
H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, "L"] & L_2(\mathbb{T}^2) \\
H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "\mathrm{id}_2"] & H^1_{mix}(\mathbb{T}^2) \arrow[u, "L^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

aufstellen. Offensichtlich gelten nachfolgende Operatoridentitäten

$$\mathrm{id}_1 := \mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)} = L \circ \mathrm{id}_{H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)} \circ L^{-1}$$

und

$$\mathrm{id}_2 := \mathrm{id}_{H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)} = L^{-1} \circ \mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)} \circ L.$$

Nun nutzen wir die aus Lemma 23 bekannte Multiplikationseigenschaft der n-ten Approximationszahl für $n \in \mathbb{N}$ und erhalten die Ungleichungskette

$$
\begin{aligned}
a_n(\mathrm{id}_{H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}) &= a_n(L^{-1} \circ \mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)} \circ L) \\
&\leq \|L^{-1}\| a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)}) \|L\| \\
&= a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)}) \\
&= a_n(L \circ \mathrm{id}_{H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)} \circ L^{-1}) \\
&\leq \|L\| a_n(\mathrm{id}_{H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}) \|L^{-1}\| \\
&= a_n(\mathrm{id}_{H^{s+1}_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}).
\end{aligned}
$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Satz 9. *Sei $s > 0$. Es gilt*

$$a_n(id_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow L_2(\mathbb{T}^2)}) \asymp \frac{(\log_2 n)^s}{n^s}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Einen Beweis finden wir in [9, Theorem 4.4]. □

Folgerung 11. *Sei $s > 1$. Dann gilt*

$$a_n(id_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}) \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Das Resultat folgt unmittelbar aus den Sätzen 8 und 9. □

Satz 10. *Sei $s > 1$ und rank $(B_m) \leq n <$ rank (B_{m+1}). Dann gilt*

$$a_n(id_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}) \asymp \|I - B_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 21$.

Beweis. Den Beweis erhalten wir aus Folgerung 10 und Folgerung 11. □

Bemerkung 5. *Das heißt, wir erhalten in dieser Raumkonfiguration mit dem Smolyak-Algorithmus, angewandt auf die klassische trigonometrische Interpolation, einen Abtastoperator, mit dem wir asymptotisch optimal zur Approximationszahl der zugehörigen Einbettung approximieren können.*

8 Ein modifizierter Algorithmus

In diesem Kapitel betrachten wir eine Modifikation des Smolyak-Algorithmus. Dabei möchten wir den Fall betrachten, in dem der Approximationsfehler in $H^1(\mathbb{T}^2)$ gemessen wird. Die Idee zur Einführung dieser Modifikation geht zurück auf M. Griebel und S. Knapek (siehe [6]). Wir betrachten nachfolgend einen speziellen Fall der Resultate von D. Dung und T. Ullrich (siehe [4]).

Aus technischen Gründen redefinieren wir in diesem Kapitel die Normen der Räume $H^s(\mathbb{T}^2)$ und $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ durch ihren aus Lemma 3 bzw. Lemma 11 bekannten äquivalenten Ersatz, das heißt wir benutzen für $s \geq 0$ die Räume $H^s(\mathbb{T}^2)$ und $H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ mit den Normen

$$\|f|H^s(\mathbb{T}^2)\|_* = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s|k|_\infty}\|\delta_k(f)\|_2^2\Big)^{1/2},$$

beziehungsweise

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_* = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0^2} 2^{2s|k|_1}\|\delta_k(f)\|_2^2\Big)^{1/2}.$$

Diese Änderungen sind technischer Natur und bewirken, bis auf (von s abhängige) Konstanten, keinerlei Einschränkungen beim Vergleich der Operatornormen und entsprechenden Approximationszahlen.

Definition 12. *Wir führen für $s > 1$ die Menge*

$$J_s(m) := \{k \in \mathbb{N}_0^2 : s|k|_1 - |k|_\infty \leq m\}$$

ein. Außerdem definieren für $s > 1$ die Menge

$$W_s(m) := \cup_{(k_1,k_2)\in J^s(m)} P_{k_1} \times P_{k_2}$$

als modifiziertes hyperbolisches Kreuz m-ter Ordnung mit Parameter s.

Lemma 24. *Sei $s > 1$, dann existiert ein $C_1^s > 0$, so dass*

$$|W_s(m)| \leq C_1^s 2^{\frac{m}{s-1}}$$

gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Gilt zusätzlich $m \geq 2(s-1)(2s-1)$, dann existiert ein $C_2^s > 0$ mit

$$C_2^s 2^{\frac{m}{s-1}} \leq |W_s(m)| \leq C_1^s 2^{\frac{m}{s-1}}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Offensichtlich gilt für $\ell \neq k \in \mathbb{N}_0^2$

$$P_\ell \cap P_k = \emptyset.$$

Außerdem ist

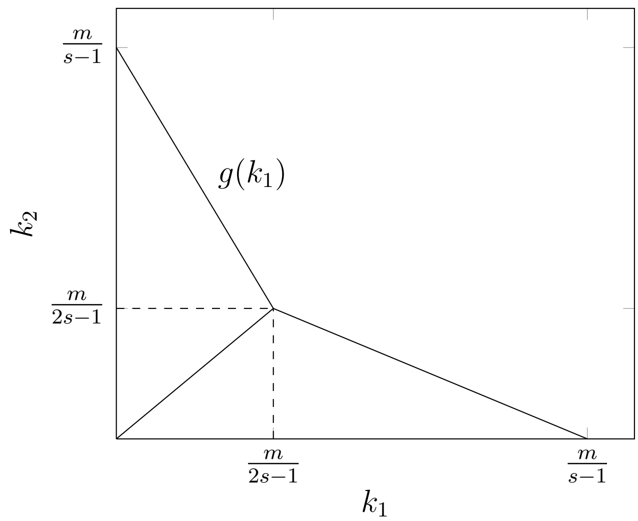
$$|P_k| = 2^{k_1+k_2}.$$

Sei $s > 1$. Wir erhalten die Kardinalität des modifizierten hyperbolischen Kreuzes durch Berechnung von

$$|W_s(m)| = \sum_{k\in J^s(m)} 2^{|k|_1}.$$

Zunächst definieren wir

$$g(x) := -\left(\frac{s}{s-1}\right)x + \frac{m}{s-1}.$$



Durch eine geeignete Zerlegung der Menge $J_s(m)$ und entsprechenden Symmetrieeigenschaften erhalten wir die Identität

$$|W_s(m)| \quad = \quad 2 \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} \sum_{k_2=k_1}^{[g(k_1)]} 2^{k_1+k_2} - \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{2k_1}, \tag{10}$$

wobei $[x] \in \mathbb{N}_0$ den ganzen Teil von x (mit $x-1 \leq [x] \leq x$) bezeichnet. Außerdem benutzen wir die Abschätzung

$$1 \leq \sum_{j=0}^{m} 2^{-jt} \leq \frac{2^t}{2^t - 1}, \ \forall m \geq 0, t > 0,$$

welche sich aus der Abschätzung gegen die unendliche geometrische Reihe ergibt.

1. Schritt: Abschätzung nach oben.

Mit Darstellung (10) ergibt sich

$$\begin{aligned} |W_s(m)| &\leq 2 \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{k_1} \sum_{k_2=k_1}^{[g(k_1)]} 2^{k_2} \\ &= 2 \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{k_1} 2^{[g(k_1)]} \underbrace{\sum_{l=0}^{[g(k_1)]-k_1} 2^{-l}}_{\leq 2} \\ &\leq 4 \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{k_1} 2^{-\left(\frac{s}{s-1}\right)k_1 + \frac{m}{s-1}} \\ &= 4 \cdot 2^{\frac{m}{s-1}} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{\left(1-\frac{s}{s-1}\right)k_1}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{\left(1-\frac{s}{s-1}\right)k_1} \leq \frac{2^{\frac{s}{s-1}}}{2^{\frac{s}{s-1}} - 1} =: C_s < \infty, \ s > 1.$$

Damit erhalten wir

$$W_s(m) \leq 4C_s 2^{\frac{m}{s-1}}.$$

2. Schritt: Abschätzung nach unten.

Offensichtlich gilt für die geometrische Reihe

$$\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{2k_1} = \frac{2^{2\left[\frac{m}{2s-1}\right]+2}-1}{3} \leq \frac{4}{3}2^{2\left[\frac{m}{2s-1}\right]}.$$

Damit ergibt sich aus (10)

$$\begin{aligned} |W_s(m)| &\geq 2\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{k_1}2^{[g(k_1)]} - \frac{4}{3}2^{2\left[\frac{m}{2s-1}\right]} \\ &\geq 2\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{k_1}2^{-\left(\frac{s}{s-1}\right)k_1+\frac{m}{s-1}-1} - \frac{4}{3}2^{2\left[\frac{m}{2s-1}\right]} \\ &= 2^{\frac{m}{s-1}} \underbrace{\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m}{2s-1}\right]} 2^{\left(1-\frac{s}{s-1}\right)k_1}}_{\geq 1} - \frac{4}{3}2^{2\left[\frac{m}{2s-1}\right]} \\ &\geq 2^{\frac{m}{s-1}} - \frac{4}{3}2^{2\left[\frac{m}{2s-1}\right]} = 2^{\frac{m}{s-1}}\left[1-\frac{4}{3}2^{\frac{2m}{2s-1}-\frac{m}{s-1}}\right]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{2m}{2s-1}-\frac{m}{s-1} = \frac{(2m)(s-1)-m(2s-1)}{(2s-1)(s-1)} = \frac{-2m+m}{(2s-1)(s-1)} = \frac{-m}{(2s-1)(s-1)}.$$

Wir interessieren uns für den Fall

$$\frac{4}{3}2^{\frac{-m}{(2s-1)(s-1)}} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{8}{3} \leq 2^{\frac{m}{(2s-1)(s-1)}}.$$

Es gilt

$$\frac{8}{3} \leq 4 \leq 2^{\frac{m}{(2s-1)(s-1)}}$$

falls

$$\frac{m}{(2s-1)(s-1)} \geq 2 \iff m \geq 2(s-1)(2s-1).$$

Damit gilt für alle $m \geq 2(s-1)(2s-1)$

$$|W_s(m)| \geq \frac{1}{2}2^{\frac{m}{s-1}}.$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Bemerkung 6. *Für $s > 1$ wächst $|W_s(m)|$ streng monoton in m.*

Definition 13. *Wir führen für $s > 1$ und $(J_{2^l})_{l=0}^{\infty} \subset \mathcal{L}(L_2(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T}))$ bzw. $(J_{2^l})_{l=0}^{\infty} \subset \mathcal{L}(C(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T}))$ mit $J_{-1} = 0$ den modifizierten Smolyak Algorithmus m-ter Ordnung zum Parameter s ein als*

$$A_m^*(s, J)f := \sum_{k \in J_s(m)} (\Delta_{k_1}(J) \otimes \Delta_{k_2}(J))f.$$

Wir sind nachfolgend für $S := (S_{2^j})_{j=0}^{\infty}$ (Fourier-Partialsumme) interessiert in $A_m^*(s, S)$.

Lemma 25. *Für $s > 1$ gilt*

$$A_m^*(s, S)f = \sum_{(k_1,k_2) \in W_s(m)} c_{(k_1,k_2)}(f)e^{ikx}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere gilt

$$rank\,(A_m^*(s, S)) = |W_s(m)|.$$

Beweis. Sei $s(k_1 + k_2) - \max(k_1, k_2) \leq m$. Wir wissen aus (3), dass

$$\Delta_{k_1}(S) \otimes \Delta_{k_2}(S)f = \sum_{(l_1,l_2) \in P_{k_1,k_2}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f)e^{ilx}$$

gilt. Nun ist

$$\begin{aligned} A_m^*(s, S)f &= \sum_{(k_1,k_2) \in J_s(m)} \Delta_{k_1}(S) \otimes \Delta_{k_2}(S)f \\ &= \sum_{(k_1,k_2) \in J_s} \sum_{(l_1,l_2) \in P_{k_1,k_2}} c_{(\ell_1,\ell_2)}(f)e^{ilx}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Menge über die summiert wird, so stellen wir fest, dass diese nichts anderes als das modifizierte hyperbolische Kreuz ist. Also gilt

$$A_m^*(s, S)f(x) = \sum_{(k_1,k_2) \in W_s(m)} c_{(k_1,k_2)}(f)e^{ikx}.$$

Die Gleichheit

$$\text{rank}\,(A_m^*(s, S)) = |W_s(m)|$$

folgt unmittelbar daraus, dass die $(e^{ikx})_{k \in W_s(m)}$ paarweise orthogonal sind und die Fourierkoeffizienten eine entsprechende Anzahl von Freiheitsgraden erlauben. Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Satz 11. *Sei $s > 1$ gegeben. Dann gilt für alle $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$ und $m \in \mathbb{N}_0$*

$$\|f - A^*_m(s,S)f|H^1(\mathbb{T}^2)\|_* \leq \frac{1}{2^m}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_*.$$

Beweis. Sei $f \in H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)$. Dann ist

$$\|f - A^*_m(s,S)f|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2_* = \sum_{k \notin J^s(m)} 2^{2|k|_\infty}\|\delta_k(f)\|^2_2.$$

Dies können wir folgendermaßen abschätzen

$$\|f - A^*_m(s,S)f|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2_* \leq \sup_{k \notin J^s(m)} 2^{2|k|_\infty - 2s|k|_1} \sum_{k \notin J^s(m)} 2^{2s|k|_1}\|\delta_k(f)\|^2_2.$$

Nun gilt aufgrund der Definition von $J_s(m)$

$$\sup_{k \notin J_s(m)} 2^{-2(s|k|_1 - |k|_\infty)} \leq 2^{-2m}.$$

Außerdem ist

$$\sum_{k \notin J_s(m)} 2^{2s|k|_1}\|\delta_k(f)\|^2_2 \leq \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2_*.$$

Damit lässt sich der Beweis abschließen mit

$$\|f - A^*_m(s,S)f|H^1(\mathbb{T}^2)\|^2_* \leq 2^{-2m}\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|^2_*.$$

□

Bemerkung 7. *Mit der aus Lemma 24 bekannten Konstanten gilt für $s > 1$*

$$\textit{rank}\,(A^*_0(s,S)) = |W_s(0)| \leq \frac{4 \cdot 2^{\frac{s}{s-1}}}{2^{\frac{s}{s-1}} - 1}.$$

Aufgrund der strengen Monotonie der $|W_s(m)|$ und somit des rank $(A^*_m(s,S))$ finden wir für $n > \frac{4 \cdot 2^{\frac{s}{s-1}}}{2^{\frac{s}{s-1}} - 1}$ ein $m \geq 0$ mit rank $(A^*_m(s,S)) < n \leq$ rank $(A^*_{m+1}(s,S))$.

Folgerung 12. *Sei $s > 1$ und rank $(A^*_m(s,S)) < n \leq$ rank $(A^*_{m+1}(s,S))$ für $n > \frac{4 \cdot 2^{\frac{s}{s-1}}}{2^{\frac{s}{s-1}} - 1}$. Dann gilt*

$$\|id - A^*_m(s,S)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_* \lesssim \frac{1}{n^{s-1}}.$$

Beweis. Aus Lemma 24 wissen wir, dass

$$\operatorname{rank}\left(A_m^*(s,S)\right) < n \le \operatorname{rank}\left(A_{m+1}^*(s,S)\right) \lesssim 2^{\frac{m+1}{s-1}} \asymp 2^{\frac{m}{s-1}}$$

gilt. Nun folgt aus Satz 11

$$\begin{aligned}\|\mathrm{id} - A_m^*(s,S)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| &\le \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{1}{\left(2^{\frac{m}{s-1}}\right)^{s-1}} \\ &\lesssim \frac{1}{n^{s-1}}.\end{aligned}$$

□

Wir benötigen nachfolgend als technisches Hilfsmittel den Begriff der linearen Weite.

Definition 14. *Für einen normierten Raum X und eine Teilmenge $W \subset X$ wird die n-te lineare Weite definiert als*

$$\lambda_n(W,X) := \inf_{\Lambda_n} \sup_{f\in W} \|f - \Lambda_n(f)\|_X$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$. Hier bezeichnet Λ_n die Menge aller linearen Operatoren in $\mathcal{L}(X,X)$, deren Rang kleiner oder gleich n ist.

Lemma 26. *Sei X ein normierten Raum und $W \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt für $m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \ge n$*

$$\lambda_n(W,X) \ge \lambda_m(W,X).$$

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition der linearen Weite. Es ist für $m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \ge n$.

$$\lambda_n(W,X) = \inf_{\Lambda_n} \sup_{f\in W} \|f - \Lambda_n(f)\|_X \ge \inf_{\Lambda_m} \sup_{f\in W} \|f - \Lambda_n(f)\|_X = \lambda_m(W,X).$$

□

Lemma 27. *Sei L_{n+1} ein n+1 dimensionaler Unterraum eines Hilbertraums X und $B_n(r) := \{f \in L_{n+1} : \|f\|_X \le r\}$. Dann gilt*

$$\lambda_n(B_{n+1},X) = r.$$

Beweis. Einen Beweis finden wir für Kolmogorov-Zahlen in [11, Theorem 1]. Im Falle, dass es sich bei X um einen Hilbertraum handelt, stimmen diese mit den linearen Weiten überein. □

Definition 15. *Wir bezeichnen für $m \in \mathbb{N}_0$ und $s > 1$ die Menge der trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem modifizierten hyperbolischen Kreuz zum Parameter s als*

$$V_s^*(m) := \Big\{ \sum_{k \in A} a_k e^{ikx} : (a_k)_{k \in A} \subseteq \mathbb{C},\ A \subseteq W_s(m) \Big\}.$$

Als nächstes beweisen wir eine Bernstein-Ungleichung.

Lemma 28. *Sei $s > 1$. Dann gilt*

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_* \leq 2^m \|f|H^1(\mathbb{T}^2)\|_*$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in V_s^*(m)$.

Beweis. Für $f \in V_s^*(m)$ gilt

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_*^2 = \sum_{(k_1,k_2) \in J_s(m)} 2^{2s(k_1+k_2)} \|\delta_k(f)\|^2.$$

Dies können wir nun abschätzen zu

$$\begin{aligned} \|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_*^2 &\leq \sup_{(k_1,k_2) \in J_s(m)} 2^{2(s(k_1+k_2)-\max(k_1,k_2))} \sum_{(k_1,k_2) \in J_s(m)} 2^{2\max(k_1,k_2)} \|\delta_k(f)\|^2 \\ &\leq 2^{2m} \|f|H^1(\mathbb{T}^2)\|_*^2. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Bemerkung 8. *Nachfolgend erläutern wir eine technische Restriktion. Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass ein m existiert mit*

$$|W_s(m-1)| \leq n < |W_s(m)|.$$

Mit der in Lemma 24 berechneten Konstanten erhalten wir

$$\frac{1}{2} 2^{\frac{m-1}{s-1}} \leq n.$$

Dies ist äquivalent zu

$$m - 1 \leq (s-1)\log_2(2n).$$

Daher folgt aus

$$n \geq 2^{4s-3}$$

die untere Schranke

$$m - 1 \geq 2(s-1)(2s-1).$$

Satz 12. *Sei $s > 1$. Dann gilt*

$$a_n(id_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)}) \asymp \frac{1}{n^{s-1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max\left(4 \cdot 2^{\frac{s}{s-1}}\left(\frac{1}{2^{\frac{s}{s-1}}-1}\right), 2^{4s-3}-1\right)$.

Beweis. 1. Schritt:

Sei

$$\text{rank }(A^*_m(s,S)) = |W_s(m)| < n \leq \text{rank }(A_{m+1}(s,S)) = |W_s(m+1)|.$$

Für $s > 1$ erhalten wir aus der Definition der n-ten Approximationszahl und Folgerung 12 die obere Abschätzung

$$a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)}) \leq \|\mathrm{id} - A^*_m(s,S)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_* \lesssim \frac{1}{n^{s-1}}.$$

2. Schritt:

Sei nun m so gewählt, dass

$$|W_s(m-1)| \leq n < |W_s(m)|$$

gilt. Aus Lemma 24 wissen wir, dass für $m - 1 \geq 2(s-1)(2s-1)$

$$n \geq |W_s(m-1)| \geq \frac{1}{2}2^{\frac{m-1}{s-1}} = 2^{\frac{-s}{s-1}}2^{\frac{m}{s-1}}.$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$2^{-s}n^{-(s-1)} \leq 2^{-m}. \tag{11}$$

Sei nun

$$T(m) := \{f \in V^*_s(m) : \|f|H^1(\mathbb{T}^2)\|_* \leq 2^{-m}\}.$$

Mit Lemma 28 gilt für alle $f \in T(m)$

$$\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_* \leq 2^m\|f|H^1(\mathbb{T}^2)\|_* \leq 1.$$

Daher können wir die folgende Abschätzung vornehmen:

$$\begin{aligned} a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)}) &= \inf_{\substack{L\in\mathcal{L}(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2),H^1(\mathbb{T}^2))\\ \text{rank }(L)\leq n}} \sup_{\|f|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\|_*\leq 1} \|f - Lf|H^1(\mathbb{T}^2)\|_* \\ &\geq \inf_{\substack{L\in\mathcal{L}(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2),H^1(\mathbb{T}^2))\\ \text{rank }(L)\leq n}} \sup_{f\in T(m)} \|f - Lf|H^1(\mathbb{T}^2)\|_*. \end{aligned}$$

Nun erhalten wir mit der aus Lemma 26 bekannten Monotonie der linearen Weiten

$$\lambda_n(T(m), H^1(\mathbb{T}^2)) \geq \lambda_{|W_s(m)|-1}(T(m), H^1(\mathbb{T}^2)).$$

Mit Lemma 27 gilt

$$\lambda_{|W_s(m)|-1}(T(m), H^1(\mathbb{T}^2)) = 2^{-m}.$$

Abschließend können wir mit (11) abschätzen zu

$$a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)}) \geq \frac{2^{-s}}{n^{s-1}}.$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Bemerkung 9. *Wir konnten in diesem speziellen Fall das aus [4] bekannte Resultat für $1 < s \leq 2$ auf allgemeine $s > 1$ erweitern.*

Folgerung 13. *Sei rank $(A^*_m(s,S)) < n \leq$ rank $(A^*_{m+1}(s,S))$. Dann gilt*

$$\|id - A^*_m(s,S)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)| \asymp \frac{1}{n^{s-1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max\left(4 \cdot 2^{\frac{s}{s-1}}\left(\frac{1}{2^{\frac{s}{s-1}}-1}\right), 2^{4s-3}-1\right).$

Beweis. Sei rank $(A^*_m(s,S)) \leq n <$ rank $(A^*_{m+1}(s,S))$. Aus Folgerung 4 und Satz 12 erhalten wir die Ungleichungskette

$$\frac{1}{n^{s-1}} \asymp a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2)\longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)}) \leq \|\mathrm{id} - A_m(s,S)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \lesssim \frac{1}{n^{s-1}}.$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Bemerkung 10. *Der Operator $A^*_m(s,S)$ stellt für $s > 1$ ein Approximationsverfahren dar, mit dem wir für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}), H^1(\mathbb{T}^2))$ asymptotisch optimal zur Approximationszahl approximieren können.*

9 Zusammenfassung

Abschließend möchten wir die gewonnenen Erkenntnisse zusammenfassen. Nachfolgend sei, zum jeweiligen Kontext passend, entweder $n :=$ rank $S^H_m =$ rank B_m bzw. $n :=$ rank $A^*_m(s,S)$. Wir konnten in dieser Arbeit zeigen, dass für $s > 1$ die orthogonale Projektion auf die trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem hyperbolischen Kreuz die Gleichheit

$$||\mathrm{id} - S^H_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)|| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

erfüllt. Die Bedingung $s > 1$ ist auch für alle folgenden Resultate notwendig. Für unseren Abtastoperator B_m konnten wir zeigen, dass ebenfalls

$$||\mathrm{id} - B_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)|| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

gilt. Die Approximationsgüte für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1(\mathbb{T}^2))$ der orthogonalen Projektion auf die trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem hyperbolischen Kreuz entspricht also, bis auf Konstanten, der unseres Abtastoperators B_m. Dieses Phänomen ist insofern interessant, da für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), L_2(\mathbb{T}^2))$ u.a. aus [1] bekannt ist, dass dies nicht der Fall ist. Wir konnten zeigen, dass für die orthogonale Projektion auf die trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem modifizierten hyperbolischen Kreuz zum Parameter s die Gleichheit

$$\|\mathrm{id} - A^*_m(s,S)|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{1}{n^{s-1}}$$

gilt. Hier existiert also kein $\log_2$-Term im Zähler der Approximationsrate. Daraus entnehmen wir, dass die Menge der trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem hyperbolischen Kreuz keinen optimalen Unterraum für Approximationen für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1(\mathbb{T}^2))$ repräsentiert. Außerdem konnten wir für $s > 1$ zeigen, dass für die Approximationszahl der Einbettung zum Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1(\mathbb{T}^2))$

$$a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2)}) \asymp \frac{1}{n^{s-1}}$$

gilt. Die Approximationsgüte der orthogonalen Projektion auf die trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem modifizierten hyperbolischen Kreuz zum Parameter s entspricht damit bis auf Konstanten der Approximationszahl der Einbettung für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1(\mathbb{T}^2))$. Einen weiteren interessanten Fall stellt das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1_{mix}(\mathbb{T}^2))$ dar. Hier gilt ebenfalls

$$\|\mathrm{id} - S^H_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}.$$

Außerdem konnten wir mit überschaubaren Modifikationen unseres $H^1(\mathbb{T}^2)$-Resultats zeigen, dass für unseren Abtastoperator

$$\|\mathrm{id} - B_m|H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)\| \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

gilt und dies sogar optimal zur Approximationszahl der Einbettung

$$a_n(\mathrm{id}_{H^s_{mix}(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1_{mix}(\mathbb{T}^2)}) \asymp \frac{(\log_2 n)^{s-1}}{n^{s-1}}$$

ist. Das heißt in dieser Situation stellen die trigonometrischen Polynome mit Frequenzen aus dem hyperbolischen Kreuz einen optimalen Unterraum zur Approximation dar. Es ist bemerkenswert, dass unser Abtastoperator eine Approximationsgüte aufweist, die sich nur durch Konstanten von der Approximationszahl der Einbettung für das Paar $(H^s_{mix}(\mathbb{T}^2), H^1_{mix}(\mathbb{T}^2))$ unterscheidet.

Literatur

[1] T. Ullrich und W. Sickel, "Smolyak's Algorithm, Sampling on Sparse Grids and Function Spaces of Dominating Mixed Smoothness", Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math/Inf/14/06, 2006.

[2] T. Ullrich , "Über die periodische Interpolation auf schwach besetzten Gittern mittels de la Vallée-Poussin-Kernen" Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2004. Diplomarbeit.

[3] W. Sickel , Vorlesung über "Approximationstheorie", Friedrich-Schiller-Universität Jena, SS 2010.

[4] D. Dung und T. Ullrich, "N-widths and ϵ-dimensions for high-dimensional approximations.", Found. Comput. Math., to appear., 2013.

[5] W.A. Light und E.W. Cheney, "Approximation Theory in Tensor Product Spaces", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1169, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[6] M. Griebel und S. Knapek, "Optimized tensor-product approximation spaces", Constr. Approx., 16, 525-540, 2000.

[7] M. Griebel und S. Knapek, "Optimized general sparse grid approximation spaces for operator equations", Math. Comp., vol. 78 (no. 268), 2223–2257, 2009.

[8] H.-J. Schmeisser und H. Triebel, "Topics in Fourier Analysis and Function Spaces", Wiley, Chichester, 1987.

[9] V.N. Temlyakov, "Approximation of Periodic Functions", Nova Science, New York, 1993.

[10] W. Sickel und T. Ullrich, "Tensor products of Sobolev-Besov spaces and applications to approximation from the hyperbolic cross." *JAT* 161 (2009), 748-786.

[11] V. M. Tikhomirov, "Widths of sets in function spaces and the theory of best approximations", Uspekhi Mat. Nauk 15 No.3 (93)(1960), 81-120. English translation in Russian Math. Survey, 15, 1960

[12] D. Werner, "Funktionalanalysis", 6. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2007.

[13] B. Carl und I. Stephani, "Entropy, compactness and the approximation of operators", Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[14] D. Dung, “Sparse grid sampling recovery and cubature of functions having anisotropic smoothness”, arXiv:1211.4319v3.

[15] H. Yserentant, “On the regularity of the electronic Schrödinger equation in Hilbert spaces of mixed derivatives”, Numer. Math. 98, 731–759 (2004).

[16] H. Yserentant, “Regularity and Approximability of electronic wave functions”, Lecture Notes in Math. 2000, Springer, Berlin, 2010.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände die vorliegende Masterarbeit für die öffentliche Benutzung im Universitätsarchiv zur Verfügung zu stellen.

Weißensee, den 21. August 2013 Glenn Byrenheid