

**Diplomarbeit**  
**über einen Variationsansatz**  
**zur optimalen Parametrisierung**  
**implizit gegebener Flächen**  
**und seine numerische Implementation**

Angefertigt am  
Institut für Numerische Simulation

Vorgelegt der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

11. März 2010

von  
Stefan Wilhelm von Deylen  
aus  
Rotenburg (Wümme)



# Einleitung

Diese Diplomarbeit verknüpft die Parametrisierungsoptimierung als Minimierung einer elastischen Deformationsenergie, wie sie CLARENZ/LITKE/RUMPF [2004] vorgeschlagen haben, mit dem Dünnen-Band-Ansatz für partielle Differentialgleichungen auf impliziten Flächen von DECKELNICK et al. [2009].

Wir geben zuerst einen kurzen Überblick über den Inhalt; jeder Absatz entspricht einem Kapitel der Arbeit. Darauf folgen einige Anwendungsbeispiele aus der Informatik. Die abschließenden Bemerkungen möge man ohne allzu großen Ernst zur Kenntnis nehmen.

## Inhalt der Arbeit

Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine einfach zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Nach Definition existiert, wenigstens lokal, eine Parametrisierung  $y : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  (nötigenfalls betrachten wir nur eine in  $M$  offene Untermannigfaltigkeit). Ist  $M$  nur implizit gegeben, d. h. als Niveaumenge  $\varphi^{-1}(0)$  einer differenzierbaren Niveaufunktion  $\varphi$  mit regulärem Wert 0, so ist diese Parametrisierung a priori noch gar nicht bekannt – und auch keineswegs eindeutig, sondern jeder glatte Diffeomorphismus  $\beta$  ihrer Bildes erzeugt eine weitere Parametrisierung  $\beta \circ y$ . Wenn wir  $y$  numerisch zu bestimmen suchen, kommt daher sofort die Frage auf, welche Parametrisierungen für uns als besonders „erwünscht“ gelten mögen. Wir werden ein verzerrungsfreies  $y$  als optimal ansehen – wobei „Verzerrung“ zunächst eine Übertragung entweder von Längen, Flächen oder Winkeln zwischen  $M$  und  $y(M)$  bedeuten mag. Wir haben deshalb zunächst im Kontext implizit gegebener Flächen die geometrischen Maße zu finden, durch welche sich Längen-, Flächen- und Winkeltreue beschreiben lassen.

Möchten wir sodann zwischen diesen drei Zielen abwägen, so ist dies in einem variationellen Kontext möglich, in dem Verzerrungsfreiheit als Minimalstelle einer von  $y$  abhängigen Längen-, Flächen- oder Winkelverzerrungsenergie auftritt. Die Optimierung einer additiven Kombination dieser Energien mit frei bestimmbar Gewichten erlaubt dann, Parametrisierungen zu finden, die alle drei Ziele berücksichtigen. Diese Auffassung von Optimalität ist natürlich nur eine unter vielen, und diverse verschiedene Ansätze zur Parametrisierungsoptimierung sind in den vergangenen Jahren veröffentlicht worden. Wir besprechen unsere Energieterme daher im direkten Kontext der diesbezüglichen Literatur. Weil in der Variationsrechnung die Existenz energieminimierender Abbildung durchaus nicht vorderhand klar ist, reißen wir auch den Nachweis ihrer Existenz mit üblichen Methoden der mathematischen Elastizitätstheorie kurz an.

Numerische Optimierung geschieht für gewöhnlich durch Abstiegsverfahren; wir haben ein Newton-Verfahren implementiert, für welches die erste und zweite Variation der Verzerrungsenergie zu bestimmen ist. Diese diskretisieren wir anschließend über

impliziten Flächen angepaßte Finite Elemente und geben die diskreten Optimierungs-Algorithmen wieder.

Indem wir zunächst nur den quadratischen Teil unserer Energie optimieren, testen wir die praktische Implementation und generieren Startwerte für die nichtlineare Optimierung. An Beispielen aus dem STANFORD SCANNING REPOSITORY zeigen wir die praktischen Resultate unserer Optimierung. – Einige Details der praktischen Implementierung sind, zu Nutzen und Frommen weiterer Nutzer der verwendeten und modifizierten Bibliothek QuocMesh, im Anhang dargestellt.

## Anwendungen

Die gegenwärtige Fülle von Parametrisierungs-Ansätzen wäre nicht entstanden, wenn das Problem nicht von großer praktischer Relevanz in der Computergraphik wäre. Alle drei im folgenden genannten Anwendungen erzeugen umso bessere Resultate, je verzerrungsfreier die Parametrisierung  $y$  ist:

**Texturierung.** Wenn  $M$  nicht nur einfarbig, sondern mit farbiger Struktur versehen sein soll, wird man eine Bitmap als Abbildung  $b$  von  $[0; 1]^2$  in den gewählten Farbraum verstehen, diese (beispielsweise periodisch) auf ganz  $\mathbb{R}^2$  fortsetzen und jedem Punkt  $p \in M$  die Farbe  $b(y(p))$  zuweisen. In analoger Weise können Teile der Fläche nicht nur eingefärbt, sondern auch mit variierenden Leucht-, Opazitäts- oder Reflexionseigenschaften versehen werden.

**Reliefstruktur (*bump map*).** Sei  $M$  kompakt mit glattem Normalenfeld  $n$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß für jedes glatte Skalarfeld  $s : M \rightarrow [-\varepsilon; \varepsilon]$  die Menge  $M + sn := \{p + s(p)n(p) \mid p \in M\}$  zu  $M$  diffeomorph ist. Auf diese Weise kann auf schwach gekrümmten Flächen eine Reliefstruktur aufgebracht werden.

**Reparametrisierung.** Ist  $M$  beispielsweise ein Dreiecksnetz, so ist eine der üblichen Forderungen an dieses Netz eine möglichst gleichförmige Knotenverteilung. Insbesondere nach Verformung der Fläche kann eine Neuverteilung der Knoten notwendig werden. Hierfür überzieht man den Bildbereich von  $y$  mit einer beispielsweise äquidistanten Triangulierung mit Knoten  $p'_i$  und erhält ein im allgemeinen nicht völlig mit  $M$  übereinstimmendes, aber auch nicht weit von ihr entferntes Dreiecksnetz mit Knoten  $p_i = y^{-1}(p'_i)$ .

**Schnittmustergenerierung.** Ein letzter Anwendungsfall liegt außerhalb der Computergraphik: In der Industrie müssen bestimmte Oberflächen, beispielsweise in der Automobil-Innenausstattung, mit nur sehr wenig dehn- und meist gar nicht stauchbarem Material überzogen werden, etwa zur Polsterung von Sitzen. Bisher erarbeiten sich Polsterer für jeden neuen Sitz durch praktisches Experimentieren ein optimales Schnittmuster. In DEGENER [2009], Kapitel 7, Seiten 81ff., wird über die Lösung des Parametrisierungsproblems eine zeit- und materialeffizientere Lösung gesucht.

## **Zur Gestaltung der Arbeit**

Diese Arbeit ist eine mathematische Prüfungsarbeit. Sie ist mit Absicht von jeder Art Motivationbeiwerk und eleganten, aber nicht zwingend notwendigen Seitenblicken freigehalten. Wo kurze Sätze die Darstellung insgesamt verkürzen, wurde ihnen der Vorzug gegeben – wo nicht, da nicht.

Die einheitliche, außerhalb des Textblocks stehende Numerierung aller Unterabschnitte, Sätze, Gleichungen etc. durch Randnummern übernimmt ein bemerkenswert übersichtliches Gliederungskonzept der Rechtswissenschaften, und auch das Bemühen, bisheriges Wissen wo nur irgend möglich durch Literaturverweise zu referenzieren, darf durchaus als Kritik an der gängigen mathematischen Praxis gesehen werden.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Präliminarien: Implizite Flächen und Parametrisierungen</b>	<b>1</b>
1.1. Niveaufunktionen . . . . .	1
1.2. Geometrische Strukturinformation auf glatten und Dreiecksflächen . . . .	4
1.3. Längen-, Winkel- und Flächentreue von Parametrisierungen . . . . .	9
<b>2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion</b>	<b>15</b>
2.1. Variationsansatz . . . . .	15
2.2. Die Axiome der linearen Elastizitätstheorie . . . . .	16
2.3. Gütemessung von Parametrisierungen . . . . .	17
2.4. Nebenbedingungen . . . . .	26
2.5. Existenz von Minimierern . . . . .	28
2.6. Übergang vom Nullniveau zu Parallelfächen . . . . .	30
<b>3. Endlichdimensionale Minimierung der Verzerrungsenergie</b>	<b>35</b>
3.1. Erste und zweite Variation der Energie im Kontinuierlichen . . . . .	35
3.2. Abgeschnittene Basisfunktionen (TFE) . . . . .	39
3.3. Diskrete Algorithmen für alle drei implementierten Strategien . . . . .	48
<b>4. Numerische Ergebnisse</b>	<b>51</b>
4.1. Implementierungstest: stereographische Projektion . . . . .	52
4.2. Harmonische Parametrisierungen als Startwerte der Optimierung . . . .	56
4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen . . . . .	59
<b>5. Schlußbetrachtungen</b>	<b>73</b>
<b>A. Implementierung mithilfe der QuocMesh-Bibliothek</b>	<b>75</b>
A.1. Zur Struktur der QuocMeshes . . . . .	75
A.2. Das Narrow-Band-Konzept der QuocMeshes . . . . .	81
A.3. Maskierung . . . . .	82





# 1. Präliminarien: Implizite Flächen und Parametrisierungen

In dieser Arbeit werden Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^d$  an den meisten Stellen nicht über ihre lokale Parametrisierung dargestellt, sondern als Niveaumengen von Funktionen  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . In diesem Kapitel führen wir die nötigen Notationen und Begrifflichkeiten solcher impliziter Flächen und ihrer Parametrisierungen ein. Danach charakterisieren wir verzerrungsfreie Parametrisierungen über die Eigenwerte ihrer ersten Fundamentalförmung.

## 1.1. Niveaufunktionen

Selbstverständlich lassen sich nur **Hyperflächen**, also Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1, als Niveaumengen darstellen. In der Numerik wird allerdings selten gefragt, wie groß die Klasse der auf diese Weise darstellbaren Flächen ist.<sup>1</sup> Wir schieben daher einen Abschnitt über die Möglichkeit ein, Flächen als Niveaumengen reellwertiger Funktionen darzustellen. Darin führen wir auch die gerichtete Abstandsfunktion als numerisch besonders geeignete Wahl für die Niveaufunktion ein.

Eine Menge  $M$  läßt sich äquivalent durch lokale Parametrisierungen oder lokale Niveaufunktionen als glatte Hyperfläche des  $\mathbb{R}^d$  charakterisieren:<sup>2</sup>

- (a) Jeder Punkt  $p \in M$  besitzt eine bezüglich  $M$  offene Umgebung, die diffeomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^{d-1}$  ist.
- (b) Jeder Punkt  $p \in M$  besitzt eine bezüglich  $\mathbb{R}^d$  offene Umgebung  $O \subset \mathbb{R}^d$  und eine Niveaufunktion  $\varphi_p : O \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $M \cap O = \varphi_p^{-1}(0)$  ist.

**Notation:** Wir schreiben im folgenden  $[\varphi = 0]$  für  $\{x \mid \varphi(x) = 0\}$  und sprechen von der **Niveaumenge** bezüglich  $\varphi$  zum **Niveauwert** 0. Den zuweilen<sup>3</sup> üblichen Begriff der **Faser** von  $\varphi$  über 0 verwenden wir nicht.

Die Diffeomorphismen der ersten Definitionsmöglichkeit werden sich im allgemeinen nicht zu einem einzigen Diffeomorphismus verkleben lassen. Hingegen ist es möglich, wie wir in diesem Abschnitt zeigen werden, die Hyperfläche durch eine einzige, nicht von  $p$  abhängige Niveaufunktion darzustellen.

<sup>1</sup> Vgl. beispielsweise OSHER/FEDKIW [2003], Seite 7: „We consider only closed surfaces with clearly defined interior and exterior regions.“

<sup>2</sup> AMANN/ESCHER [1998], Seiten 252, 254.

<sup>3</sup> AMANN/ESCHER [1998], Seite 22.

1. Präliminarien: Implizite Flächen und Parametrisierungen

**Definition:** Sei  $\tilde{T}_p M$  der Quotientenraum aller Kurven durch  $p$ , die ganz in  $M$  verlaufen, unter der Identifikation von infinitesimal übereinstimmenden Kurven. Jedes Element in  $\tilde{T}_p M$  ist eindeutig bestimmt durch seinen (für alle äquivalenten Kurven übereinstimmenden) Tangentenvektor in  $p$ , damit ist  $\tilde{T}_p M$  auf natürliche Weise isomorph zu einem linearen Unterraum  $T_p M$  des  $\mathbb{R}^d$  mit Kodimension 1. Er heißt **Tangentialraum** an  $M$  in  $p$ .<sup>4</sup>

Da jede Hyperfläche orientierbar ist,<sup>5</sup> existiert ein Schnitt  $n$  im Normalenbündel

$$TM^\perp = \{(p, v) \mid p \in M, v \perp T_p M\}$$

mit  $|n| = 1$  überall. Darüber definieren wir das **dünne Band der Breite  $\varepsilon$  um  $M$**  (in der der Topologie ist der Begriff der **tubularen  $\varepsilon$ -Umgebung** gebräuchlicher):

**1.1 Lemma:** Sei  $M$  eine glatte, kompakte Hyperfläche. Dann ist für kleines  $\varepsilon$

$$h : M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (p, t) \mapsto p + t n(p)$$

ein Diffeomorphismus auf sein Bild  $\mathbb{B}_\varepsilon(M)$ , eine offene Umgebung von  $M$  in  $\mathbb{R}^d$ .<sup>6</sup>

Auf  $\mathbb{B}_\varepsilon(M)$  läßt sich nun bereits eine Niveaufunktion  $\vartheta$  als zweite Komponente  $t$  von  $h^{-1}$  definieren. Sie hätte, wenn wir sie auf ganz  $\mathbb{R}^d$  fortgesetzt wüßten, bereits alle Eigenschaften der folgenden Definition:

**1.2 Definition:** Eine fast überall in  $\mathbb{R}^d$ , jedenfalls aber überall in einer Umgebung von  $M$  stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $[\varphi = 0] = M$  und

$$|\varphi(x)| = d(x, M)$$

heißt **gerichtete Abstandsfunktion (signed distance function)** zu  $M$ .

Es ist jedoch a priori nicht klar, ob sich obiges  $\vartheta$  auf ganz  $\mathbb{R}^d$  ausdehnen läßt. Wir konstruieren daher im Beweis des folgenden Satzes zunächst eine glatte Approximation der bei  $\pm\varepsilon$  abgeschnittenen gerichteten Abstandsfunktion und benutzen dies, um die Existenz einer global definierten Niveaufunktion mit  $|\nabla\varphi| = 1$  zu zeigen.

**1.3 Satz:** Sei  $M \subset \mathbb{R}^d$  eine glatte, kompakte und zusammenhängende Hyperfläche. Dann besitzt  $R := \mathbb{R}^d \setminus M$  genau zwei Zusammenhangskomponenten.<sup>7</sup>

*Beweis.* Sei  $f : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine monotone Funktion mit  $\text{supp } f' \subset ]-\varepsilon, \varepsilon[$  und  $f(\pm\varepsilon) = \pm\varepsilon$  und Nullstelle  $f(0) = 0$ , vgl. folgende Seite.

<sup>4</sup> JÄNICH [2005], Definition 2.2 (a), Seite 29.

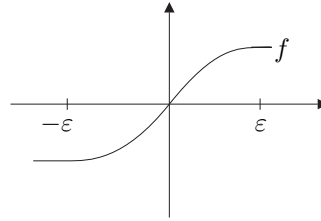
<sup>5</sup> SAMELSON [1969].

<sup>6</sup> LIMA [1988] oder auch BREDON [1993], Theorem 11.4, Seite 93.

<sup>7</sup> LIMA [1988].

Definiere  $\psi := f \circ \vartheta$ . Es ist  $\nabla\psi = 0$  auf dem Rand der tubularen Umgebung. Deshalb definiert

$$v := \begin{cases} \nabla\psi & \text{in } U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



ein glattes Vektorfeld, das die Integrierbarkeitsbedingung  $\partial_i v_j = \partial_j v_i$  erfüllt. Nach dem Lemma von Poincaré<sup>8</sup> gibt es daher ein glattes  $\chi$  mit  $\nabla\chi = v$ . In  $U$  unterscheiden sich  $\chi$  und  $\psi$  nur um eine additive Konstante, die wir o. E. als Null annehmen können. Damit ist  $M = [\chi = 0]$ . Offenbar sind  $R^+ := [\chi > 0]$  und  $R^- := [\chi < 0]$  offen und disjunkt, überdecken  $R$ , welches folglich mindestens zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.

Wir sind fertig, sobald wir gezeigt haben, daß  $R^+$  und  $R^-$  jeweils zusammenhängend sind. Ohne Einschränkung führen wir den Nachweis für  $R^+$ : Jedes  $x \in R^+$  liegt entweder in  $U^+ := [\psi > 0] = [\chi > 0] \cap U$ , oder es kann über eine Strecke, die ganz in  $R^+$  verläuft, mit einem Punkt  $p \in U^+$  verbunden werden, der von  $x$  minimalen Abstand besitzt. Läge diese Strecke nicht vollständig innerhalb  $R^+$ , so würde sie den Rand  $\partial R^+$  schneiden – der ist aber  $M$ , also würde ein Teil der Strecke innerhalb  $U$  verlaufen  $\zeta$  q. e. d.

Jede kompakte Fläche hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, zerschneidet den  $\mathbb{R}^d$  also induktiv in endlich viele Komponenten:

**Korollar:** Sei  $M \subset \mathbb{R}^d$  eine glatte, kompakte Hyperfläche mit  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann hat  $R$  genau  $k + 1$  Zusammenhangskomponenten.

Dies rechtfertigt die Vorstellung, daß die Zusammenhangskomponenten einer geschlossenen Fläche entweder voneinander separiert oder ineinander geschachtelt liegen.

**Lemma:** Es gibt eine Indikatorfunktion  $\sigma : R \rightarrow \{\pm 1\}$ , die in benachbarten Zusammenhangskomponenten von  $R$  verschiedene Werte annimmt.

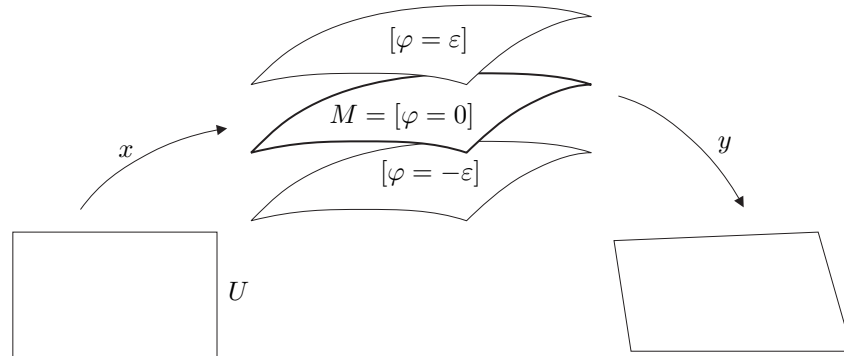
*Beweis.* Die „Nachbarschaft entlang  $M$ “ erzeugt solche Verbindungen zwischen den Zusammenhangskomponenten von  $R$ , daß diese sich in einer Baumstruktur anordnen lassen: Jede Komponente hat nur solche zu Nachbarn, die sie entweder umschließt oder von denen sie umschlossen wird. Diese Ordnung beginnt bei der einzigen unbeschränkten Zusammenhangskomponente  $R_0$  (der Rand  $\partial R = M$  ist kompakt, also kann es nur eine geben), geht von dieser zu den ihr über  $M$  direkt benachbarten Komponenten weiter und setzt diesen Prozeß iterativ fort.

Numeriere die Stufen dieses Baums nun von der Wurzel  $R_0$  ausgehend und setze  $\sigma = (-1)^i$  für alle Zusammenhangskomponenten der  $i$ -ten Stufe. q. e. d.

Nun setze  $\varphi|_R = \sigma d(\cdot, M)$ . Sie ist offenbar durch Null stetig auf ganz  $\mathbb{R}^d$  fortsetzbar. Die Abstandsfunktion  $d(\cdot, M)$  ist in der Nähe von  $M$  differenzierbar, und ihr Gradient

<sup>8</sup> AMANN/ESCHER [2006], Theorem VIII.3.8, Seite 326.

Abbildung 1: Notation für eingebettete Flächen



hat Norm 1. Aufgrund der Konstruktion von  $\sigma$  besitzt  $\varphi$  nun auf verschiedenen Seiten von  $M$  entgegengesetztes Vorzeichen und ist also auch transversal zu  $M$  glatt. Damit ist eine gerichtete Abstandsfunktion zu  $M$  konstruiert.

Auf der anderen Seite sind Niveaumengen zu regulären Werten stets Mannigfaltigkeiten.<sup>9</sup> Bis auf Vorzeichenwechsel haben wir daher eine eindeutige Korrespondenz zwischen gerichteten Abstandsfunktionen und glatten, kompakten Hyperflächen hergestellt.

- 1.4 Bemerkung:** Die Überlegungen dieses Abschnitts lassen sich auf berandete Hyperflächen ausdehnen, indem statt  $\mathbb{R}^d$  eine abgeschlossene konvexe Menge  $Q$  benutzt wird.

Eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit nirgends verschwindendem Gradienten erzeugt dann eine berandete Hyperfläche  $[\varphi = 0]$ ; den (in  $\partial Q$  enthaltenen) Rand im Mannigfaltigkeitssinne<sup>10</sup> schreiben wir als  $\partial^* M$ .

## 1.2. Geometrische Strukturinformation auf glatten und Dreiecksflächen

Wir wollen die Geometrie-Informationen erster und zweiter Ordnung, das sind Längenmessung und Krümmung, mithilfe von Parametrisierungen und Niveaufunktionen ausdrücken. Sei  $x : U \rightarrow M$  eine lokale Karte von  $M$  um  $p$  und  $\Omega$  eine solche Umgebung von  $M$ , daß  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar ist. Über doppelt auftretende Indizes werde summiert. Wo keine Verwechslungen auftreten können, werden wir den Fußpunkt  $p$  fortlassen.

- 1.5 Riemann'sche Metriken.** Eine mögliche Riemann'sche Metrik auf  $M$  ist die Einschränkung des euklidischen Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eukl.}}$  auf  $T_p M$ . Wegen  $T_p M = Dx(p)$

<sup>9</sup> AMANN/ESCHER [2006], Theorem 9.4, Seite 254.

<sup>10</sup> AMANN/ESCHER [2001], Seite 255.

1.2. Geometrische Strukturinformation auf glatten und Dreiecksflächen

( $TU$ ) haben Vektorfelder  $v$  auf  $M$  eine Darstellung als  $Dx \tilde{v}$ , wobei  $\tilde{v}$  ein Vektorfeld auf  $U$  ist. Dann ist

$$g_x(v, w) := \langle Dx \tilde{v}, Dx \tilde{w} \rangle_{\text{eukl.}} = Dx^T Dx \tilde{v} \cdot \tilde{w},$$

mit dem euklidischen Skalarprodukt  $\tilde{v} \cdot \tilde{w} = \tilde{v}_i \tilde{w}_i$ . Man kann  $x$  natürlich auch als Deformation von  $U$  verstehen und  $Dx^T Dx$  als weitgehend arbiträres Skalarprodukt auf  $TU$ . Analog zu dieser Vorstellung wird durch eine Parametrisierung  $y : M \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$  das Skalarprodukt aus dem  $\mathbb{R}^{d-1}$  auf  $M$  zurückgezogen:

$$g_y(v, w) := \langle Dy v, Dy w \rangle_{\text{eukl.}} = Dy^T Dy v \cdot w.$$

Die Matrixdarstellung von  $g$  wird als **erste Fundamentalform**<sup>11</sup> bezeichnet.

Es macht den Kern dieser Arbeit aus, daß die über  $g_y$  induzierte Längen- und Winkelmessung a priori nichts mit der vom umgebenden  $\mathbb{R}^d$  geerbten zu tun haben muß. Den Unterschied zwischen der von  $\mathbb{R}^d$  und der von  $y$  induzierten ersten Fundamentalform werden wir durch die im zweiten Kapitel zu entwickelnde Energie  $\mathcal{E}[y]$  messen und in den anschließenden Kapiteln durch Veränderung von  $y$  minimieren.

**Tangentiales Differential.** Der euklidische Gradient  $\nabla$  für Funktionen  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  induziert auf  $M$  einen **Euler'schen** oder **tangentiale Gradienten** 1.6

$$\underline{\nabla} := P \nabla, \quad \text{wobei } P := \text{id} - n \otimes n$$

die Projektion auf den Tangentialraum an  $M$  bezeichnet.<sup>12</sup> Für Funktionen mit  $\partial_n \eta = 0$  ist  $\underline{\nabla} \eta = \nabla \eta$ .

Die Einträge des tangentiale Gradienten sind die **tangentiale Richtungsableitungen**

$$\underline{\partial}_i \eta = \partial \eta - n_i n_j \partial_j \eta.$$

Der **Laplace-Beltrami-Operator**<sup>13</sup> sei  $\underline{\Delta} = \underline{\partial}_i \underline{\partial}_i$ .

Analog zum Gradienten läßt sich für Funktionen nach  $\mathbb{R}^m$  eine tangentiale Jacobi-Matrix der Größe  $n \times m$  definieren. Für  $p \in M$  seien  $\zeta^i$  Vektorfelder, die um  $p$  eine Orthonormalbasis von  $TM$  bilden. Dann hat  $Dy$  bzgl.  $\zeta^1, \dots, \zeta^{d-1}, n$  die Matrixdarstellung

$$Dy = (\partial_{\zeta^1} y \quad \dots \quad \partial_{\zeta^{d-1}} y \quad \partial_n y), \quad \text{also } \underline{Dy} = (\partial_{\zeta^1} y \quad \dots \quad \partial_{\zeta^{d-1}} y \quad 0),$$

und die partiellen Ableitungen  $\partial_{\zeta^i} y, \partial_n y$  sind Spaltenvektoren in  $\mathbb{R}^m$ .

<sup>11</sup> BLASCHKE/LEICHTWEISS [1973], § 41, Seiten 99f. oder auch AMANN/ESCHER [2006], Bemerkung 10.3 (e), Seite 273.

<sup>12</sup> AMANN/ESCHER [2006], Theorem 10.7, Seite 276.

<sup>13</sup> KREYSZIG [1968], Seite 265.

1. Präliminarien: Implizite Flächen und Parametrisierungen

**Krümmung.** Das Normalenfeld ist eine Abbildung  $M \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ , besitzt folglich ein Differential  $Dn : T_p M \rightarrow T_{n(p)} \mathbb{S}^{d-1}$ . Wir bezeichnen mit **1.7**

$$\mathcal{S} := Dn \quad \text{die Weingartenabbildung,}$$

mit  $H := \mathbf{sp} \mathcal{S}$  die **mittlere** und mit  $K := \mathbf{det} \mathcal{S}$  die **Gauß'sche Krümmung** von  $M$ . Für die Identität auf  $M$  ist<sup>14</sup>  $\underline{\Delta} \text{id} = H n$ , und man nennt  $\mathbf{H} = H n$  den **Krümmungsvektor**. Als **Totalkrümmung** von  $U \subset M$  meßbar bezeichnen wir  $\omega(U) := \int_U K$ .

**Partielle Integration.** Mithilfe einer lokalen Darstellung von  $M$  als Graph beweist man für Untermannigfaltigkeiten  $M' \subset M$  offen mit Konormale  $\nu$  und  $\zeta : M' \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar<sup>15</sup>

$$\int_{M'} \nabla \zeta + \int_{M'} \zeta H n = \int_{\partial^* M'} \zeta \nu.$$

Das ergibt mit  $\zeta = \eta \vartheta$  eine Formel zur partiellen Integration auf  $M'$ :

$$\mathbf{1.8} \quad \int_{M'} (\eta \nabla \vartheta + \vartheta \nabla \eta) + \int_{M'} \eta \vartheta H n = \int_{\partial M'} \eta \vartheta \nu.$$

Wie im euklidischen Raum<sup>16</sup> verwenden wir dies zur Definition schwacher Ableitungen. Meß- und Integrierbarkeit auf  $M$  ist hier wie üblich als Meß- und Integrierbarkeit der auf einen Kartenbereich zurückgezogenen Funktionen zu verstehen.

**1.9 Definition:** Sei  $\eta \in \mathcal{L}^p(M)$ . Ein Vektorfeld  $\nabla \eta$ , das fast überall tangential an  $M$  ist, heißt **schwacher tangentialer Gradient** von  $\eta$ , wenn Gl. 1.8 für alle  $\vartheta \in \mathcal{C}_0^\infty(M')$  erfüllt ist.  $\mathcal{H}^{1,p}(M)$  sei die Menge aller Funktionen in  $\mathcal{L}^p(M)$  mit schwachen tangentialen Gradienten in  $\mathcal{L}^p(M)^d$ .

**Diskrete Sichtweise im Zweidimensionalen**

**1.10 Definition:** Ein (endliches) **Dreiecksnetz**  $\mathcal{T}$  ist eine (endliche) Menge von offenen Dreiecken (d. h. zum offenen zweidimensionalen Einheitssimplex ähnlichen Mengen)  $T_i$ , so daß  $T := \bigcup \bar{T}_i$  eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Die Menge der Untersimplexe der Dimension  $\ell = 0, 1, 2$  heißt das  **$\ell$ -Skelett**  $\tilde{\mathcal{T}}^\ell$  von  $\mathcal{T}$ . Die Menge der inneren Untersimplexe sei  $\mathcal{T}^\ell$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^2 &= \mathcal{T} = \{T_i\}, \\ \mathcal{T}^1 &= \{\bar{T}_i \cap \bar{T}_j \mid i \neq j\}, \\ \mathcal{T}^0 &= \{\bar{e}_{ij} \cap \bar{e}_{rs} \mid (i, j) \neq (r, s)\}, \end{aligned}$$

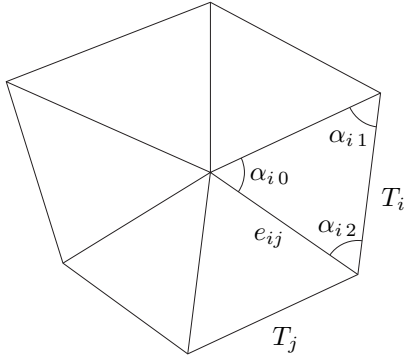
wobei  $e_{ij}$  die gemeinsame Kante  $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j$  von  $T_i$  und  $T_j$  bezeichne.

<sup>14</sup> ESCHENBURG/JOST [2007], Satz 6.42, Seite 78.

<sup>15</sup> GILBARG/TRUDINGER [2001], Lemma 16.1, Seite 390, dort allerdings für Funktionen  $\zeta$  mit Nullrandwerten. Der Beweis ist aber auf offensichtliche Weise auf Funktionen mit nichtverschwindenden Randwerten zu erweitern.

<sup>16</sup> Vgl. beispielsweise ALT [2006], Seite 63.

1.2. Geometrische Strukturinformation auf glatten und Dreiecksflächen



**Abbildung 2:** Notation auf Dreiecksnetzen: Dargestellt ist der Stern um einen inneren Punkt  $p$ . Die Winkel  $\alpha_{i0}$  liegen alle an  $p$  an. Man beachte, daß damit die Numerierung der Winkel innerhalb eines Dreiecks nur eindeutig ist, solange das Dreieck zum Stern um einen fest gewählten Punkt gehört.

Ein endliches Dreiecksnetz ist eine  $\mathcal{C}^{0,1}$ -Mannigfaltigkeit. Der klassische Ansatz für geometrische Evolutionsprobleme<sup>17</sup> wäre es nun, analog zur Methode der gemischten Finiten Elemente<sup>18</sup>, Geometrieeinformationen zweiter Ordnung durch Hilfsfunktionen einzubauen: Beispielsweise sucht man eine Approximation  $w$  der mittleren Krümmung  $H = \operatorname{div} n$  als Lösung von

$$\int w \psi = \int n \cdot \nabla \psi \quad \text{für alle stückweise linearen } \psi : T \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \psi|_{\partial T} = 0.^{19}$$

In allen solchen Ansätzen wird  $T$  als Approximation einer glatten Fläche angenommen, deren ebenfalls glatte geometrische Strukturfunktionen (wie die mittlere Krümmung) zu approximieren sind.

**Diskrete Krümmung.** Es ist aber bereits ohne dieses Wissen eine Definition von Krümmungsmaßen auf Dreiecksnetzen möglich:<sup>20</sup> Seien  $p_j \in \mathcal{T}^0$ , also ein innerer Knoten von  $\mathcal{T}$ ,  $S(p_j) \subset \mathcal{T}$  der Stern (bzw. 1-Ring) um  $p_j$  und  $\alpha_{i0}$  die Winkel angrenzender Dreiecke bei  $p_j$ . Dann definiere die **diskrete Krümmung** in  $p_j$  1.11

$$\omega'_j := 2\pi - \sum_{T_i \in S(p_j)} \alpha_{i0},$$

und für ein Subnetz  $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$  mit inneren Knoten  $p_1, \dots, p_n$  setze als **diskrete Totalkrümmung** von  $\mathcal{V}$

$$\omega'(V) := \sum_{j=1}^n \omega'_j.$$

Auf der Menge aller kompakten Teilmengen eines metrischen Raums ist der Hausdorff-Abstand  $d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathbb{B}_\varepsilon(B), B \subset \mathbb{B}_\varepsilon(A)\}$  eine Metrik.<sup>21</sup> Wenn

<sup>17</sup> DROSKE/RUMPF [2004]; TEUSNER [2007]; OLISCHLÄGER [2005].

<sup>18</sup> LARSSON/THOMÉE [2005], Abschnitt 5.7, Seiten 75f.

<sup>19</sup> So benutzt beispielsweise in DROSKE/RUMPF [2004], Seite 366.

<sup>20</sup> ALEXANDROW [1955], Abschnitt V.1, Seiten 180f.

<sup>21</sup> MUNKRES [2000], Aufgabe 45.7, Seiten 280f.

1. *Präliminarien: Implizite Flächen und Parametrisierungen*

$d_H(A, M) < \inf_{p \in M} r(p)$  für den Krümmungsradius  $r(p) := 1/K(p)$  von  $M$  in  $p$  ist, gibt es eine Funktion  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß

$$\vartheta : p \mapsto p + t(p) n(p)$$

eine Bijektion von  $M$  nach  $A$  ist (vergleiche auch Lemma 1.1).

Wir sagen, eine Familie von Flächen  $T_h$  mit fast überall definierten Normalenfeldern  $n_h$  konvergiere gegen  $M$  für  $h \rightarrow 0$ , wenn  $d_H(T_h, M) \rightarrow 0$  und  $\|n - n_h \circ \vartheta\|_\infty \rightarrow 0$  streben (punktweise Konvergenz fast überall).<sup>22</sup> Letzteres folgt noch nicht aus der Konvergenz in der Hausdorff-Metrik, aber bei Dreiecksflächen kann durch passende Wahl der zusätzlichen Knoten eine Konvergenz der Flächennormalen erreicht werden.

**1.12 Satz:** *Sei  $M$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Fläche,  $\mathcal{T}_h$  eine Familie von Dreiecksnetzen mit  $T_h \rightarrow M$ . Sei  $U \subset M$  offen, die Gauß'sche Krümmung habe überall auf  $U$  das gleiche Vorzeichen, und sei  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{T}_h$  so, daß  $V_h \rightarrow U$ . Dann konvergiert auch  $\omega'(V_h) \rightarrow \omega(U)$ .*

*Beweis.* Die Totalkrümmung von  $U$  ist (bis aufs Vorzeichen) das Volumen seines Bildes unter der Normalenabbildung:<sup>23</sup>

$$\omega(U) = \int_U K = \pm \text{vol } n(U),$$

und weil  $K$  auf  $U$  konstantes Vorzeichen hat, ist  $n(U)$  das von  $n(\partial U)$  umschlossene Gebiet der oberen Hemisphäre ( $\partial U$  bezüglich  $M$  verstanden). Analog gilt

$$\omega'(V_h) = \sum_{p_i \in \mathcal{V}_h^0} \omega'_i = \pm \text{vol } n'(V_h),$$

wobei  $n'(V_h) \subset \mathbb{S}^2 \cap [x_3 \geq 0]$  das sphärische Bild von  $V_h$  ist.<sup>24</sup> Für ein Dreieck  $T \in \mathcal{V}_h$  ist  $n'(T)$  die Normale an  $T$ , für die Kante zwischen zwei Dreiecken die Geodätische zwischen den sphärischen Bildern der beiden Dreiecke (also ihre konvexe Hülle), für einen Punkt  $p$  die konvexe Hülle aller  $n(T)$ ,  $T \in \mathcal{S}(p)$ .

Man kann nun  $h$  so klein wählen, daß alle Ecken in  $\mathcal{V}_h$  das gleiche Krümmungsvorzeichen wie alle Punkte in  $U$  besitzen. Dann ist  $n'(V_h)$ , analog zu  $n(U)$ , die vom sphärischen Bild des äußeren Rings von Dreiecken umschlossene Fläche. In ihm gilt nun aber wegen  $\|n - n_h \circ \vartheta\|_\infty \rightarrow 0$  und  $n_h = n'$  im Inneren jedes Dreiecks, daß

$$\sup_{T \in \mathcal{V}_h} \sup_{p \in T} |n \circ \vartheta(p) - n'(T)| \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0$ , also  $\max_{T \in \mathcal{V}_h} \text{diam } T \rightarrow 0$ , strebt. Daß die Vorzeichen von  $n(U)$  und  $n(V_h)$  übereinstimmen, ist leicht einzusehen: Genau für nichtnegativ gekrümmte Flächen (Gauß'sche wie diskrete Krümmung) liegen die Ebenen durch  $p$  mit Normalen in  $n(U)$  bzw.  $n(V_h)$  nur auf einer Seite von  $U$  respektive von  $V_h$ , *q. e. d.*

<sup>22</sup> HILDEBRANDT/POLTHIER/WARDETZKY [2006].

<sup>23</sup> DO CARMO [1983], Beweis zu Proposition 3.3.2, Seite 125.

<sup>24</sup> ALEXANDROW [1955], Abschnitt V.5, Seite 186.



**1.13 Diskreter Laplace-Beltrami-Operator.** Als diskrete Version des Laplace-Beltrami-Operators (in schwacher Form) wird  $\bar{L}_{ij}^{\text{tg}1}$  durch die Kotangensformel

$$\bar{L}_{ij}^{\text{tg}1} = \frac{1}{2}(\cot \alpha_{i1} + \cot \alpha_{j2}) \quad \text{für } i \neq j$$

und  $\bar{L}_{ii}^{\text{tg}1}$  so, daß  $\sum_j \bar{L}_{ij}^{\text{tg}1} = 0$  gilt, definiert.<sup>25</sup> Er ist eine explizite Darstellung von  $L^{\text{tg}1}[\psi_i, \psi_j]$  aus Rn. 2.8 für stückweise lineare nodale Basisfunktionen  $\psi_i$ .<sup>26</sup> Es ist allerdings wesentlich, daß dieser Zusammenhang für die diskrete Differentialgeometrie nicht naturnotwendig, sondern nur im Hinblick auf Approximationsresultate nützlich ist.

Wir sagen, eine Funktion  $\eta : \mathcal{T}^0 \rightarrow \mathbb{R}$  sei diskret-schwache Lösung von  $\Delta\eta = f$  mit  $f : \mathcal{T}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $\bar{L}_{jk}^{\text{tg}1}\eta^j = f^k$  für alle  $p_k \in \mathcal{T}^0$  erfüllt ist. Ist  $f = 0$ , so heißt  $\eta$  **diskret harmonisch**.<sup>27</sup>

Nun läßt sich der diskrete Krümmungsvektor  $\mathbf{H}$  analog zu Rn. 1.7 als diskret-schwache Lösung von  $\underline{\Delta} \text{id} = \mathbf{H}$ , d. h. als (endlichdimensionale) Lösung von

$$\sum_j \bar{L}_{jk}^{\text{tg}1} p_j = \langle \mathbf{H}, \psi_k \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

definieren. Rein diskret, aber trotzdem verträglich mit den glatten Analoga, ist so die Geometrieinformation zweiter Ordnung auf Dreiecksnetzen definierbar.

### 1.3. Längen-, Winkel- und Flächentreue von Parametrisierungen

Seien  $\lambda_i$  die nicht verschwindenden Eigenwerte von  $g_y$ . Nach FLOATER/HORMANN [2005] gibt es drei mögliche, gegebenenfalls untereinander abzuwägende Optimalziele für Parametrisierungen, Längen-, Winkel- und Flächentreue. Sie lassen sich in Forderungen an die Eigenwerte  $\lambda_i$  der ersten Fundamentalform ausdrücken.

**Längentreue.** Längen von Wegen  $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  verhalten sich unter Transformationen  $y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  bekanntlich als **1.14**

$$\int \left| \frac{d}{dt}(y \circ w) \right| = \int |Dy \dot{w}| = \int \sqrt{\dot{w} Dy^T Dy \dot{w}}.$$

Für Wege, die vollständig in einer Niveaufläche verlaufen, ist  $Dy \dot{w} = \underline{Dy} \dot{w}$ . Die verschiedenen Dehnungsrichtungen von  $y$  auf einer Niveaufläche sehen wir folglich als

<sup>25</sup> BOBENKO/SPRINGBORN [2007].

<sup>26</sup> PINKALL/POLTHIER [1993], allerdings weisen HILDEBRANDT/POLTHIER/WARDETZKY [2006] genauso wie BOBENKO/SPRINGBORN [2007] darauf hin, daß DUFFIN [1959], Abschnitt 4, Seiten 802ff., die Kotangensformel für den gewöhnlichen Laplace-Operator im Zweidimensionalen bereits verwendet.

<sup>27</sup> Die Begriffe decken sich mit Ritz-Galerkin-Approximationen bezüglich der Ansatzräume aus Rn. 3.6, sind aber – und das ist im Ansatz der diskreten Geometrie wesentlich – ohne Vorgriff auf diese definierbar.

1. *Präliminarien: Implizite Flächen und Parametrisierungen*

Eigenvektoren von  $\underline{Dy}^T \underline{Dy}$ . Daher ist  $y$  genau für

$$\lambda_i = 1 \quad \text{für alle } i$$

eine längentreue bzw. **isometrische** Abbildung.

- 1.15 Winkeltreue.** Eine Abbildung  $y$  ist winkeltreu bzw. **konform**<sup>28</sup>, wenn orthogonale Tangentialvektoren des Urbildraums auf orthogonale Tangentiale im Bildraum abgebildet werden, das Skalarprodukt also bis auf Streckung unverändert bleibt. Das im Urbild-Tangententialraum von  $y$  verwendete euklidische Skalarprodukt transformiert sich mit  $g_y$ . Bezeichnet  $SO_2(\mathbb{R}^d)$  die Menge aller bezüglich des euklidischen Skalarprodukts orthogonalen, orientierungserhaltenden Endomorphismen des  $\mathbb{R}^d$ , so müßte also ohne Skalierung punktweise  $g_y \in SO_2(\mathbb{R}^{d-1})$  sein. Wenn wir auch Skalierungen berücksichtigen, gilt für winkeltreue Parametrisierungen punktweise  $g_y = \mu Q$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $Q \in SO_2(\mathbb{R}^{d-1})$ . Solche Produkte sind offenbar genau diejenigen Matrizen, die betragsmäßig gleiche Eigenwerte besitzen:

$$\lambda_i = \lambda_j \quad \text{für alle } i, j$$

In der klassischen Geometrie werden winkeltreue affine Transformationen als **Ähnlichkeitsabbildungen** bezeichnet, woraus die Übung entstanden ist, konforme Transformationen „im Kleinen ähnlich“ zu nennen.<sup>29</sup> Die Existenz konformer Parametrisierungen wurde auf glatten Flächen von GAUSS [1825] gezeigt, was LICHTENSTEIN [1916] auf  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ -Flächen ausdehnen konnte.

- Flächentreue.** Der Flächeninhalt  $\int 1$  wird nach dem Transformationssatz<sup>30</sup> unter der Deformation  $y$  zu  $\int \sqrt{\det \underline{Dy} \underline{Dy}^T}$ . Die Matrixdarstellung  $\underline{Dy}^T \underline{Dy}$  von  $g_y$  hat einen eindimensionalen Kern, aufgespannt von der Flächennormalen  $n$ . Alle anderen Eigenwerte sind auch Eigenwerte von  $\underline{Dy} \underline{Dy}^T$ .<sup>31</sup> Mithin ist  $y$  genau dann flächentreu, wenn gilt:

$$\prod \lambda_i = 1$$

Die Darstellungen von Längen-, Flächen- und Winkeltreue mithilfe der Eigenwerte  $\lambda_i$  zeigt direkt:<sup>32</sup>

- 1.17 Hilfssatz:** *Eine Abbildung ist genau dann isometrisch, wenn sie flächentreu und konform ist.*

<sup>28</sup> Nach STÄCKEL [1917] erstmalige Verwendung in der obigen Bedeutung in GAUSS [1844].

<sup>29</sup> Vgl. beispielsweise den Titel von LICHTENSTEIN [1916] oder auch HAKER et al. [2000], Seite 3.

<sup>30</sup> AMANN/ESCHER [2001], Bemerkung XI.5.4 (c), Seite 350.

<sup>31</sup> SCHABACK/WENDLAND [2005], Seite 65.

<sup>32</sup> FLOATER/HORMANN [2005], Seite 161, oder auch KREYSZIG [1968], Sätze 57.2 und 62.2.

**1.18 Konforme Parametrisierungen sind harmonisch.** Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1 (**Riemann'sche Fläche**), d. h. es gebe einen Atlas mit biholomorphen Kartenwechseln. Wir identifizieren dann den Bildraum  $\mathbb{R}^2$  unserer Parametrisierung und Tangentialräume an  $M$  mit  $\mathbb{C}$  bzw. offenen Teilmengen davon und sammeln einige Erkenntnisse aus der komplexen Analysis. Wie üblich sei  $z = u + iv$  ein Punkt der komplexen Ebene.

**Satz:** Sei  $f$  eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$ . Genau dann ist  $f$  konform, wenn  $f$  oder  $\bar{f}$  holomorph ist und  $f'$  bzw.  $\bar{f}'$  in keinem Punkt verschwindet.<sup>33</sup>

*Beweis.* Lineare winkeltreue Abbildungen lassen sich, komplex aufgefaßt, stets als  $z \mapsto az$  oder  $z \mapsto a\bar{z}$  für ein  $a \in \mathbb{C}$  schreiben.<sup>34</sup> Das Differential jeder reell differenzierbaren Funktion  $f$  zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$  hat die Form<sup>35</sup>

$$\partial_h f(c) = \partial_z f(c)h + \partial_{\bar{z}} f(c)\bar{h}.$$

Ein solches  $f$  ist genau dann komplex differenzierbar, wenn  $\partial f = \partial_z f$  gilt,<sup>36</sup> q. e. d.

Damit erfüllt jede konforme Parametrisierung die Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung

$$\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2, \quad \partial_2 f_1 = -\partial_1 f_2,$$

aus der durch nochmaliges Differenzieren

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$$

folgt. Somit ist jede konforme Parametrisierung eines ebenen Flächenstücks auch harmonisch.

Die Berechnung einer harmonischen Parametrisierung zu vorgegebener Parametrisierung des Randes ist ein eindeutig lösbares Problem,<sup>37</sup> also genügt die passende Randwertvorgabe schon, um mit einer harmonischen zugleich auch eine konforme Parametrisierung zu erhalten (vgl. auch Satz 2.13).

Wir sagen, Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen seien holomorph, wenn die auf Kartengebiete zurückgezogenen Abbildungen holomorph sind. Genauso sei eine Abbildung  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch, wenn die auf ein Kartengebiet zurückgezogene Abbildung harmonisch ist. Wenn  $M$  eingebettet im  $\mathbb{R}^3$  liegt, ist letztere Definition äquivalent zu  $\underline{\Delta}u = 0$ .<sup>38</sup> Mittels der als Definition gewählten Formulierung ist aber offensichtlich, daß konforme Parametrisierungen auch nicht-ebener Riemann'scher Flächen harmonisch sind.

<sup>33</sup> REMMERT/SCHUMACHER [2002], Satz 2.1.1, Seite 67.

<sup>34</sup> Nachweis entweder direkt über die Darstellung von  $a \in \mathbb{C}$  als reelle  $2 \times 2$ -Matrix oder REMMERT/SCHUMACHER [2002], Lemma 0.1.1, Seite 14.

<sup>35</sup> REMMERT/SCHUMACHER [2002], Abschnitt 1.4.1, Seite 58.

<sup>36</sup> REMMERT/SCHUMACHER [2002], Satz 1.4.3, Seite 60.

<sup>37</sup> BURGER [2009].

<sup>38</sup> JOST [2005], Korollar 8.2.2, Seite 409.

**Zur Invertierbarkeit harmonischer Parametrisierungen.** Es ist nicht selbstverständlich, daß eine Funktion zwischen ebenen Flächenstücken, die in beiden Komponenten harmonisch ist, auch invertierbar sein wird. Folgender Satz wurde 1926 in den Jahresberichten der DMV als Aufgabe gestellt und noch im gleichen Jahr von KNESER gelöst.<sup>39</sup> 1.19

**Satz:** Sei  $M$  ein ebenes Flächenstück,  $y : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine harmonische Funktion, die  $\partial M$  auf den Rand einer konvexen Menge abbildet. Dann ist  $y$  invertierbar.

**1.20 Eine partielle Differentialgleichung für konforme Parametrisierungen.** HAKER et al. [2000] beweisen:

**Satz:** Sei  $M$  eine zur  $\mathbb{S}^2$  diffeomorphe komplexe Mannigfaltigkeit mit lokalen Koordinaten  $u$  und  $v$  sowie  $f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  eine konforme Parametrisierung, die  $p \in M$  auf den Nordpol in  $\mathbb{S}^2$  abbildet. Dann erfüllt  $f$  im Sinne von Distributionen

$$\Delta f = (\partial_u - i \partial_v) \delta_p.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß  $u$  und  $v$  bei  $p$  ein Orthogonalsystem bilden. Dann hat der Laplace-Beltrami-Operator die Gestalt  $\lambda(\partial_{uu}^2 + \partial_{vv}^2)$  mit  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sei  $z = u + iv$ . Dann ist  $f$  lokal eine Funktion auf einer Teilmenge der komplexen Ebene, aufgrund der Konformität holomorph, und natürlich injektiv. Damit hat sie einen einfachen Pol bei  $z = 0$ , ihre Laurent-Reihe beginnt daher<sup>40</sup> erst bei  $z^{-1}$ :

$$f(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} a_i z^i$$

Die Monome  $z^i$  für  $i \geq 0$  sind holomorph, also bereits harmonisch. Damit bleibt  $a_{-1}z^{-1} = (\partial_u - i \partial_v) \ln |z|$  zu zeigen: Betrachte

$$\begin{aligned} \partial_u \ln |z| &= \partial_u \ln \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2}, \\ \partial_v \ln |z| &= \partial_v \ln \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{v}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Daher ist  $(\partial_u - i \partial_v) \ln |z| = \frac{u-iv}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1/z$  und deshalb

$$\begin{aligned} \Delta 1/z &= \Delta(\partial_u - i \partial_v) \ln |z| \\ &= (\partial_u - i \partial_v) \Delta \ln |z| \\ &= (\partial_u - i \partial_v) 2\pi \delta_p(z), \end{aligned}$$

<sup>39</sup> RADÓ [1926], KNESER [1926]. Unabhängig davon gibt CHOQUET [1945] einen Beweis, weshalb der Satz oft nach RADÓ, KNESER und CHOQUET benannt wird. Uns ist jedoch unverständlich geblieben, weshalb CHOQUET mit einem Satz geehrt wird, der ohne sein Zutun schon lückenlos bewiesen worden war.

<sup>40</sup> FREITAG/BUSAM [2006], Satz 5.5.3, Seite 145.

### 1.3. Längen-, Winkel- und Flächentreue von Parametrisierungen

weil  $\frac{1}{2\pi} \ln |z|$  Fundamentallösung des zweidimensionalen Laplace-Operators ist. Lokal können wir nun problemlos solch ein Koordinatensystem wählen, daß  $1/\lambda = 2\pi a_{-1}$  gilt, *q. e. d.*

Nun gibt es konforme Abbildungen von der  $\mathbb{S}^2$  ohne Nordpol auf  $\mathbb{C}$  (beispielsweise die stereographische Projektion, vgl. Rn. 4.3). Verketteten wir  $f$  mit einer solchen, erhalten wir eine konforme Parametrisierung von  $M \setminus \{p\}$ .

Weitere Resultate, wie konforme Parametrisierungen mithilfe der Variationsrechnung gefunden werden können, werden wir in Rn. 2.10 besprechen.

**Konforme Selbstabbildungen Riemann'scher Flächen.** In seiner Dissertation **1.21** behandelte Riemann den nach ihm benannten Abbildungssatz

**Satz:** *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $G \subsetneq \mathbb{C}$  ist konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe.*<sup>41</sup>

Somit sind alle solchen Gebiete auch untereinander konform äquivalent, und es folgt, daß zu den nach LICHTENSTEIN [1916] konform parametrisierbaren Flächen stets eine Parametrisierung existiert, die beliebig gewählte (hölderstetige) Randvorgaben erfüllt.

Deshalb ist ohne Festlegung des Bildgebiets eine konforme Parametrisierung nicht eindeutig zu bestimmen. Wird dieses Bildgebiet festgeschrieben, so bleiben noch seine konformen Selbstabbildungen als einzige Freiheitsgrade übrig, die wir aus diesem Grunde kurz aufzählen wollen.

Nach dem Uniformisierungs- oder großen Riemann'schen Abbildungssatz<sup>42</sup> ist jede einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche konform äquivalent zu  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  oder der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}^2$ . Letztere trägt dabei als Modell der hyperbolischen Ebene die Poincaré-Metrik.

Die Gruppen ihrer Selbstabbildungen, die wie die zulässigen Karten selbst auch wieder biholomorph sein müssen, sind<sup>43</sup>

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{R}^2) &= SO_2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2, \\ \text{Aut}(\mathbb{D}^2) &= SO_2(\mathbb{R}^2), \\ \text{Aut}(\mathbb{S}^2) &= SL(\mathbb{R}^2)/\pm, \end{aligned}$$

nämlich die euklidischen Bewegungen der Ebene, die Drehungen der Kreisscheibe und die **Möbiustransformationen**  $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ . Dabei ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left[ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right].$$

<sup>41</sup> RIEMANN [1851], § 21, Seite 40, in heutiger Darstellung beispielsweise REMMERT/SCHUMACHER [2007], Satz 8.10, Seite 173. Riemann bemerkt ausdrücklich, daß die Einschränkung auf ebene Gebiete keine strukturelle Notwendigkeit ist, sondern sieht die Möglichkeit für eine „ganz ähnliche Behandlung“ (RIEMANN [1851], § 22, Seite 43) der bei GAUSS [1825] behandelten nicht-ebenen Flächen.

<sup>42</sup> KOEBE [1907], Seite 198; in heutiger Darstellung beispielsweise BEARDON [1984], Abschnitt 9.1, Seite 158.

<sup>43</sup> STEPHENSON [2005], Seiten 43, 44, 47.

## 1. Präliminarien: Implizite Flächen und Parametrisierungen

der Gruppenisomorphismus zwischen  $GL(\mathbb{R}^2)$  unter Identifikation von  $\mathbb{1}$  mit  $\lambda\mathbb{1}$  bzw.  $SL(\mathbb{R}^2)$  unter Identifikation von  $\mathbb{1}$  mit  $-\mathbb{1}$  auf der linken und  $\text{Aut}(\mathbb{S}^2)$  auf der rechten Seite.<sup>44</sup>

Indem  $\mathbb{S}^2$  als  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  vermöge der auf den Pol ausgedehnten stereographischen Projektion (vgl. Rn. 4.3) realisiert wird, sind die drei Räume ineinander geschachtelt. Die Metriken der kleineren Räume werden nicht von den größeren Räumen induziert, aber Kreise bezüglich der einen Metrik sind jeweils auch Kreise bezüglich der anderen. Ihre Automorphismengruppen sind analog ineinander als Untergruppen enthalten.<sup>45</sup>

Die konformen Abbildungen der drei Räume auf sich gehen aus den biholomorphen Selbstabbildungen und einer Spiegelung an einer Koordinatenachse (gleichbedeutend mit einer komplexen Konjugation) hervor.

**Bemerkung:** Sei  $M$  eine Riemann'sche Fläche,  $S$  ihre universelle Überlagerung<sup>46</sup>. Nach obigem Resultat ist  $S$  eine der drei obigen Standardflächen und  $M$  also ihr Quotient unter einer eigentlich diskontinuierlich auf  $S$  operierenden Untergruppe der oben genannten Decktransformationsgruppe  $\text{Aut}(S)$ .<sup>47</sup> Dies klassifiziert auch die mehrfach zusammenhängenden Riemann'schen Flächen.

---

<sup>44</sup> BEARDON [2005], Theoreme 13.1.7 bis 13.1.9, Seite 258.

<sup>45</sup> STEPHENSON [2005], Abschnitt 3.3, Seiten 48f.

<sup>46</sup> HATCHER [2002], Abschnitt 1.3, Seiten 63ff.

<sup>47</sup> Allgemein HATCHER [2002], Seite 72, in diesem Falle auch ABIKOFF [1981], Seite 580.

## 2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

### 2.1. Variationsansatz

Von nun an sei  $M$  stets zweidimensional. Unser Ziel soll es sein, unter den möglichen Parametrisierungen, also den Einbettungen  $y : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , besonders geeignete auszuwählen. Parametrisierungen gibt es unendlich viele, denn für beliebige Diffeomorphismen  $\alpha : M \rightarrow M$  und  $\beta : y(M) \rightarrow y(M)$  ist auch  $\beta \circ y \circ \alpha$  eine solche.

Bewertungskriterium wird für uns eine möglichst geringe Verzerrung zwischen  $M$ , versehen mit der vom  $\mathbb{R}^3$  induzierten euklidischen Metrik, und  $y(M)$  mit der dortigen zweidimensionalen euklidischen Metrik sein. In Rn. 1.5 haben wir dies als Unterschied zwischen dem vom umgebenden Raum und dem von  $y$  induzierten Skalarprodukt charakterisiert. Im allgemeinen wird es unmöglich sein,  $y$  als Isometrie zu wählen:

**Satz:** *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist genau dann isometrisch zu einem  $U \subset \mathbb{R}^{\dim M}$  mit der euklidischen Metrik, wenn der Krümmungstensor überall auf  $M$  verschwindet.<sup>1</sup>*

Daher definieren wir für eine Parametrisierung  $y$  eine Energie  $\mathcal{E}[y]$ , die für stark verzerrende  $y$  groß wird, und suchen nach Minimalstellen dieser Energie. Sie wird mithilfe von Integralquantitäten in den Einträgen von  $\underline{D}y$  formuliert werden, und diese sind definiert, sobald  $y$  schwach differenzierbar ist. Als Definitionsbereich von  $\mathcal{E}$  wählen wir deshalb die zu einer noch zu wählenden Potenz integrierbaren, schwach differenzierbaren Funktionen  $y \in \mathcal{H}^{1,p}(M)$ <sup>2</sup>, schließen aber nicht aus, daß  $\mathcal{E}$  für nicht invertierbare  $y$  unendlich wird.

Bei klassisch differenzierbaren Funktionen  $y$  genügt die Bedingung

$$\det \underline{D}y \underline{D}y^T > 0, \tag{2.1}$$

um nach dem Satz über die Umkehrfunktion<sup>2</sup> lokale Invertierbarkeit auf jeder Niveaufläche sicherzustellen. Dadurch ist aber  $\det \underline{D}y \underline{D}y^T$  bei schwach differenzierbarem  $y$  noch nicht echt oberhalb von Null beschränkt, deshalb genügt diese Bedingung in  $\mathcal{H}^{1,p}(M)$  noch nicht.<sup>3</sup> Daher setzen wir als Menge aller erlaubten Parametrisierungen

---

<sup>1</sup> LEE [1997], Seite 119.

<sup>2</sup> AMANN/ESCHER [2006], Theorem 7.3, Seite 223.

<sup>3</sup> BALL [1981], Beispiel 2, Seiten 317f.

## 2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

$$\text{Par}(M) := \{y \in \mathcal{H}^{1,p}(M)^2 \mid y \text{ f. ü. invertierbar}^4\}$$

und werden in Rnn. 2.26ff. sehen, daß ein endlicher Wert der Energie  $\mathcal{E}[y]$  aus Rn. 2.21 impliziert, daß  $y$  für einfach zusammenhängende Gebiete in  $\text{Par}(M)$  liegt. Nach dem Sobolew'schen Einbettungssatz<sup>5</sup> ist  $y$  für  $p > 2$  stetig, Elemente in  $\text{Par}(M)$  sind dann also Homöomorphismen auf ihr Bild.

## 2.2. Die Axiome der linearen Elastizitätstheorie

Betrachten wir nun die Parametrisierung einer einzelnen Fläche  $M$ . In der Elastizitätstheorie der Mechanik wird  $y$  als Deformation eines Materials verstanden. Nehmen wir an, daß dieses sich ohne äußere Kräfte in der Form  $M$  befände, so wäre eine Einwirkung von außen erforderlich, um es in die Form  $y(M)$  zu bringen. Das Material stünde unter Spannung und wäre bestrebt, sich wieder in seine Ausgangsform zurückzubewegen. Aus diesem Kontext stammt der Begriff „Energie“ für die Größe  $\mathcal{E}$ , mit der wir die Güte einer Parametrisierung messen wollen. In der mathematischen Beschreibung der linearen Elastizitätstheorie<sup>6</sup> werden drei Grundannahmen zumeist axiomatisch vorausgesetzt:

- 2.2 Lokale, lineare Elastizität.** Die Energie ist lokal, d. h. sie läßt sich als Integration über eine Energiedichte  $\tilde{W}$  darstellen, die nur von  $y$  und ihren tangentialen Ableitungen abhängt:

$$\mathcal{E}[y] = \int_M \tilde{W}(y(p), \underline{D}y(p), \underline{D}^2y(p), \dots) dp$$

Schärfer noch hängt die Energiedichte  $\tilde{W}$  sogar nur von der Linearisierung von  $y$  ab, also nicht von höheren Ableitungen als der ersten. Sie ist invariant gegenüber Translationen, deshalb ist auch  $y(p)$  irrelevant, es bleibt nur noch die Abhängigkeit vom tangentialen Gradienten:

$$\mathcal{E}[y] = \int_M \tilde{W}(\underline{D}y(p)) dp$$

- 2.3 Objektivität (*frame indifference*).** Die Energiedichte ist invariant gegenüber Starrkörpertransformationen im Bildraum:

$$\tilde{W}(RA) = \tilde{W}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ und alle } R \in SO_2(\mathbb{R}^2).$$

- 2.4 Isotropie.** Die Energie ist ebenfalls invariant gegen Isometrien des Urbildraums. Sie wirken auf dem eingebetteten Tangentialraum von  $M \subset \mathbb{R}^3$  als bezüglich  $T_p M$

<sup>4</sup> Es gibt eine Funktion  $y^* \in \mathcal{H}^{1,p}(y(M))^3$  mit  $y^* \circ y = \text{id}$  fast überall.

<sup>5</sup> ADAMS [1975], Theorem 5.4 (Teil I, Fall B), Seite 97.

<sup>6</sup> Beispielsweise CIARLET [1988], Abschnitt 3.3f. oder auch CLARENZ/LITKE/RUMPF [2004], Satz 3.1.



orthogonale Transformationen und lassen sich stets zu orthogonalen Transformationen des  $\mathbb{R}^3$  fortsetzen. Also gilt

$$\tilde{W}(AQ) = \tilde{W}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ und alle } Q \in SO_2(\mathbb{R}^3).$$

**Darstellung möglicher elastischer Energien.** Nach dem genannten Axiomen ist  $\tilde{W}$  invariant gegen Isometrien im Bild- und Urbildraum. Je zwei Matrizen  $A$  und  $B$ , die sich solche Isometrien ineinander überführen lassen, besitzen gleiche Singulärwerte<sup>7</sup>; also kann eine Energiedichte, die den obigen drei Axiomen genügt, nur noch von den Singulärwerten von  $\underline{Dy}$ , d. h. von den Eigenwerten von  $g_y = \underline{Dy}^T \underline{Dy}$  abhängen. Diese sind<sup>8</sup> gleich den Eigenwerten des **linken Cauchy-Green'schen Verzerrungstensors**<sup>9</sup>

$$C := \underline{Dy} \underline{Dy}^T,$$

und anstatt der Eigenwerte können wir auch die Hauptinvarianten (Koeffizienten des charakteristischen Polynoms) benutzen.  $C$  ist eine  $2 \times 2$ -Matrix, seine Hauptinvarianten sind nur Spur und Determinante. Es gibt also eine Funktion  $W$  mit

$$\tilde{W}(\underline{Dy}) = W(\text{sp } C, \det C).$$

Je nach Kontext werden wir auch die Notation  $W[y]$  verwenden. Weil alle weiteren Überlegungen lokal sind, werden wir (wie schon in diesen Definitionen) den Auswertungspunkt  $p$  fortlassen, wo keine Unklarheiten zu befürchten sind.

Im folgenden Abschnitt werden wir den Hauptinvarianten von  $C$  geometrische Bedeutung zuordnen.

## 2.3. Gütemessung von Parametrisierungen

Im ersten Kapitel haben wir mithilfe der Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  der ersten Fundamentalform längen-, flächen- und winkelerhaltende Abbildung charakterisiert. Von diesen drei Anforderungen waren nur wahlweise Längentreue oder Flächen- und Winkelreue notwendig, um festzustellen, ob eine Parametrisierung isometrisch ist. Um aber größere und kleinere Abweichungen von einer Isometrie messen zu können, definieren wir drei Verzerrungsmaße  $s$ ,  $d$  und  $c$ . Mit ihrer Hilfe lassen sich viele in der Literatur dargestellte Gütemaße für Parametrisierungen bereits formulieren. Unsere eigene Gütefunktion schließen wir als eine Kombination vieler dieser Ansätze direkt an. Auf einige nicht in den gemeinsamen variationellen Kontext einzubettende, aber in der Praxis vielbeachtete Ansätze werden wir danach eingehen.

<sup>7</sup> HERMANN [2006], Satz 2.12, Seite 82.

<sup>8</sup> SCHABACK/WENDLAND [2005], Seite 65.

<sup>9</sup> Beachte, daß in der Literatur, vgl. beispielsweise CIARLET [1988], Abschnitt 18, Seite 43, meist der rechte Cauchy-Green'sche Verzerrungstensor  $g_y = \underline{Dy}^T \underline{Dy}$  mit  $C$  bezeichnet wird und der linke daher mit  $B$ . Im Rahmen dieser Arbeit ist jedoch  $\underline{Dy}^T \underline{Dy}$  nur von sehr untergeordnetem Interesse, so daß wir den wesentlich intuitiveren Buchstaben  $C$  für das häufig benutzte Objekt verwenden wollen.

## 2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

Die meisten in diesem Abschnitt beschriebenen Parametrisierungsverfahren sind auch in den Übersichtsartikeln FLOATER/HORMANN [2005], HORMANN/LÉVY/SHEFFER [2007] und SHEFFER/PRAUN/ROSE [2006] beschrieben.

### Die geometrischen Verzerrungsmaße und ihre Verwendung in der Literatur

- 2.6 Längenterm.** Wir stellen in Rn. 1.14 fest, daß die Dehnung durch  $y$  in Richtung der Eigenvektoren der ersten Fundamentalform  $\underline{Dy}^T \underline{Dy}$  als Eigenwerte derselben auftaucht. Als Maß der „mittleren“ Dehnung aller möglichen Wege verwenden wir deshalb das arithmetische Mittel der Eigenwerte

$$s = \mathbf{sp} C = \mathbf{sp} \underline{Dy} \underline{Dy}^T = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Bezeichnen wir die Zeilen von  $\underline{Dy}$ , also die tangentialen Ableitungen der einzelnen Komponenten von  $y$ , mit  $\underline{\nabla}y_i$ , so ist

$$2.7 \quad C = \underline{Dy} \underline{Dy}^T = \begin{pmatrix} \underline{\nabla}y_1 \cdot \underline{\nabla}y_1 & \underline{\nabla}y_1 \cdot \underline{\nabla}y_2 \\ \underline{\nabla}y_2 \cdot \underline{\nabla}y_1 & \underline{\nabla}y_2 \cdot \underline{\nabla}y_2 \end{pmatrix},$$

und deshalb läßt sich der **Längenterm**  $S$  schreiben als

$$S[y] := \int_M s[y](p) \, dp = \int_M |\underline{\nabla}y_1|^2 + |\underline{\nabla}y_2|^2 = L^{\text{tgl}}[y_1, y_1] + L^{\text{tgl}}[y_2, y_2]$$

mit dem **tangentialen Steifigkeitsoperator**

$$2.8 \quad L^{\text{tgl}}[u, v] := \int_M \underline{\nabla}u \cdot \underline{\nabla}v.$$

Es ist  $L^{\text{tgl}}[u, u]$  auch als **Dirichlet-Energie** von  $u$  bekannt, und seine Minimierung ist ein typisches Problem der Variationsrechnung: Nach Green'scher Formel<sup>10</sup> ist

$$L^{\text{tgl}}[u, v] = \int_M \underline{\nabla}u \cdot \underline{\nabla}v = - \int_M v \Delta u + \int_{\partial^* M} v \partial_n u,$$

wobei  $\partial_n y_i$  die Ableitung von  $y_i$  in Richtung der äußeren Normalen an  $\partial^* M$  darstellt. Wegen  $\partial_v L^{\text{tgl}}[u, u] = 2 L^{\text{tgl}}[u, v]$  gilt damit:

- 2.9 Satz:** Sei  $\partial^* M = \partial_D M \cup \partial_N M$ . Im schwachen Sinne harmonische Abbildungen  $y_1, y_2$  mit Neumann-Nullrandwerten auf  $\partial_N M$  und beliebigen  $\mathcal{L}^2$ -Dirichlet-Randwerten  $y_{1/2}^D$  auf  $\partial_D M$  sind Minimierer von  $S$  über allen Parametrisierungen mit gleicher Randwertvorgabe.

<sup>10</sup> ESCHENBURG/JOST [2007], Gleichung 9.48, Seite 157.

### 2.3. Gütemessung von Parametrisierungen

$L^{\text{tsl}}$  ist eine stetige koerzitive Bilinearform auf dem Raum aller  $\mathcal{H}^{1,2}$ -Funktionen (vgl. Def. 1.9) mit gemischten Dirichlet- und Neumann-Nullrandwerten, daher ist die Lösung bei vorgegebenen Randwerten eindeutig,<sup>11</sup> eine FE-Lösung zu finden ist ein lineares Problem.

Den Startpunkt zu der Forschungsrichtung, Parametrisierungen mit Methoden der Variationsrechnung bzw. Ideen aus dem Bereich der partiellen Differentialgleichungen zu bestimmen und zu optimieren, legten ECK et al. [1995] damit, harmonische Parametrisierungen zu berechnen, um damit zwischen verschiedenen feinen Triangulierungen einer Fläche zu vermitteln. Sie erwähnen bereits, daß die harmonische Parametrisierung auch für das *texture mapping* benutzt werden kann.

**Winkelterm.** In Rn. 1.20 haben wir festgestellt, daß konforme Parametrisierungen  $y$  auf die punktierte Sphäre  $\underline{\Delta}y = (\partial_u - i\partial_v)\delta_p$  im Sinne von Distributionen erfüllen. HAKER et al. [2000] suchen über einen Galerkin-Ansatz nach FE-Approximationen für solches  $y$ . Andere Autoren versuchen, Energien anzugeben, die durch konforme Parametrisierungen minimiert werden. 2.10

So suchen HORMANN/GREINER [2000] nach einem Gütemaß für Parametrisierungen, welches invariant gegen Starrkörperbewegungen im Bildraum (also objektiv nach Rn. 2.3) und Skalierungen ist und welches Nichtinvertierbarkeit stark bestraft. Sie betrachten keine kontinuierliche Parametrisierung  $y$ , sondern setzen direkt eine (auf Dreiecken) stückweise lineare Funktion an, so daß ihre Energie von vornherein nur maximal von den ersten Ableitungen von  $y$  abhängen kann. Die Forderung der Objektivität (und eine unausgesprochene Lokalitätsannahme) ergeben bereits, daß ihre Zielfunktion die Gestalt  $\int \tilde{W}(\underline{D}y)$  besitzen muß, die bei uns in Rn. 2.2 aus Lokalitäts- und Linearitätsannahme gefolgert worden ist. Aus der Objektivitätsannahme schließen sie danach, daß ihre Energiedichte  $\tilde{W}$  ebenfalls nur von den Singulärwerten  $\sigma_i$  von  $\underline{D}y$  abhängen kann. Bekanntlich ist  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , und so kommen sie zu der gleichen Energiedarstellung wie die lineare Elastizitätstheorie aus Rn. 2.5.

Sie schlagen danach die  $\ell_2$ -Kondition  $\kappa_2 = \sigma_1/\sigma_2$  als mögliche Energiedichte vor, aber weil diese sehr schwierig auszuwerten ist, benutzen sie effektiv die Frobenius-Kondition

$$\kappa_F = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Sie sprechen von Parametrisierungen, die dieses Gütemaß minimieren, als **most isometric parametrizations (MIPS)**. HORMANN begründet diesen Namen in seiner Dissertation damit, daß isometrische Parametrisierungen Minimierer seien.<sup>12</sup> Diese Aussage muß insofern eingeschränkt werden, als die Energie explizit invariant gegen Skalierungen sein sollte – und tatsächlich sind alle konformen Parametrisierungen Minimalstellen der MIPS-Energie, denn  $\kappa_F$  ist überall dort minimal, wo  $\sigma_1 = \sigma_2$  gilt. In FLOATER/HORMANN [2005] wird die Methode deshalb auch als eine Variante vorgestellt, konforme Parametrisierungen zu berechnen.

<sup>11</sup> BURGER [2009].

<sup>12</sup> HORMANN [2001], Seite 40.

2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

LÉVY et al. [2002] und DESBRUN/MEYER/ALLIEZ [2002] wählten eine andere Energiedichte, nämlich

$$\tilde{c} := (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

Sie ist offenbar quadratisch, nichtnegativ und Null für konforme Parametrisierungen.

Wir kennen die Summe  $s$  und das Produkt  $d$  der beiden Eigenwerte als Spur und Determinante von  $\underline{Dy}\underline{Dy}^T$ , mit ihnen läßt sich die quadrierte Differenz der beiden ausdrücken als

$$= s^2 - 4d.$$

Dieses Maß für die Konformität von  $y$  skaliert allerdings quadratisch mit Skalierungen von  $y$ . Skalierungsinvariant ist dagegen der im folgenden benutzte **Konformitätsterm**

$$c := \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda_1 \lambda_2} = s^2/d - 4.$$

**2.11 Flächenterm.** Zur Messung der Flächenverzerrung verwenden wir direkt die in Rn. 1.16 besprochene Fundamentalform-Determinante

$$d = \det C = \det \underline{Dy}\underline{Dy}^T = \lambda_1 \lambda_2$$

In FLOATER/HORMANN [2005] wird ein sehr simples Beispiel dafür gegeben, daß flächentreue Parametrisierungen, d. h. Parametrisierungen mit  $d = 1$ , keineswegs eindeutig sind: Der Einheitskreis, parametrisiert in Polarkoordinaten  $(r, \vartheta)$ , werde auf jedem Kreis  $[r = \text{const.}]$  verschieden stark gedreht:

$$y : (r, \vartheta) \mapsto (r, \vartheta + \gamma(r))$$

Für alle differenzierbaren Funktionen  $\gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  ist dieses  $y$  flächentreu.<sup>13</sup> Bei Minimierung von  $|d - 1|$  oder einer ähnlichen Funktion von  $d$  darf man daher keine eindeutigen Minimierer erwarten, mithin sollte der Term nur zusammen mit anderen Verzerrungsmaßen genutzt werden.

In Konsequenz daraus verwenden beispielsweise DEGENER/MESETH/KLEIN [2003] als zu optimierende Gütefunktion ein Produkt aus Winkel- und Flächenverzerrungsmaßen

$$w(\lambda_1/\lambda_2) w(\lambda_1 \lambda_2) \quad \text{mit } w(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Die Gewichtungsfunktion  $w$  nimmt ihr Minimum bei  $t = 1$  an, also minimieren konforme Parametrisierungen den Winkelterm  $w(\lambda_1/\lambda_2)$ , flächentreue den Flächenterm  $w(\lambda_1 \lambda_2)$ .

Die Darstellung

$$\tilde{w}(\sigma_1/\sigma_2) \tilde{w}(\sigma_1 \sigma_2) \quad \text{mit } \tilde{w}(t) = t + \frac{1}{t}$$

in den Singulärwerten  $\sigma_{1/2}$  zeigt deutlich, daß ihr Winkelverzerrungsmaß  $\tilde{w}(\sigma_1/\sigma_2)$  das gleiche wie bei HORMANN/GREINER [2000] ist.

<sup>13</sup> FLOATER/HORMANN [2005], Seiten 165f.

### 2.3. Gütemessung von Parametrisierungen

Dagegen bestimmen DOMINITZ/TANNENBAUM [2010] für eine Fläche vom Sphären-  
typ, gegeben durch eine Anfangsparametrisierung  $y : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ , nach einer Idee von  
MOSER [1965] einen Diffeomorphismus  $u_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  mit  $\det Du_0 = \det Dy^{-1}$  und  
benutzen diesen als Startwert für einen Gradientenabstieg, der unter allen flächentreuen  
Selbstabbildungen der Sphäre einen Minimierer  $u$  des Monge-Funktional

$$\int_{\mathbb{S}^2} d(x, u(x)) \det Dy^{-1}(x) dx$$

sucht. Hierbei ist  $d(x, y) = \arccos(x \cdot y)$  der geodätische Abstand auf  $\mathbb{S}^2$ . Nach dieser  
Konstruktion ist  $u_0 \circ y$  und damit auch  $u \circ y$  eine flächentreue Parametrisierung  $M \rightarrow$   
 $\mathbb{S}^2$ .

**Flächen- und Längenterm für Kartenabbildungen.** Die drei vorgestellten Ver- **2.12**  
zerrungsmaße lassen sich natürlich nicht nur für Parametrisierungen, sondern genauso  
auch für Karten  $x : U \rightarrow M$  definieren. Für topologische Scheiben haben HILDE-  
BRANDT/VAN DER MOSEL [2005] – unter Rückgriff auf JOST [1985] – eine interessante  
Korrespondenz zwischen Längen- und Flächenterm des Skalarprodukts  $g_x$  gezeigt:

**Satz:** Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende geschlossene  $\mathcal{C}^{m,\alpha}$ -Fläche mit Rand- **2.13**  
kurve  $\Gamma$ , und sei  $\mathbb{B}_1(0)$  der zweidimensionale Einheitsball. Betrachte die Klasse  $\mathcal{C}(\Gamma)$   
aller Abbildungen  $x \in \mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{B}_1(0) \rightarrow M)$ , deren Spur auf  $\Gamma$  eine stetige, schwach  
monotone Funktion  $\partial\mathbb{B}_1(0) \rightarrow \partial M$  ist. Definiere auf  $\mathcal{C}(\Gamma)$  die Energien

$$D[x] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}_1(0)} \mathbf{sp} g_x, \quad A[x] = \int_{\mathbb{B}_1(0)} \det g_x.$$

Dann sind Minimierer  $x$  von  $A$  auch Minimierer von  $D$ , es ist  $A[x] = D[x]$ , und  $x$  ist  
 $\mathcal{C}^{m,\alpha}$  und konform.<sup>14</sup>

#### Dreiecksnetz-Ansätze

Einige Ansätze nutzen direkt die diskrete Struktur des Dreiecksnetzes und machen sich  
zunutze, daß flache Dreiecksnetze genau dadurch gekennzeichnet sind, daß die Summe  
der in einem Knoten zusammenstoßenden Winkel  $2\pi$  ergibt und Abweichungen hier-  
von ein direktes Maß für die Krümmung der Dreiecksfläche sind (vgl. Rn. 1.11). Sie  
sind durch ihre größere Nähe zur praktisch vorhandenen Gitterstruktur ungeschlagen  
schnell und daher für praktische Anwendungen in der Computergraphik sehr beliebt.  
Insbesondere der ABF-Algorithmus wird derzeit als der schnellste und robusteste Al-  
gorithmus mit visuell überzeugendem Ergebnis angesehen.

<sup>14</sup> HILDEBRANDT/VAN DER MOSEL [2005] beweisen den Satz anstatt für  $M$  mit dem vom umgeben-  
den euklidischen Raum übernommenen Skalarprodukt für ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit einer arbiträren  
Riemann'schen Metrik, aber diese Modifikation entspricht natürlich nur dem zusätzlichen Hinter-  
schalten einer Isometrie  $\Omega \rightarrow M$ .

2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

**Konvexkombinationsansatz.** Sei  $M$  geometrische Realisierung eines Dreiecksnetzes  $\mathcal{T}$  mit innerer Knotenmenge  $\mathcal{T}^0$  und  $y$  eine auf jedem Dreieck affine Parametrisierung. Dann ist lokale Invertierbarkeit von  $y$  äquivalent dazu, daß die Bilder der Knoten  $p_i$  von  $M$  in der konvexen Hülle ihrer Nachbarbildknoten liegen:  $y$  heißt nach FLOATER [2003] eine **Konvexkombination**, wenn es  $\lambda_{ij} = \lambda_j(p_i) > 0$  gibt, so daß

$$\sum_j \lambda_{ij} = 1, \quad y(p_i) = \sum_j \lambda_{ij} y(p_j)$$

für alle inneren Knoten  $p_i$  gilt. Eine Konvexkombination zu vorgegebenen Gewichten  $\lambda_{ij}$  ist Lösung von

$$\sum_j \bar{S}_{ij} y_{1/2}^j = 0 \quad \text{für alle } p_i \in \mathcal{T}^0$$

mit

$$\bar{S}_{ij} = -\lambda_{ij} \text{ für } i \neq j, \quad \bar{S}_{ii} = 1.$$

FLOATER zeigt die Eindeutigkeit dieser Lösung bei gegebener konvexer Parametrisierung des Randes.<sup>15</sup> Es ergibt sich außerdem eine interessante Verbindung zu diskreten harmonischen Parametrisierungen, die außerdem zeigt, daß FE-Approximationen harmonischer Parametrisierungen ohne zusätzliche Annahmen an die Triangulierung der betrachteten Fläche nicht einmal lokal invertierbar sein müssen.<sup>16</sup>

**2.15 Satz:** Sei  $y$  eine diskret harmonische Parametrisierung gemäß Rn. 1.13. Dann ist  $y$  genau dann eine Konvexkombination, wenn  $\mathcal{T}$  eine Delaunay-Triangulierung<sup>17</sup> ist, d. h. wenn die Summe zweier benachbarter Winkel an inneren Knoten stets kleiner als  $\pi$  ist.<sup>18</sup>

*Beweis.* Es ist  $y$  genau dann eine Konvexkombination, wenn alle Nebendiagonalelemente von  $\bar{L}^{\text{tg1}}$  negativ sind, das heißt  $\cot \alpha_{i1} + \cot \alpha_{j2} < 0$  für alle  $e_{ij} \in \mathcal{T}^1$ . Wegen

$$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

ist dies genau für  $\alpha + \beta > \pi$  erfüllt,

*q. e. d.*

**2.16 Formerhaltende Parametrisierung nach Floater.** Nachdem FLOATER [1997] die Konvexkombinationsmethode allgemein dargestellt hat, gibt er einige mögliche Wahlen für die Matrix  $\bar{S}$  an.<sup>19</sup> Unter ihnen ist eine Parametrisierung, die er als „formerhaltend“ (*shape preserving*) bezeichnet, interessant. Sie bemüht sich, unabhängig von den üblichen geometrischen Maßen eine Formerhaltung sicherzustellen:

<sup>15</sup> FLOATER [1997], Proposition 1, Seite 237.

<sup>16</sup> Der in diesem Fall auftretenden *triangle flip* wurde schon von ECK et al. [1995] beobachtet, von ihnen aber nicht näher untersucht.

<sup>17</sup> HJELLE/DÆLEN [2006], Abschnitt 3.6, Seiten 59ff.

<sup>18</sup> FLOATER [2003], Satz 3.2.

<sup>19</sup> Auf die harmonische Parametrisierung kommt er erst in dem oben genannten, sechs Jahre später erschienenen Artikel zu sprechen.

### 2.3. Gütemessung von Parametrisierungen

Sei  $S(p) = \{T_1, \dots, T_n\}$  der Stern um  $p$  mit Krümmung  $\omega'(p) \neq 0$ , also Winkelsumme  $2\pi t$  mit  $t \neq 1$ . Die äußeren Punkte des Sterns heißen  $p_1, \dots, p_n$ . Dazu konstruiere einen **ebenen Vergleichssterne**  $T'_1, \dots, T'_n$  um einen beliebigen Punkt  $p' \in \mathbb{R}^2$  mit äußeren Ecken  $p'_i$  derart, daß gilt:

- (1) Winkeln bei  $p$  entsprechen mit  $\frac{1}{t}$  skalierte Winkel bei  $p'$ :

$$\alpha_{i0} = t \alpha'_{i0}$$

- (2) Von  $p$  ausgehende Seiten in  $T_i$  sind gleich lang wie die von  $p'$  ausgehenden Seiten in  $T'_i$ :

$$\|p - p_i\| = \|p' - p'_i\|$$

Die Abbildung  $p \mapsto p'$ ,  $p_i \mapsto p'_i$  kann als diskretes Analogon der differentialgeometrischen Exponentialabbildung verstanden werden.

Nun wähle  $\lambda_i(p')$  so, daß

$$p' = \sum \lambda_i(p') p'_i, \quad \lambda_i(p') > 0 \text{ für alle } i.$$

Diese Koeffizienten sind für  $n = 3$  eindeutig, darüber gibt FLOATER eine numerisch stabile Wahl für sie an. Ist jetzt  $p^k$  Ecke einer Triangulierung und besitzt die Nachbarn  $p_i^k = p_{i_k}$ , so setze  $\lambda_{ki} = \lambda_{i_k}(p_k)$  und minimiere bei festgehaltenen Randpunkten

$$\sum \lambda_{ij} \|y^i - y^j\|^2,$$

d. h. löse  $y^i = \sum \lambda_{ij} y^j$ .

**Erweiterung des Floater'schen Ansatzes.** Auf eine mathematisch sehr ungesicherte, aber in Beispielfällen wirkungsvolle Weise, die von YOSHIZAWA/BELYAEV/SEIDEL [2004] vorgestellt wurde, läßt sich der Konvexkombinations-Ansatz von FLOATER benutzen, um die Flächenverzerrung einer durch ihn berechneten Parametrisierung zu verringern: Sei  $d_i$  ein Maß für die Flächenverzerrung um den Knoten  $p_i$  herum, beispielsweise  $\int_{S(p_i)} d$  oder  $\int d \psi_i$  für eine Funktion  $\psi_i$  mit Träger in  $S(p_i)$ , beispielsweise der nodalen Basisfunktion zum Knoten  $p_i$ ,<sup>20</sup> und sei  $y$  eine Konvexkombination bezüglich der Gewichte  $\lambda_{ij}$ . Dann gewichte die einzelnen Knoten gegenüber der vorherigen Konvexkombination neu durch

$$w_{ij} = \lambda_{ij} d_j^\gamma$$

für ein vorab gewähltes Gewicht  $\gamma$ , beispielsweise 1,  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{3}$ . Dies bedeutet eine Multiplikation der (Nichtdiagonal-)Elemente der  $j$ -ten Spalte von  $\bar{S}$  mit  $d_j^\gamma$ . Anschließend werden die  $w_{ij}$  renormalisiert:  $\lambda'_{ij} = w_{ij} / \sum_i w_{ij}$ . Dann wird vermöge der aus  $\lambda'_{ij}$  gebildeten Matrix  $\bar{S}'$  eine neue Parametrisierung berechnet. Dieser Ansatz führt in Beispielen zu einer gegenüber der harmonischen Parametrisierung wesentlich geringeren Flächenverzerrung.

<sup>20</sup> YOSHIZAWA/BELYAEV/SEIDEL [2004] verwenden  $f s$ , wodurch sie bei mehrfacher Anwendung ihrer Methode Flächenstücke bekommen, auf denen die Parametrisierung degeneriert, weil einer der beiden Eigenwerte der ersten Fundamentalform verschwindet.

2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

**Angle based flattening (ABF).** Die Arbeit von SHEFFER/DE STURLER [2001] 2.18 basiert auf der Überlegung, daß für die Berechnung winkeltreuer Parametrisierungen wiederum Winkel und nicht Punktkoordinaten als Optimierungsvariablen benutzt werden sollten. Also schlagen sie vor, die Winkel  $\alpha'_{ij}$  im Bildnetz zu bestimmen, indem

$$\sum_{i,j} \frac{(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij})^2}{\alpha_{ij}^2}$$

unter Nebenbedingungen minimiert wird, die garantieren, daß die  $\alpha'_{ij}$  ein flaches Dreiecksnetz beschreiben:

- (1)  $\alpha'_{ij} \geq 0$  für alle  $T_i \in \mathcal{T}$ ,  $j = 0, 1, 2$
- (2) Jedes Dreieck hat Winkelsumme  $\pi$ :

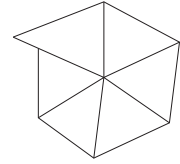
$$\sum_j \alpha'_{ij} = \pi \quad \text{für alle } p_i \in \mathcal{T}^0$$

- (3) Jede innere Ecke ist flach, hat also verschwindende diskrete Krümmung:

$$\sum_{T_j \in S(p_i)} \alpha'_{j0} = 2\pi \quad \text{für alle } p_i \in \mathcal{T}^0$$

- (4) Jeder Stern muß geschlossen sein: Sei  $l_j$  die Länge der Kante  $[p; p_i]$ , dann ist nach dem Sinussatz  $l'_j/l'_{j+1} = \sin \alpha'_{j1}/\sin \alpha'_{j2}$ . In einem Stern gilt dann

$$\frac{l'_2 \dots l'_{r+1}}{l'_1 \dots l'_r} = \frac{\prod \sin \alpha'_{j1}}{\prod \sin \alpha'_{j2}} = 1,$$



denn ansonsten würde das „Herumlaufen“ um den Stern nicht wieder bei  $p_1$  ankommen, vgl. nebenstehende Skizze.

An eine Minimierung unter diesen Nebenbedingungen schließen sie eine Kontrolle, daß der Rand keine Selbstüberschneidungen besitzt (sonst fügen sie diese Überschneidung verhindernde Nebenbedingungen hinzu und optimieren unter diesen noch weiter) und eine Berechnung aller Bildkoordinaten aus den optimierten Winkeln  $\alpha'_{ij}$  an. Sie sind natürlich nur bis auf Skalierungen und Starrkörperbewegungen bestimmt.

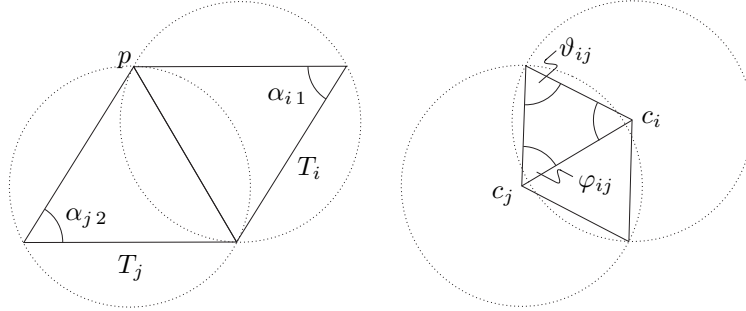
Im Folgeartikel haben SHEFFER et al. [2005] für das mittlerweile sehr populäre Verfahren noch einige Beschleunigungen und Stabilisierungen angegeben.

**2.19 Circle patterns.** Der wesentliche Nachteil des *angle based flattening* ist die nicht-lineare Nebenbedingung (4). KHAREVYCH/SPRINGBORN/SCHRÖDER [2006] umgehen sie geschickt:

Sei  $p \in \mathcal{T}^0$ ,  $T_i \in S(p)$  ein Dreieck an  $p$ . Seien  $c_i$  der Mittelpunkt des Umkreises von  $T_i$  und  $r_i = \|p - c_i\|$  sein Radius. Für ein benachbartes Dreieck  $T_j \in S(p)$  seien  $\vartheta_{ij}$  der



Abbildung 3: Notation zu *circle patterns*



der Kante  $[c_i; c_j]$  gegenüberliegende Winkel im Dreieck  $\Delta(c_i, c_j, p)$  sowie  $\vartheta_{ij}$  und  $\varphi_{ji}$  die beiden anderen Winkel. Dann ist

$$\vartheta_{ij} = \pi - \alpha_{i1} - \alpha_{j2} \quad \text{und} \quad \varphi_{ij} = \arctan2(\sin \vartheta_{ij}, \frac{r_i}{r_j} - \cos \vartheta_{ij})$$

bzw., wenn es gegenüber von  $\alpha_{i1}$  kein Dreieck gibt,  $\vartheta_{ij} = \pi - \alpha_{i1}$  und  $\varphi_{ij} = \alpha_{i1}$ . Und natürlich läßt sich die Kantenlänge  $l_{ij}$  direkt aus  $\varphi_{ij}$  und  $r_i$  berechnen,  $\varphi_{ij}$  aus  $r_i, r_j$  und  $\vartheta_{ij}$ , und für  $\rho_i = \ln r_i$  geben die Autoren eine nichtlineare konvexe Energie  $S_\vartheta$  an, die für die zu  $\vartheta$  passenden Werte von  $\rho$  minimal wird.

Sie nennen dann eine beliebige Zuordnung  $\alpha : \mathcal{T}^0 \rightarrow ]0; \pi[^3$  mit 2.18 (1)–(3) und der Delaunay-Eigenschaft  $\alpha_{i1} + \alpha_{j2} > \pi$  (vgl. Satz 2.15) für alle Kanten  $e_{ij}$  ein **kohärentes Winkelsystem**. Nach BOBENKO/SPRINGBORN [2004] gibt es für jeden Vektor  $\vartheta$ , der gemäß obiger Formel aus einem kohärenten Winkelsystem berechnet wurde, eine geometrische Realisierung  $\mathcal{T}'$  mit Schnittwinkeln  $\vartheta$ . Also schlagen KHAREVYCH/SPRINGBORN/SCHRÖDER [2006] bei gegebenem  $\mathcal{T}$  folgenden Algorithmus vor:

- (1) Finde durch Minimierung wie in Rn.2.18, nur ohne Nebenbedingung (4), ein kohärentes Winkelsystem  $\tilde{\alpha}$  mit minimalem  $\ell_2$ -Abstand zu den Winkeln  $\alpha$  von  $\mathcal{T}$ .
- (2) Berechne die rein aus  $\tilde{\alpha}$  berechenbaren Winkel  $\vartheta$ .
- (3) Minimiere mit einem (Quasi-)Newton-Verfahren  $S_\vartheta$  und erhalte  $\rho$ . Berechne daraus  $r, \varphi$  und  $l$ .
- (4) Lege Anfangspunkt und Orientierung einer beliebigen Kante fest und erhalte so aus  $l$  Koordinaten für alle weiteren Ecken.

Beide winkelbasierten Methoden lassen **Kegelsingularitäten** auf einfache Weise zu: Indem die Planaritäts-Nebenbedingung 2.18 (3) durch  $\sum \alpha_j = 2\pi - \omega'_j$  mit vorgegebener diskreter Krümmung  $\omega'_j$  ersetzt wird, kann sich die Krümmung des Dreiecksnetzes an ausgesuchten Knoten konzentrieren. Bei der Berechnung der Bildkoordinaten wird zwischen den (zuvor vom Anwender einzeln markierten) Kegelsingularitäten eine

## 2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

Verbindungsstrecke entlang der Kanten gesucht und die Parametrisierung dort aufgeschnitten.

Diese Schnitte lassen sich bei vielen praktischen Anwendungen nicht verstecken, weil beispielsweise eine texturierte Fläche im Laufe eines Videos von allen Seiten betrachtet werden soll. Deshalb nutzen SPRINGBORN/SCHRÖDER/PINKALL [2008] die Periodizität und Invarianz gegen  $\frac{\pi}{2}$ -Drehungen der üblicherweise verwendeten Texturen aus: Sie sorgen dafür, daß ihre konforme Parametrisierung an den verdoppelten Schnittkanten bis auf Vielfache der Texturbitmap-Periode und Drehungen um rechte Winkel übereinstimmt. Damit bleibt die Parametrisierung entlang der Schnittkanten zwar unstetig, aber auf der texturierten Fläche ist diese Unstetigkeit nicht mehr zu erkennen.

### 2.20 Eine elastische Energieformulierung

Wir selbst bilden für die Zielfunktion  $\mathcal{E}[y] = \int_M W(s, d)$  wie bereits CLARENZ/LITKE/RUMPF [2004] eine nichtlineare, aber additive Kombination aus Längen-, Flächen- und Winkelterm als Energiedichte:

$$W(s, d) = w_s(s) + w_d(d) + w_c(s^2/d - 4)$$

Es ist sehr schwer, durch Kontrolle der Randparametrisierung zu verhindern, daß  $y$  global invertierbar bleibt. Die Invertierbarkeit im Inneren allerdings können wir über Invertierbarkeit von  $C$  kontrollieren. Sie ist äquivalent zu  $d = 0$ , also wird  $w_d$  einen Pol bei 0 besitzen.

Analog zu CLARENZ/LITKE/RUMPF [2004] wählen wir deshalb für ein  $\gamma > 0$

$$w_s : s \mapsto K_s s, \quad w_d : d \mapsto K_d(\sqrt{d} + \kappa/d^\gamma), \quad w_c : c \mapsto K_c c.$$

Die gesamte Energie lautet damit

$$\mathcal{E}[y] = \int_M K_s \operatorname{sp} C + K_d \sqrt{\det C} + \frac{K_d \kappa}{(\det C)^\gamma} + K_c \left( \frac{\operatorname{sp}^2 C}{\det C} - 4 \right)$$

Im allgemeinen werden wir nur Parametertripel zulassen, in denen alle drei Gewicht echt positiv sind. Eine Ausnahme hiervon bilden die harmonischen Parametrisierungen für  $(K_s, K_d, K_c) = (1, 0, 0)$ , bei denen aber die Parametrisierung des Randes festgehalten wird (vgl. Satz 2.9).

**Bemerkung:** Wir werden in Satz 3.4 feststellen, daß für  $\gamma\kappa = \frac{1}{2} + K_s/K_d$  lokale Isometrien auch Minimierer von  $\mathcal{E}$  sind.

## 2.4. Nebenbedingungen

Objektivität und Isotropie erzwingen, daß  $\mathcal{E}[y]$  konstant bleibt, wenn Isometrien im Urbild- und Bildbereich vor- und nachgeschaltet werden. Dadurch ergeben sich Freiheitsgrade für Minimierer, die wir durch Nebenbedingungen festlegen wollen.

Wir fordern, daß (1) die Parametrisierung um den Nullpunkt zentriert ist und (2) die Hauptachsen von  $C$  im Integralmittel auf den Koordinatenachsen liegen:

$$2.22 \quad \eta_1[y] := \int_M y \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \eta_2[y] := \frac{1}{2} \int_M C_{12} \stackrel{!}{=} 0$$

$C$  ist symmetrisch, also bedeutet  $\eta_2[y] = 0$ , daß sie im Integralmittel eine Diagonalmatrix ist.

Wir fassen beide Nebenbedingungen in einer Funktion  $h : \text{Par}(M) \rightarrow \mathbb{R}^3$  zusammen und nennen  $y \in \text{Par}(M)$  mit  $h[y] = 0$  eine **zulässige Parametrisierung**.

**Satz:** Sei  $y$  zulässig und  $q$  eine orientierungserhaltende Isometrie des  $\mathbb{R}^2$ . Ist dann  $q \circ y$  ebenfalls zulässig, so muß  $q$  eine Drehung um  $n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sein. 2.23

*Beweis.* Jede orientierungserhaltende Isometrie des  $\mathbb{R}^2$  hat die Form  $q : x \mapsto Qx + b$  mit  $Q \in SO_2(\mathbb{R}^2)$ , also einer Drehung um einen Winkel  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Betrachte nun

$$0 = \eta_1[q \circ y] = \int Qy + b = b + Q \int y$$

und andererseits

$$0 = \eta_1[y] = \int y \quad \Rightarrow \quad 0 = Q \int y.$$

Das zeigt bereits  $b = 0$ . Weiterhin ist  $D(Qy) = QDy$ , also

$$\int \underline{DQy} \underline{DQy}^T = Q \left( \int \underline{Dy} \underline{Dy}^T \right) Q^T$$

Da  $y$  zulässig angenommen war, ist  $\int C = \int \underline{Dy} \underline{Dy}^T$  diagonal. Unter Basiswechsel durch eine Drehung um  $\alpha$  bleibt eine Matrix aber nur diagonal, wenn  $\alpha$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, *q. e. d.*

### Darstellung durch Massen- und Steifigkeitsoperator 2.24

$\eta_1$  läßt sich mithilfe des **Massenoperators**

$$M[u, v] := \int_M u v \quad \text{für } u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

und der konstanten Eins-Funktion 1 als

$$h_1[y] = M[1, y_1], \quad h_2[y] = M[1, y_2]$$

schreiben.  $\eta_2$ , als die dritte Komponente von  $h$ , ist

$$\frac{1}{2} \int_M (\underline{Dy} \underline{Dy}^T)_{12} = \frac{1}{2} \int_M \underline{\nabla} y_1 \cdot \underline{\nabla} y_2 = \frac{1}{2} L^{\text{tg}1}[y_1, y_2].$$

## 2.5. Existenz von Minimierern

Wir haben in Satz 2.9 bereits gesehen, daß Minimierer von  $\mathcal{E}_s$  harmonisch sind, also als Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt werden können. Genauso haben wir in Rn. 1.20 eine Differentialgleichung gefunden, die von konformen Parametrisierungen gelöst wird, und in Rn. 2.10 über Minimierung der Energie  $\int \tilde{c}$  eine davon unabhängige Möglichkeit angesprochen, konforme  $y$  als Lösung eines quadratischen Optimierungsproblems zu bestimmen.

Für unsere aus den einzelnen Verzerrungsmaßen zusammengesetzte Energie lassen sich darüber hinaus einige Ergebnisse der Variationsrechnung verwenden. Die Standard-Verfahren der direkten Methode lassen sich allerdings, wie stets bei elastischen Energien, nicht anwenden, denn  $\mathcal{E}[y]$  läßt sich nicht durch  $|\underline{D}y|$  (in diesem Abschnitt stets die Frobeniusnorm) nach oben beschränken, da ja  $\mathcal{E}[y] \rightarrow \infty$  strebt für  $\det \underline{D}y \underline{D}y^T \rightarrow 0$ . Stattdessen ziehen wir  $y$  über eine Karte zu einer zweidimensionalen Deformation zurück und verwenden für diese die Ergebnisse aus BALL [1976].

Sei  $M$  einfach zusammenhängend und berandet,  $x : U \rightarrow M$  eine lipschitzstetig differenzierbare Karte. Wir verstehen in diesem Abschnitt  $Dy$  und  $Dx$  ausnahmsweise als invertierbare lineare Abbildungen zwischen den entsprechenden Tangentialräumen (nach Voraussetzung existieren globale Basisvektorfelder). Setze  $u := y \circ x$ . Dann ist nach Kettenregel  $Du = Dy Dx^T$ , also

$$C = P Dy (P Dy)^T = P Dx^{-T} Du Du^T Dx^{-1} P.$$

Setze  $\tilde{C} := Du Du^T$  mit Eigenwerten  $\tilde{\lambda}_i$ . Offensichtlich ist

$$\lambda_{\min}(C) \sim \lambda_{\min}(\tilde{C}) \quad \text{und} \quad \lambda_{\max}(C) \sim \lambda_{\max}(\tilde{C}),$$

und genauso lassen sich  $s$  und  $\tilde{s}$  gleichmäßig auf  $M$  gegeneinander abschätzen, genauso  $d$  und  $\tilde{d}$ . – Wir können nun

$$C = P Dx^{-T} \tilde{C} Dx^{-1} P$$

ersetzen und  $\mathcal{E}$  als von  $u$  abhängig auffassen.

### Funktionen mit endlicher Energie sind Parametrisierungen

Es ist bei der Definition von  $\text{Par}(M)$  offen geblieben, wie die Bijektivität fast überall zugesichert werden kann. Wir benutzen dafür das bekannte Ergebnis von BALL über die Invertierbarkeit schwach differenzierbarer Funktionen:

**2.25 Satz:** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen, beschränkt, zusammenhängend mit Lipschitzrand,  $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Homöomorphismus auf sein Bild. Sei  $u \in \mathcal{H}^{1,p}(\Omega)^2$  mit  $p > 2$  und  $u = u_0$  auf  $\partial\Omega$ . Sei  $\det Du > 0$  fast überall und

$$\int |Du^{-1}|^q \det Du \quad \text{endlich für ein } q > 2.$$

Dann ist  $u$  ein Homöomorphismus  $U \rightarrow u_0(U)$ .<sup>21</sup>

<sup>21</sup> BALL [1981], Theorem 2, Seite 320.

**Bemerkung:** Ist  $U$  einfach zusammenhängend, so genügt schon ein Homöomorphismus  $\tilde{u}_0$  von  $\partial\Omega$  auf eine Jordan-Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  anstatt des im Satz geforderten  $u_0$ . Er existiert offensichtlich, sobald  $u_0(\partial\Omega)$  keine Selbstdurchdringungen aufweist.

*Beweis.* Ein einfach zusammenhängendes berandetes Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  ist eine topologische Scheibe. Jordan-Kurven beranden ebenfalls einfach zusammenhängende Gebiete, und zwischen zwei topologischen Scheiben existiert nach Definition derselben stets ein Homöomorphismus, *q. e. d.*

**Satz:** Seien  $p > 4$  und  $\gamma \geq \frac{p/2}{p-2}$ . Dann gilt für  $y \in \mathcal{H}^{1,p}(M)$  ohne Selbstdurchdringungen am Rand und mit  $\det Du > 0$  fast überall **2.26**

$$\mathcal{E}[y] \text{ endlich} \quad \Rightarrow \quad y \in \text{Par}(M).$$

*Beweis.* Nach Satz 2.25 genügt es, die Endlichkeit von  $\int |Du^{-1}|^q \det Du$  für ein  $q > 2$  zu zeigen. Wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ist für  $2 \times 2$ -Matrizen  $|F^{-1}| = (\det F)^{-1} |F|$ , also nach Hölder

$$\begin{aligned} \int |F^{-1}|^q \det F &= \int |F|^q (\det F)^{1-q} \\ &\leq \left( \int |F|^{q/r} \right)^r \left( \int (\det F)^{\frac{1-q}{1-r}} \right)^{1-r} \end{aligned}$$

für beliebiges  $0 < r < 1$ . Wir sind also fertig, sobald

$$\int \tilde{s}^{q/2r} \quad \text{und} \quad \int \tilde{d}^{\frac{1-q}{2-2r}} \quad \text{endlich}$$

sind.

**Erster Streich.** Mit  $y \in \mathcal{H}_\varphi^{1,p}$  ist auch  $u \in \mathcal{H}^{1,p}$ , also nach Hölder  $\tilde{C} \in \mathcal{L}^{p/2}$  und daher  $\tilde{s} \in \mathcal{L}^{p/2}$ . Nach dem Satz über die Schachtelung der Lebesgue-Räume<sup>22</sup> folgt  $\tilde{s} \in \mathcal{L}^{q/2r}$ , sobald

$$\frac{q}{2r} < \frac{p}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r > \frac{q}{p}$$

ist. Es solches  $r$  können wir finden, denn es ist nach Voraussetzung  $p > 2$ , also können wir ein  $q > 2$  so wählen, daß  $\frac{q}{p} < 1$  ist.

**Zweiter Streich.** Da die Energie endlich ist, ist  $1/\tilde{d} \in \mathcal{L}^\gamma$ . Nach dem gleichen Schachtelungssatz wie oben sind wir fertig, wenn

$$\gamma > \underline{\gamma} := \frac{q-1}{2(1-r)}$$

<sup>22</sup> ADAMS [1975], Theorem 2.8, Seite 25.

## 2. Formulierung einer elastischen Energie als Zielfunktion

ist. Sei  $r = \alpha \frac{q}{p}$  mit  $1 < \alpha < \frac{p}{q}$ . Damit ist

$$2\underline{\gamma} = \frac{pq - p}{p - \alpha q}.$$

Sei nun ein  $\gamma$  als

$$2\gamma = t \frac{p}{p-2}, \quad t > 1$$

gegeben. Wir sind fertig, sobald  $\alpha > 1$ ,  $q > 2$  existieren, so daß

$$t \frac{p}{p-2} > \frac{pq - p}{p - \alpha q}$$

$$\Leftrightarrow q(2 - p - \alpha t) > 2 - (1 + t)p$$

ist. Hierin ist auf der linken Seite  $2 - \alpha t < 1$  und auf der rechten  $1 + t < 2t$ , damit ist zu erfüllen:

$$q < 2 \frac{tp - 1}{p - 1}$$

Wegen  $t > 1$  ist der Bruch größer als 1, damit ist das zulässige Intervall

$$\left] 2; \min \left( p, 2 \frac{1 - tp}{1 - p} \right) \left[$$

für  $q$  nichtleer. Danach kann  $\alpha$  noch beliebig (aber natürlich echt zwischen 1 und  $\frac{q}{p}$ ) gewählt werden, *q. e. d.*

### 2.27 Minimierer in $\text{Par}(M)$

Für eine Matrix  $A$  sei  $w(A)$  der Vektor ihrer Unterdeterminanten. Eine Funktion  $F : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **polykonvex**, wenn es ein konvexes  $g$  mit  $F(A) = g(w(A))$  gibt.

Unsere Energie erfüllt diese Voraussetzung: Nach dem Determinantenmultiplikationssatz ist  $\mathbf{det} C$  an jedem Punkt proportional zu  $\mathbf{det} \tilde{C}$ . Alle drei  $\mathbf{det} C$  enthaltenden Terme sind also konvex in  $\mathbf{det} Du$ . Die Einträge von  $C$  sind linear in den Einträgen von  $\tilde{C}$ , damit sind  $\mathbf{sp} C$  und  $\mathbf{sp}^2 C$  konvex in letzteren.

Außerdem ist  $\mathcal{E}[u] \geq \alpha |Du|^2 + (\mathbf{det} Du)^2$ , damit<sup>23</sup> folgt nach BALL [1976], Theorem 7.3, Seite 376, die Existenz eines Minimierers  $u \in \mathcal{H}_\varphi^{1,2}(x^{-1}(M))$ . Nach Satz. 2.26 ist  $y \in \text{Par}(x^{-1}(M))$ .

## 2.6. Übergang vom Nullniveau zu Parallelfächen

Seien  $Q$  und  $\varphi$  wie in Rn. 1.4,

$$M_t := [\varphi = t], \quad M^\delta := \bigcup_{|t| < \delta} M_t = [-\delta < \varphi < \delta]$$

<sup>23</sup> Für diese Formulierung der Voraussetzungen des folgenden Satzes von BALL vgl. CIARLET [1988], Seiten 371f.

## 2.6. Übergang vom Nullniveau zu Parallelflächen

und  $\Omega$  eine in  $Q$  offene Umgebung von  $M^\delta$ . Wenn  $\delta$  und  $\Omega$  so klein gewählt sind, daß  $\nabla\varphi \neq 0$  auf ganz  $\Omega$  ist, wird wie auf  $M = M_0$  durch  $n = \nabla\varphi/|\nabla\varphi|$  ein glattes Normalenfeld definiert.

Für eine einzelne Fläche haben wir in Def. 1.9 mit  $\mathcal{H}^{1,p}(M)$  die Menge der tangential schwach differenzierbaren  $\mathcal{L}^p$ -Funktionen bezeichnet. Sie ist verträglich mit der Definition schwacher tangentialer Ableitungen auf ganz  $\Omega$ , wie sie in DZIUK/ELLIOTT [2008] und BURGER [2009] gegeben wird: Schwache tangentiale Ableitungen sind im Kontext von Parallelflächen auf ganz  $\Omega$  meßbare Vektorfelder  $\eta$ , die Gl. 1.8 in der mittels Koflächenformel<sup>24</sup> auf ganz  $\Omega$  ausgeweiteten Form

$$\int_{\Omega} |\nabla\varphi| (\eta \underline{\nabla}\vartheta + \vartheta \underline{\nabla}\eta) = - \int_{\Omega} |\nabla\varphi| \eta \vartheta Hn + \int_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \eta \vartheta P n^\Omega \quad \text{für alle } \vartheta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

erfüllen. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir nun mit  $\mathcal{H}_\varphi^{1,p}(\Omega)$ . Man kann zeigen,<sup>25</sup> daß  $u \in \mathcal{H}_\varphi^{1,p}(\Omega)$  genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- (a)  $u|_{M_t}$  ist eine  $\mathcal{H}^{1,p}(M_t)$ -Funktion für fast alle  $t$ ,
- (b)  $t \mapsto \|u\|_{\mathcal{H}^{1,p}(M_t)}$  ist eine  $\mathcal{L}^p$ -Funktion.

### Erweiterung des Energiefunktional auf Parallelflächen

2.28

Wir haben die Energie  $y_t$  einer einzelnen Fläche  $M_t$  nach Rnn. 2.2 und 2.20 als

$$\mathcal{E}[y_t] = \int_{M_t} W[y_t](p) \, dp$$

gargestellt. Einer simultanen Parametrisierung  $y$  einer Familie von Flächen  $\Omega = M^\delta$  können wir dann sinnvoll die Energie

$$\int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{E}[y|_{M_t}] \, dt$$

zuordnen. Dies ist nach Koflächenformel

$$= \int_{\Omega} |\nabla\varphi| W[y|_{M_t}](p) \, dp.$$

Da wir mit gerichteten Abstandsfunktionen arbeiten, fällt der Faktor  $|\nabla\varphi|$  im weiteren fort. Die Energiedichte  $W$  sowie die einzelnen Bestandteile  $\mathcal{E}_s$ ,  $\mathcal{E}_d$  und  $\mathcal{E}_c$  der Energie werden wir im folgenden direkt auf ganz  $\Omega$  definieren, so daß das Integral über die Energien der verschiedenen Flächen die Form

$$= \int_{\Omega} w_s(s) + w_d(d) + w_c(s^2/d - 4)$$

bekommt.

<sup>24</sup> Nach einem Resultat von DE GIORGI [1954] für  $BV$ -Funktionen wurde von FEDERER [1959] die Koflächenformel für Fréchet-differenzierbare Funktionen bewiesen. MALÝ/SWANSON/ZIEMER [2002] geben einen Beweis für  $\mathcal{H}^{1,2}$ -Funktionen.

<sup>25</sup> DECKELNICK et al. [2009], Korollar 2.1.

**Kopplung über die Niveaulächen hinweg**

Bis hierhin sind die Parametrisierungen der einzelnen Niveaumengen nicht miteinander gekoppelt. Daraus folgt nicht nur die analytische Nicht-Eindeutigkeit von Minimierern, sondern auch numerische Instabilität: Also Startwert für numerische Optimierung einer Parametrisierung werden wir harmonische Parametrisierungen bezüglich einer vorgegebenen Parametrisierung des Randes nutzen. Es kann nun Niveaumengen geben, die nicht mit den vorgegebenen Randwerten gekoppelt sind und auf denen sich daher eine konstante Parametrisierung einstellen möchte. An diesen Knoten wird typischerweise der Determinantenterm  $d$  extrem groß werden.

Zusätzlich zur Energie der einzelnen Niveaulächen nehmen wir daher noch einen Normalenkopplungsterm

$$\mathcal{E}_n[y] = \int_{\Omega} w_n(\rho) \quad \text{mit} \quad \rho = |\partial_n y|, \quad w_n(\rho) = K_n \rho^2$$

auf:

$$\mathcal{E}[y] := \int_{|t| < \varepsilon} \mathcal{E}[y|_{M_t}] + \mathcal{E}_n[y]$$

Im folgenden verwenden wir niemals die Parametrisierung  $y_t$  einer einzelnen Niveauläche, sondern grundsätzlich nur noch die simultane Parametrisierung  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so daß sich die Einführung eines neuen Symbols für diese Energie nicht lohnen würde.

Der Kopplungsterm läßt sich aus dem klassischen **Steifigkeitsoperator**

$$L[u, v] := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

und dem tangentialen Steifigkeitsoperator berechnen:

**Hilfssatz:** *Definiere den **Normalen-Steifigkeitsoperator**  $L^n := L - L^{tg}$ . Dann ist  $\mathcal{E}_n[y] = K_n L^n[y, y]$ .*

*Beweis.* Für Funktionen  $u$  und  $v$ , die in ganz  $\Omega$  definiert sind, läßt sich  $L^{tg}[u, v] = \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$  aus Gl. 2.8 auch ausdrücken als

$$L^{tg}[u, v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot P \nabla v,$$

und Einsetzen von  $P = \text{id} - n \otimes n$  gibt dann

$$\begin{aligned} L^n[u, v] &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot (n \otimes n \nabla v), \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot n)(n \cdot \nabla v), \end{aligned}$$

*q. e. d.*



Seine Ableitungen lassen sich damit analog zu denen von  $\mathcal{E}_s$  aus Rn. 3.1 leicht berechnen.

### Bibliographische Anmerkung zur Level-Set-Methode

2.30

Die Niveauflächen- oder Level-Set-Methode wurde nach Aussage von OSHER<sup>26</sup> von ihm und SETHIAN<sup>27</sup> zur Simulation sich gemäß einer partiellen Differentialgleichung bewegender Flächen eingeführt. Indem die in der Finiten-Elemente-Methode auftauchenden Größen an festen und sich nicht mit der Fläche bewegenden Punkten berechnet und gespeichert werden, wurde diese Methode analog zur Eulerschen Betrachtungsweise der klassischen Mechanik auch als „Eulersche FEM“ bezeichnet.

Die Idee, auch Differentialgleichungen auf unbewegten Flächen nicht auf dem Knoten einer Triangulierung zu lösen, sondern auf Knoten eines Gitters für den umgebenden Raum, stammt von BERTALMIO et al. [2001]. Allerdings werden die dort betrachteten Probleme nicht simultan auf allen Flächen innerhalb eines Bandes um die eigentlich interessierende Fläche gelöst (Koflächenformel-Ansatz), sondern die Integrale werden über den Dirac-Operator als zusätzlichen Integrationsfaktor nur in eine höhere Dimension transportiert, sie notieren dies als

$$\int_M W(p) \, dp = \int_\Omega W(p) \delta(\varphi(p)) \, dp \quad \text{im Sinne von Distributionen.}^{28}$$

Dieser Artikel wird weithin als Initialzündung, geometrische Probleme von triangulierten auf implizite Flächen zu übertragen, angesehen.<sup>29</sup>

---

<sup>26</sup> OSHER [2003], Seite 2.

<sup>27</sup> OSHER/SETHIAN [1988].

<sup>28</sup> BERTALMIO et al. [2001], Seite 6.

<sup>29</sup> So DZIUK/ELLIOTT [2008]; DECKELNICK et al. [2009]; CLARENZ/LITKE/RUMPF [2004]; BURGER [2009].



# 3. Endlichdimensionale Minimierung der Verzerrungsenergie

## 3.1. Erste und zweite Variation der Energie im Kontinuierlichen

Für ein Newton-Verfahren (vgl. Algorithmus 3.23) müssen Gradient und Hesse'sche Form der Energie

$$\mathcal{E}_\Omega = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_d + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_n : \quad y \mapsto \int_\Omega W(s, d) + w_n(\rho) = \int_\Omega w_s(s) + w_d(d) + w_c(c) + w_n(\rho)$$

implementiert werden. Kürzen wir die Ableitungen der Terme  $s$ ,  $d$ ,  $c$  und  $\rho$  in Richtung  $\alpha$  mit  $s'_\alpha$  etc. ab, so lautet die erste Variation ganz allgemein

$$\mathbf{D}\mathcal{E}[y][\alpha] = \int_\Omega w'_s(s) s'_\alpha + w'_d(d) d'_\alpha + w'_c(c) c'_\alpha + w'_n(\rho) \rho'_\alpha,$$

genauso die zweite

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2\mathcal{E}[y][\alpha, \beta] = \int_\Omega & w'_s(s) s''_{\alpha\beta} + w''_s(s) s'_\alpha s'_\beta \\ & + w'_d(d) d''_{\alpha\beta} + w''_d(d) d'_\alpha d'_\beta \\ & + w'_c(c) c''_{\alpha\beta} + w''_c(c) c'_\alpha c'_\beta \\ & + w'_n(\rho) \rho''_{\alpha\beta} + w''_n(\rho) \rho'_\alpha \rho'_\beta. \end{aligned}$$

Sie sind (bi-)lineare Funktionale auf  $\text{Par}(\Omega)$ . **Gradient**  $\nabla\mathcal{E}[y] \in \text{Par}(M)$  und **Hesse'sche Abbildung**  $H\mathcal{E}[y] \in \text{Lin}(\text{Par}(M), \text{Par}(M))$  bezüglich eines Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sind nach dem Riesz'schen Darstellungssatz<sup>1</sup> eindeutig bestimmt durch

$$\langle \nabla\mathcal{E}[y], \alpha \rangle = \mathbf{D}\mathcal{E}[y][\alpha] \quad \text{bzw.} \quad \langle H\mathcal{E}[y]\alpha, \beta \rangle = \mathbf{D}^2\mathcal{E}[y][\alpha, \beta].$$

Die Ableitungen des Normalenterms werden wir dabei nicht weiter betrachten, sie ergeben sich völlig analog denen des Längenterms.

---

<sup>1</sup> ALT [2006], Satz 4.1, Seite 163.

### Erste und zweite Variation des Längenterms $\mathcal{E}_s$

3.1

Der tangentielle Steifigkeitsoperator  $L^{\text{tg1}}$  aus 2.7 ist bilinear und symmetrisch, wegen  $S = L^{\text{tg1}}[y_1, y_1] + L^{\text{tg1}}[y_2, y_2]$  ist also

$$\mathbf{D}S[y][\alpha] = \int_{\Omega} s'_{\alpha} = \int_{\Omega} 2 \mathbf{sp} \underline{D}\alpha \underline{D}y^T = 2(L^{\text{tg1}}[\alpha_1, y_1] + L^{\text{tg1}}[\alpha_2, y_2])$$

und

$$\mathbf{D}^2 S[y][\alpha, \beta] = \int_{\Omega} 2 \mathbf{sp} \underline{D}\alpha \underline{D}\beta^T = 2(L^{\text{tg1}}[\alpha_1, \beta_1] + L^{\text{tg1}}[\alpha_2, \beta_2]).$$

### 3.2 Erste und zweite Variation des Flächenterms $\mathcal{E}_d$

Ableitungen von Produkten von Matrizen ergeben naturgemäß wenig übersichtliche Terme. Um wenigstens einige wenige Klammern zu vermeiden, vereinbaren wir, daß innerhalb dieses Abschnitts Ausdrücke wie  $\partial_F \mathbf{det} F(A)$  die Ableitung der Funktion  $F \mapsto \mathbf{det} F$  in Richtung  $A$  bedeuten mögen.

Es gilt<sup>2</sup>  $\partial_F \mathbf{det} F(A) = \mathbf{det} F \mathbf{sp} F^{-1}A$ , damit haben wir für die erste Ableitung des Determinantenterms  $d'_{\alpha} = EV(\underline{D}y, \underline{D}\alpha)$ , worin

$$\begin{aligned} EV(F, A) &:= \partial_F \mathbf{det} FF^T(A) \\ &= \mathbf{det} FF^T \mathbf{sp} ((FF^T)^{-1}(AF^T + FA^T)). \end{aligned}$$

Also ist die erste Variation des Flächenterms

$$\mathbf{D} \mathcal{E}_d[y][\alpha] = \int_{\Omega} w'_d(d) EV(\underline{D}y, \underline{D}\alpha).$$

Als nächstes leiten wir die beiden Summanden in der Spur ab. In der ersten Variation tauchen Matrixinverse auf, für die wir  $\partial_F F^{-1}(A) = -F^{-1}AF^{-1}$  benutzen.<sup>3</sup> Damit

$$\partial_F (FF^T)^{-1} AF^T(B) = -(FF^T)^{-1}(BF^T + FB^T)(FF^T)^{-1} AF^T + (FF^T)^{-1} AB^T$$

und analog

$$\partial_F (FF^T)^{-1} FA^T(B) = -(FF^T)^{-1}(BF^T + FB^T)(FF^T)^{-1} FA^T + (FF^T)^{-1} BA^T.$$

<sup>2</sup> ESCHENBURG/JOST [2007], Lemma 8.2.1, Seite 100.

<sup>3</sup> DEUFLHARD/HOHMANN [2002], Lemma 2.8, Seite 34.

### 3.1. Erste und zweite Variation der Energie im Kontinuierlichen

Die zweite Richtungsableitung  $d''_{\alpha\beta}$  von  $\mathbf{det} FF^T$  in Richtungen  $A$  und  $B$  ist also

$$\begin{aligned} ZV(F, A, B) &:= \partial_{FF}^2 \mathbf{det} FF^T(A, B) \\ &= \partial_F \left( \mathbf{det} FF^T \mathbf{sp} \left( (FF^T)^{-1} (AF^T + FA^T) \right) \right) (B) \\ &= \mathbf{det} FF^T \mathbf{sp} \left( - (FF^T)^{-1} (BF^T + FB^T) (FF^T)^{-1} (AF^T + FA^T) \right. \\ &\quad \left. + (FF^T)^{-1} (AB^T + BA^T) \right) \\ &\quad + \mathbf{det} FF^T \mathbf{sp} \left( (FF^T)^{-1} (BF^T + FB^T) \right) \\ &\quad \cdot \mathbf{sp} \left( (FF^T)^{-1} (AF^T + FA^T) \right). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Bei allen Produkten der Art  $\underline{D}\eta\underline{D}\vartheta^T$  taucht die Projektionsmatrix  $P$  eigentlich doppelt auf, allerdings beide Male in der Mitte:

$$\underline{D}\eta\underline{D}\vartheta^T = D\eta P P^T D\vartheta^T$$

Da für Orthogonalprojektionen  $P = P^T$  und  $P^2 = P$  gilt, ist sie dennoch nur für einen der beiden Faktoren nötig.

Auch in  $EV$  taucht das zweite Argument  $A$  nur in Kombination mit dem ersten auf, so daß nur die Zeilen von  $F$  auf  $TM$  zu projizieren sind:  $EV(FP, AP) = EV(FP, A)$ .

Damit ist die zweite Variation der Flächendeformationsenergie

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \mathcal{E}_d[y][\alpha, \beta] &= \int_{\Omega} w_d''(d) EV(\underline{D}y, D\beta) EV(\underline{D}y, D\alpha) \\ &\quad + w_d'(d) ZV(\underline{D}y, \underline{D}\alpha, D\beta). \end{aligned}$$

### Erste und zweite Variation des Konformitätsterms $\mathcal{E}_c$

3.3

Nach Kettenregel ist die erste Ableitung von  $c = s^2/d - 4$

$$c'_\alpha = \frac{2s s'_\alpha}{d} - \frac{s^2 d'_\alpha}{d^2},$$

die zweite

$$c''_{\alpha\beta} = \frac{2s s''_{\alpha\beta}}{d} + \frac{2s'_\alpha s'_\beta}{d} - \frac{2s s'_\alpha d'_\beta}{d^2} - \frac{2s s'_\beta d'_\alpha}{d^2} + \frac{2s^2 d'_\alpha d'_\beta}{d^3} - \frac{s^2 d''_{\alpha\beta}}{d^2}.$$

Verketten wir dies mit der Gewichtungsfunktion  $w_c$ , so erhalten wir ganz analog zu  $\mathcal{E}_d$

$$\mathbf{D} \mathcal{E}_c[y][\alpha] = \int_{\Omega} w'_c(c) c'_\alpha, \quad \mathbf{D}^2 \mathcal{E}_c[y][\alpha, \beta] = \int_{\Omega} w'_c(c) c''_{\alpha\beta} + w''_c(c) c'_\alpha c'_\beta$$

### Zur Wahl der Gewichtungsfunktionen

3.4

Die Gewichtungsfunktionen

$$w_s : s \mapsto K_s s, \quad w_d : d \mapsto K_d(\sqrt{d} + \kappa/d^\gamma), \quad w_c : c \mapsto K_c c$$

aus Rn. 2.20 sind sicherlich sinnvoll gewählt, wenn sie für lokale Isometrien  $y$ , also  $C = \mathbb{1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , ihr Minimum annehmen. Das ist bei

$$s = 2, \quad d = 1, \quad c = 0$$

der Fall. Das erledigt, wie oben behauptet, eine spezielle Wahl von  $\kappa$ :

**Satz:** Bei Wahl der obigen Gewichtungsfunktionen sind in Normalenrichtung konstante lokale Isometrien Minimierer von  $\mathcal{E}$ , sobald

$$\gamma\kappa = \frac{1}{2} + K_s/K_d.$$

*Beweis.* Ableitungen der Flächen-Gewichtungsfunktion  $w_d$  sind

$$w'_d : d \mapsto K_d(\frac{1}{2}d^{-1/2} - \gamma\kappa d^{-(\gamma+1)}), \quad w''_d : d \mapsto K_d(-\frac{1}{4}d^{-3/2} + \gamma(\gamma+1)\kappa d^{-(\gamma+2)}).$$

Setzen wir  $FF^T = \mathbb{1}$  in 3.2 ein, so ist

$$EV(F, A) = 2 \operatorname{sp} AF^T,$$

also  $EV(\underline{D}y, \underline{D}\alpha) = \mathbf{DS}[y][\alpha]$ . Die Ableitung des Konformitätsterms fällt weg, da Parametrisierungen mit  $\lambda_1 = \lambda_2$  globale Minimierer und also kritische Punkte von  $\mathcal{E}_c$  sind. Ebenso ergibt auch Einsetzen von  $s'_\alpha = d'_\alpha$  in 3.3, daß  $c'_\alpha = 0$  ist. Damit bleibt nur noch übrig:

$$\mathbf{DW}[y][\alpha] = 2 K_s \operatorname{sp} \underline{D}y \underline{D}\alpha^T + 2 w'_d(1) \operatorname{sp} \underline{D}y \underline{D}\alpha^T.$$

Dies kann nur dann Null für beliebige Variationsrichtungen  $\alpha$  ergeben, wenn  $K_s + w'_d(1) = 0$  ist, darin  $w'_d(1) = K_d(\frac{1}{2} - \gamma\kappa)$  eingesetzt ergibt  $\gamma\kappa = \frac{1}{2} + K_s/K_d$ .

Bleibt noch zu zeigen, daß die zweite Variation hier positiv semidefinit ist. Aus dem gleichen Argument wie zuvor kann der Konformitätsterm fortgelassen werden. Zur Vereinfachung schreiben wir  $F := \underline{D}y$  und  $A := \underline{D}\alpha$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2W[y][\alpha, \alpha] &\geq s''_{\alpha\alpha} + w''_d(1) (d'_\alpha)^2 + w'_d(1) d''_{\alpha\alpha} \\ &= 2 K_s \operatorname{sp} AA^T + w''_d(1) 4 \operatorname{sp}^2 FA^T \\ &\quad - K_s (-\operatorname{sp}(AF^T + FA^T)^2 + 2 \operatorname{sp} AA^T + 4 \operatorname{sp}^2 AF^T) \\ &= w''_d(1) 4 \operatorname{sp}^2 FA^T + K_s (\operatorname{sp}(AF^T + FA^T)^2 - 4 \operatorname{sp}^2 AF^T) \\ &\geq K_s \operatorname{sp}(AF^T + FA^T)^2, \end{aligned}$$

denn die Voraussetzung des Satzes und  $\gamma > 0$  implizieren zusammen  $w''_d(1) \geq K_s$ . Der verbleibende Summand ist stets positiv: Setzen wir  $AF^T =: B$ , so ist obiger Term gerade  $\operatorname{sp}(B+B^T)^2$ . Die Matrix  $B+B^T$  ist symmetrisch, hat also nur reelle Eigenwerte, ihr Quadrat also nur positive, q. e. d.

### 3.5 Variationen der Nebenbedingungen

In Rn. 2.22 haben wir festgestellt, daß die durch Isotropie- und Objektivitätsforderung entstandenen Freiheitsgrade für Minimierer durch die Nebenbedingungen

$$h[y] \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für} \quad h_{1,2}[y] = M[1, y_{1,2}], \quad h_3[y] = L^{\text{tgl}}[y_1, y_2]$$

aus dem Lösungsraum herausgeteilt werden können. Für ein Minimierungsverfahren benötigen wir die erste und zweite Variation von  $h$ .

Die Ableitungen dieser linearen und bilinearen Funktionen sind trivial:

$$\mathbf{D}h_{1,2}[y][\alpha] = M[1, \alpha_{1,2}], \quad \mathbf{D}h_3[y][\alpha] = L^{\text{tgl}}[\alpha_1, y_2] + L^{\text{tgl}}[y_1, \alpha_2].$$

Die zweiten Ableitungen von  $h_1$  und  $h_2$  verschwinden, die der Nebenbedingung (2) ist

$$\mathbf{D}^2h_3[y][\alpha, \beta] = L^{\text{tgl}}[\alpha_1, \beta_2] + L^{\text{tgl}}[\beta_1, \alpha_2].$$

## 3.2. Konstruktion eines geeigneten Finite-Elemente-Raums durch abgeschnittene Basisfunktionen (TFE)

### Lineare und bilineare Finite Elemente

3.6

Ein Rechengebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und ein euklidisches Koordinatensystem  $\mathcal{K}_\Omega$  seien gegeben.

Sei  $\omega$  ein offener Würfel oder Tetraeder, im folgenden **Referenzelement** genannt.  $\mathcal{K}_\omega$  sei ein Koordinatensystem, in dem  $\omega$  auf den Koordinatenachsen liegt und die Einheitsvektoren zu Ecken hat. Beim Würfel verwenden wir ein euklidisches, beim Tetraeder ein baryzentrisches Koordinatensystem. **Element-Basisfunktionen** oder **Formfunktionen** sind die auf  $\omega$  affin bilinearen (im Würfelfalle) oder linearen (für Tetraeder) Funktionen. Der Vektorraum der Element-Basisfunktionen  $V_\omega$  ist isomorph zum Raum  $\mathbb{R}^8$  bzw.  $\mathbb{R}^4$  aller reellen Funktionswerte auf den Ecken von  $\omega$ .

Analog zu Def. 1.10 läßt sich ein endliches Rechtecksnetz definieren. Beide Definition verallgemeinern ganz natürlich auf höhere Dimensionen, wir verwenden aber stets die zweidimensionalen Begriffe. – Ein **Rechengitter**  $\Omega^h$  sei ein  $\Omega$  ganz überdeckendes Dreiecks- oder Rechtecksnetz. Ragt das Rechengitter nicht über  $\Omega$  hinaus, so heiße  $\Omega^h$  ein **exaktes Rechengitter**. Wie üblich unterscheiden wir dann nicht zwischen  $\Omega^h$  und  $\bigcup \bar{T}_i$ , solange keine Mehrdeutigkeit auftreten kann.

Die Transformationen von  $\omega$  nach  $T_i$  bezeichnen wir mit  $\vartheta_i$ . Ein Punkt  $P \in T_i$  mit  $\mathcal{K}_\Omega$ -Koordinatenvektor  $p$  besitze die  $\mathcal{K}_\omega$ -**Referenzkoordinaten**  $\bar{p} = \vartheta_i^{-1}(p)$ .

Die Menge  $V$  aller stetigen, elementweise (bi-)linearen Funktionen heißt **Ansatzraum**. In jedem Element  $T_i$  haben Funktionen daraus eine **Darstellung in Referenzkoordinaten**  $\vartheta_i \circ \psi_i$  mit  $\psi_i \in V_\omega$ . Man beachte, daß in dieser Schreibweise als Definitionsbereich der Funktionen in  $V$  nicht  $\bigcup T_i$ , sondern  $\bigsqcup_i \omega$  (disjunkte Vereinigung) gesehen wird.

### 3. Endlichdimensionale Minimierung der Verzerrungsenergie

Als **Rechenknoten**  $x_i$  bezeichnen wir die Ecken der Elemente. Gibt es ihrer genau  $n$ , so ist  $V$  isomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , verstanden als Funktionswerte an den Knoten. Bilder der euklidischen Einheitsvektoren unter dem Isomorphismus  $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  sind die **nodalen Basisfunktionen**  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , und  $\iota^{-1}$  entspricht der Auswertung einer Funktion  $\psi \in V$  an den Rechenknoten.

Alle kontinuierlichen Funktionen haben wir mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Die FE-Approximationen dieser Funktionen bezeichnen wir durch Großbuchstaben (nur  $\psi$  wird stets klein geschrieben), die Koeffizienten bezüglich  $(\psi_i)$  mit überstrichenen Großbuchstaben. Beispielsweise ist die nodale Interpolation von  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$F = \sum_i \bar{F}_i \psi_i \quad \text{mit } \bar{F}_i = f(x_i).$$

Die Energie einer diskretisierten Parametrisierung  $Y$  schreiben wir als  $E(Y)$  im Gegensatz zu  $\mathcal{E}[y]$  für die kontinuierliche.

#### Darstellung der Energie, ihrer Variationen und der Nebenbedingungen bezüglich Basisfunktionen des FE-Ansatzraumes

- 3.7 Darstellung des Längenterms.** Da  $S = K_s \mathcal{E}_s$  nach Rn. 2.6 linear ist, läßt sich seine FE-Approximation als Matrix-Vektor-Produkt schreiben: Sei  $\bar{L}^{\text{tgl}}$  die **tangentiale Steifigkeitsmatrix** mit Einträgen

$$\bar{L}_{ij}^{\text{tgl}} = L^{\text{tgl}}[\psi_i, \psi_j] = \int_{\Omega} \nabla \psi_i^T \nabla \psi_j.$$

Dann ist  $L^{\text{tgl}}[U, V] = \bar{L}^{\text{tgl}} \bar{V} \cdot \bar{U}$ , mithin

$$\begin{aligned} E_s(Y) &= w_s \bar{L}^{\text{tgl}} \bar{Y} \cdot \bar{Y}, \\ \mathbf{D}E_s(Y)(A) &= 2w_s \bar{L}^{\text{tgl}} \bar{Y} \cdot \bar{A}, \\ \mathbf{D}^2 E_s(Y)(A, B) &= 2w_s \bar{L}^{\text{tgl}} \bar{A} \cdot \bar{B}. \end{aligned}$$

**Darstellung des Flächenterms.** Der zweite Summand ist Integral einer nichtlinearen Funktion und kann deshalb nicht so angenehm vereinfacht werden. Allerdings legt die Darstellung 3.1 nahe, daß zur Berechnung der Einträge im Flächensummanden der Hesse-Matrix die Terme  $EV(\underline{D}y, \underline{D}\psi_i)$  aus dem Gradienten verwendet werden könnten. Das ist falsch, denn in  $\nabla E$  tauchen diese Terme mit Vorfaktor  $w'_d(d)$  auf, in der Hesse-Matrix dagegen mit Vorfaktor  $w''_d(d)$ . Allerdings tauchen die beiden Faktoren von  $EV(\dots)$  bereits in der Berechnung von  $ZV$  auf, so daß sie effektiv doch keinen Mehraufwand darstellen.

Eine intensive Betrachtung der in  $ZV$  auftretenden Terme suggeriert, daß durch geschickte Zwischenspeichern von Matrixprodukten und -summen der Rechenaufwand deutlich verringert werden kann. Dennoch wurde in der vorliegenden Implementation darauf verzichtet, damit der Programmcode zur Auswertung des Flächenterm-Integranden überschau- und wartbar blieb.

**3.8**



### 3.2. Abgeschnittene Basisfunktionen (TFE)

Sämtliche Integranden hängen nur von den Gradienten der Basis- und FE-Funktionen ab, sind also auf jedem Element konstant. Daher genügt zur exakten Auswertung der Element-Integrale eine Dreiecks-Mittelpunktsquadratur.

**Darstellung der Nebenbedingungen.** Analog zur tangentialen Steifigkeitsmatrix definieren wir die **Massenmatrix**  $\bar{M}$  mit Einträgen **3.9**

$$\bar{M}_{ij} = M[\psi_i, \psi_j] = \int_{\Omega} \psi_i \psi_j.$$

Die in Rn. 2.22 angegebenen Nebenbedingungen lauten damit diskretisiert

$$\begin{aligned} H_1(Y) &= \bar{M}\bar{1} \cdot \bar{Y}_1, \\ H_2(Y) &= \bar{M}\bar{1} \cdot \bar{Y}_2, \\ H_3(Y) &= \bar{L}^{\text{tg1}}\bar{Y}_1 \cdot \bar{Y}_2, \end{aligned}$$

ihre Variationen aus Rn. 3.5 werden analog gebildet und sind trivial:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}H_1(Y)(A) &= \bar{M}\bar{1} \cdot \bar{A}_1, \\ \mathbf{D}H_2(Y)(A) &= \bar{M}\bar{1} \cdot \bar{A}_2, \\ \mathbf{D}H_3(Y)(A) &= \bar{L}^{\text{tg1}}\bar{A}_1 \cdot \bar{Y}_2 + \bar{L}^{\text{tg1}}\bar{A}_2 \cdot \bar{Y}_1 \end{aligned}$$

sowie

$$\mathbf{D}^2H_3(Y)(A, B) = \bar{L}^{\text{tg1}}\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_2 + \bar{L}^{\text{tg1}}\bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2.$$

### Abgeschnittene Finite Elemente (*truncated finite elements*)

**3.10**

Sei  $(Q^h)_h$ ,  $h \rightarrow 0$ , eine Folge simplizialer exakter Rechengitter über  $Q$  mit Gitterweite  $h$ . Wir erzeugen daraus nicht-exakte Gitter  $\Omega^h$  für  $\Omega := \{|\varphi| < \delta\}$  durch Aufnahme nur derjenigen Elemente, die  $\Omega$  schneiden. Definiere  $r : x \mapsto d(x, \Omega)$ . Das Rechengitter  $\Omega^h$  ist eine mit  $h \rightarrow 0$  genauer werdende Approximation von  $\Omega$  in dem Sinne, daß  $\|r\|_{\mathcal{L}^p(\Omega^h)} \rightarrow 0$  strebt ( $1 \leq p \leq \infty$ ). Solange  $Q^h$  ganz unabhängig von  $\varphi$  konstruiert wurde, können wir jedoch nicht erwarten, daß die Randnormalen von  $\Omega$  durch diejenigen von  $\Omega^h$  approximiert werden.

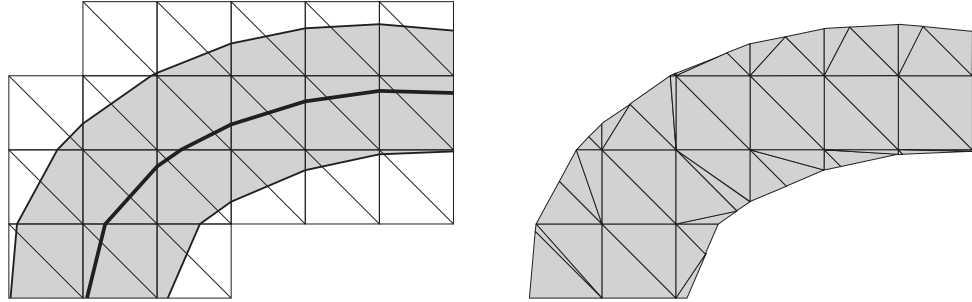
Bekanntlich bedeutet das Lösen von  $DE_s(Y) = 0$ , wenn nur einige der Randknoten festgehalten werden, das implizite Fordern von Neumann-Nullrandwerten auf dem übrigen Rand (vgl. Satz 2.9). Neumann-Nullrandwerte sind aber solange unsinnig, wie die Normale  $n^\Omega$  an das Rechenggebiet nichts mit der Normalen  $n$  an die Niveauflächen  $M$  zu tun hat. Ist andererseits  $n = n^\Omega$ , so wäre eine bezüglich  $\mathcal{E}_s$  oder  $\mathcal{E}_c$  optimale Parametrisierung, in Normalenrichtung konstant fortgesetzt, auch Optimalstelle von  $\mathcal{E}_s$  bzw.  $\mathcal{E}_c$  auf  $M + tn$  für betragsmäßig kleines  $t$ .

Wir betrachten zur Vereinfachung und in Übereinstimmung mit der üblichen Literatur im folgenden Abschnitt ein Rechenggebiet  $[\Phi < 0]$ . – Es wäre grundsätzlich möglich,

### 3. Endlichdimensionale Minimierung der Verzerrungsenergie

**Abbildung 4:** Dünnes Band aus einer diskretisierten Niveaufunktion: Links das Gebiet  $[-\delta < \Phi < \delta]$  in einem kartesischen Gitter (fett das Nullniveau), rechts eine Triangulierung, die dieses Gebiet auflöst. Der TFE-Ansatz benutzt das linke Gitter, führt insbesondere keine anderen als die kartesischen Gitterknoten ein, und modifiziert nur die Quadraturregel.

Man sieht bereits in diesem Beispiel, daß die Kondition der abgeschnittenen Elemente (Verhältnis von Umkreis- zu Inkreisradius) beliebig schlecht werden kann.<sup>4</sup>



die gegebene Triangulierung schlichtweg zu verfeinern und das dünne Band dadurch aufzulösen:<sup>5</sup>

**3.11 Lemma:** Sei  $\Phi$  stückweise affin über einem simplizialen Gitter  $\Omega^h$ , und jedes Element des Gitters enthalte, wie in Rn. 3.16 diskutiert, nur einen Schnitt durch  $[\Phi < 0]$ . Dann ist  $[\Phi = 0]$  auf jedem Element ein Untersimplex der Kodimension 1, welches das Element in zwei Prismen teilt (NB: Simplicia sind Prismen).

Die erhaltenen Prismen lassen sich wieder in Simplicia zerlegen. Zur Konstruktion im Falle dreier Dimensionen stellen wir fest:<sup>6</sup> Schneidet eine Hyperebene  $H$  ein Simplex  $S$ , so liegen entweder zwei Ecken auf jeder Seite von  $H$ , oder eine auf einer Seite, drei auf der anderen. Im ersten Falle entstehen zwei Pentaeder, sie lassen sich in jeweils drei Tetraeder zerlegen. Im zweiten Falle hingegen entsteht ein Tetraeder und ein Pentaeder. Vergleiche Abbildung 5.

Die bei dieser Konstruktion entstehenden Elemente bezeichnen wir als **virtuelle Elemente**, die durch den Schnitt von  $[\Phi = 0]$  mit dem Elementrand hinzugekommenen Knoten als **virtuelle Knoten**. Die virtuellen Elemente werden im Laufe des Algorithmus 3.18 aufgezählt, und für jedes virtuelle Element wird die Funktion `addTetra` aufgerufen, die auf ihm eine Quadratur wie in Rn. 3.15 beschrieben ausführt. – Man beachte, daß virtuelle Knoten keine eigenen Freiheitsgrade tragen.

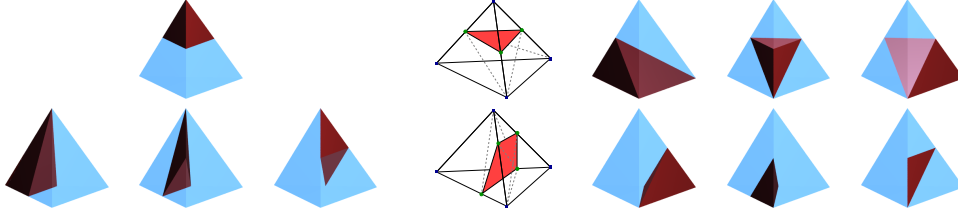
Verwendete man die aus virtuellen und ungeschnittenen Elementen bestehende Triangulierung, so wäre eine explizite Speicherung des Gitters nötig. Darüber hinaus wäre das so entstehende Gitter zu üblichen Mehrgitter-Algorithmen inkompatibel. Der erste

<sup>4</sup> PREUSSER/RUMPF/SCHWEN [2007], Abschnitt 3.4, Seiten 6ff.

<sup>5</sup> LIEHR et al. [2009].

<sup>6</sup> LIEHR [2004], Seiten 20ff.

**Abbildung 5:** Der durch eine Ebene zerschnittene Tetraeder zerfällt in vier bzw. sechs Tetraeder. Bildquelle: SCHWEN, unveröffentlicht.



3.12

**Algorithmus:** addTetra( $\bar{n}_0, \dots, \bar{n}_3$ )

- 1 Sei  $M = (v_0 | \dots | v_3)$  die aus den  $\mathcal{K}_\omega$ -Koordinaten der Ecken des aktuellen virtuellen Tetraeders gebildete Matrix,
- 2 damit ist  $M\bar{p} = p$ .
- 3 **für alle** Quadraturpunkte  $\bar{p}_i$  mit Gewichten  $w_i$  **tue**
- 4 Füge Quadraturpunkt  $(\bar{n}_0 | \dots | \bar{n}_3)\bar{p}$  hinzu (das ist die Umrechnung von baryzentrischen Koordinaten bzgl. des durch  $(n_i)$  gegebenen virtuellen Tetraeders  $\hat{T} \subset T$  in solche bzgl.  $T$ ).
- 5 Füge Quadraturgewichte

$$w_i \det [(M(e_j - e_0))_{j=1,2,3}]$$

hinzu, denn diese Determinante ist der Anteil  $|\hat{T}|/|T|$ .

- 6  $V \leftarrow V + \det [(M(e_j - e_0))_{j=1,2,3}]$

Grund war für die Einführung der *unfitted meshes*<sup>7</sup>, der zweite für die **zusammengesetzten Finiten Elemente** (CFE)<sup>8</sup> ausschlaggebend, bei denen anstattdessen nur die verwendete Quadraturregel resp. die Element-Basisfunktionen modifiziert werden.

Intuitiv ist man zuerst versucht, das Rechengebiet zu verkleinern und das „Abschneiden“ auf den Referenzelementen durchzuführen.

**Definition:** Sei  $V$  Ansatzraum über  $\Omega^h$ . Dann definiere

3.13

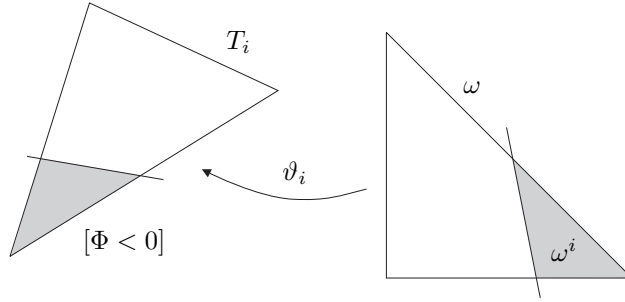
$$V_\Phi := \{\psi |_{[\Phi < 0]} \mid \psi \in V\}$$

als Menge der **abgeschnittenen Basisfunktionen**.

<sup>7</sup> BARRETT/ELLIOT [1984].

<sup>8</sup> Begründet durch HACKBUSCH/SAUTER [1997]; unsere Darstellung orientiert sich an LIEHR et al. [2009]. Für einen Überblick über weitere Ansätze wie PUM, GFEM, XFEM vergleiche die Literaturübersicht in letzterem Artikel.

### 3. Endlichdimensionale Minimierung der Verzerrungsenergie



**Abbildung 6:** Notation zu Rn. 3.14: Das dünne Band wird nicht auf Ebene der Elemente  $T_i$  realisiert, sondern durch Einführung angepaßter Referenzelemente  $\omega^i$ .

**3.14 Modifikation der Referenzelemente.** Sei  $T_i$  ein Element,  $\vartheta_i^{-1} : T_i \rightarrow \omega$  die Transformation auf das Referenzelement (Abbildung 6). Anstatt eine Funktion aus  $V_\Phi$  auf  $T_i$  durch  $(\vartheta_i \circ \psi)|_{[\Phi < 0]}$  mit  $\psi \in V_\omega$  dazustellen, kann auch  $\omega$  modifiziert werden: Sei  $\omega^i := \vartheta_i^{-1}(T_i \cap [\Phi < 0])$ . Als Element-Basisfunktionen benutzen wir die  $\psi|_{\omega^i}$ ,  $\psi \in V_\omega$ . Ist  $\omega^i$  nicht-degeneriert, so ist auch der Vektorraum dieser Funktionen wieder isomorph zum Raum der möglichen Funktionswerte an den Ecken von  $\omega$ . Deshalb ist  $V_\Phi$  gerade der von allen Funktionen  $[\Phi < 0] \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugte Vektorraum, die auf jedem  $T_i \cap [\Phi < 0]$  die Darstellung  $\vartheta_i \circ \psi_i$  für ein  $\psi_i \in V_{\omega^i}$  haben.

Indem nicht der Definitionsbereich verkleinert wird, sondern die Basisfunktionen mit der charakteristischen Funktion des Sub-Null-Niveaus multipliziert werden, führt dieser Ansatz auf die **partition of unity method (PUM)**<sup>9</sup>. Auf diese Weise kann nicht nur das Definitionsgebiet verkleinert werden, sondern indem auf dem gleichen Knoten eine zweite Basisfunktion eingeführt und auf das Super-Null-Niveau eingeschränkt wird, werden physikalisch getrennte Bereiche modelliert, ohne sie durch einzelne Elemente auflösen zu müssen. – Aktuell haben KAUFMANN et al. [2009] eine hochinteressante Verbindung zwischen Texturen und abgeschnittenen Basisfunktionen geschaffen, indem sie anstatt analytisch gegebener charakteristischer Funktionen Abschneidefunktionen benutzen, die durch Werte einer Textur-Bitmap gegeben werden. Dieser Ansatz läßt sogar das nur teilweise Zerschneiden eines Elements zu.

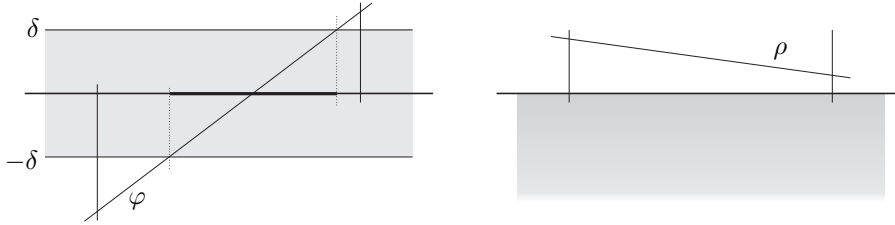
**Modifikation der Basisfunktionen bzw. der Quadraturregeln.** Für unsere Anwendung genügt es aber ja schon, die Quadraturregel anzupassen. Dieser Ansatz wurde als von BARRETT/ELLIOT [1984] eingeführt; DECKELNICK et al. [2009] haben die Methode für elliptische partielle Differentialgleichungen auf impliziten Flächen verwendet, indem sie, analog zu Rn. 2.28, die Differentialgleichungen für ein ganzes Bündel von Parallelflächen simultan lösen.

Eine Funktion  $q : \mathbb{R}^{\Omega^h} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Quadraturregel vom Exaktheitsgrad  $k$** , wenn

$$q(\psi) = \int_{\Omega^h} \psi \quad \text{für } \psi \text{ stw. Polynom vom Grad höchstens } k.$$

<sup>9</sup> BABUŠKA/MELENK [1997].

**Abbildung 7:** Zum Problem in der Umwandlung des dünnen Bandes in ein Sub-Null-Niveau in Rn. 3.16: Liegt kein Knoten innerhalb des Bandes, so kann für die stückweise lineare Interpolierende  $\rho$  von  $|\varphi| - \delta$  das Subnullniveau  $[\rho < 0]$  leer sein, obwohl  $[|\varphi| < \delta]$  nichtleer ist.



Bekanntlich ist ein solches  $q$  darstellbar als

$$q(\psi) = \sum_{T_i} |T_i| \sum_{j=1}^l w_i \psi \circ \vartheta_i(\bar{p}_j)$$

mit  $l \leq \frac{k(k+1)}{2}$  Quadraturpunkten  $\bar{p}_j$  auf dem Referenzelement und Quadraturgewichten  $w_i$ .

In den typischen FE-Algorithmen, vgl. Anhang A für eine beispielhafte Schnittstelle, ist die gesamte Geometrie-Information in den verwendeten Quadraturregeln kodiert. Der tatsächliche Definitionsbereich der FE-Funktionen ist uninteressant, wenn sie außerhalb von  $[\Phi < 0]$  auf Null gesetzt werden. Algorithmisch sind deshalb  $(V_\Phi, q_\Phi)$  und  $(V, q_\Phi)$ , wo  $q_\Phi$  eine Quadraturregel auf  $V_\Phi$  ist, nicht voneinander zu unterscheiden.

Nun besteht ja  $\omega^i$  gemäß Lemma 3.11 wieder aus (virtuellen) Tetraedern, und die Konstruktion einer Quadraturregel auf  $\omega^i$  ist erledigt, sobald die Quadraturpunkte der virtuellen Tetraeder in das  $\mathcal{H}_\omega$ -Koordinatensystem umgerechnet sind und die Quadraturgewichte mit dem jeweiligen Anteil der virtuellen Tetraeder an  $|\omega|$  gewichtet sind. Algorithmus 3.18 erledigt dies. Er konstruiert aus einer Quadraturregel vom Exaktheitsgrad  $k$  auf  $\omega$  eine Quadraturregel  $q_\Phi$ , die exakt vom Grad  $k$  auf  $V_\Phi$  ist. Die Information, wo genau  $[\Phi = 0]$  das Element schneidet, ist danach nur noch nötig, falls Funktionen aus  $V_\Phi$  an beliebigen Punkten von  $\Omega^h$  ausgewertet werden sollen.

**Vom dünnen Band zum Sub-Null-Niveau.** Um die Notation zu vereinfachen, haben wir in diesem Abschnitt ein Rechengebiet  $[\varphi < 0]$  anstatt  $[|\varphi| < \delta]$  betrachtet. Dabei beachte man allerdings, daß bei stückweise linearem  $\varphi$  Vergrößerungseffekte auftreten, wenn das bisherige  $\varphi$  durch das dafür nötige  $|\varphi| - \delta$  ersetzt wird: Wenn das Rechengebiet auf einem Element gar nicht bis zu den Knoten reichte, sondern alle Knotenwerte vom Betrage größer als  $\delta$  waren, kann der Schnitt durch  $|\varphi| - \delta$  nicht mehr aufgelöst werden, vgl. Abbildung 7.

Wir nehmen daher stets eine genügend feine Triangulierung an, so daß der Rand des Rechengebiets das Element nur in einer einzigen Ebene schneidet. Dann ist die hier

**3.16**

3. Endlichdimensionale Minimierung der Verzerrungsenergie

verwendete Darstellung verlustfrei in die sonst benutzte umwandelbar und umgekehrt. Algorithmus 3.17 erledigt diese Umrechnung.

---

**3.17 Algorithmus:** Quadratur-Konstruktion für  $\delta$ -Band um Nullniveau auf gesamtem Rechengebiet

---

**Eingabe :** Werte  $\varphi^i$ ,  $i = 0, \dots, 3$  der Niveaufunktion auf den Ecken  $e_i$  des Standard-Tetraeders

**Ausgabe :** Liste von Quadraturpunkten  $\bar{p}_i$  und -gewichten, so daß die Exaktheit der gegebenen Quadraturformel vom gesamten Gebiet auf  $||\varphi| < \delta]$  übertragen wird.

- 1 **für jedes** *Element mit Niveauwerten*  $\varphi^i$ ,  $i = 0, \dots, 3$  **tue**  
*// Drücke Elemente ins Band, wenn die Knoten nahe dem Rand des Bandes liegen:*
- 2 **wenn**  $|\varphi^i - \delta| < TOL$  **dann**  $\varphi^i \leftarrow \delta - TOL$
- 3 **wenn**  $|\varphi^i + \delta| < TOL$  **dann**  $\varphi^i \leftarrow -(\delta - TOL)$
- 4 Setze  $S : \mathbb{R} \mapsto \{0; 1\}^3$  vermöge

$$S(t) = \begin{cases} 110 & \text{für } t < -\delta \\ 011 & \text{für } -\delta \leq t \leq \delta \\ 101 & \text{für } \delta < t. \end{cases}$$

- 5 Setze  $S = \bigwedge S(\varphi^i)$  (bitweises „und“).  
*// Anhand von S können wir bestimmen, wie  $\varphi$  zu  $|\varphi|$  steht:*  
*101 alle Werte  $> \delta$ , also Element nicht im Band.*  
*001 Element schneidet Band von oben, also richtiges Vorzeichen.*  
*011 alle Knoten im Band, also kein Abschneiden nötig.*  
*010 Element schneidet Band von unten, Vorzeichen muß also umgekehrt werden.*  
*110 alle Knoten  $< \delta$ , also Element nicht im Band.*
  - 6 **wenn**  $S = 010$  **dann** wechsele Vorzeichen der  $\varphi^i$ .
  - 7 Setze  $\rho^i = \varphi^i - \delta$  für alle  $i$ .  
*// Jetzt ist das Interface  $[\rho = 0]$ , das Rechengebiet  $[\rho \leq 0] = [|\varphi| < \delta]$ .*
  - 8 **wenn**  $S \neq 101$  und  $S \neq 110$  **dann**
  - 9 Quadratur-Konstruktion für Sub-Null-Niveau nach Alg. 3.18
  - 10 aus den  $\rho^i$ .
-

---

**3.18 Algorithmus:** Quadratur-Konstruktion für Sub-Null-Niveau auf einem einzelnen Tetraeder
 

---

**Eingabe :** Werte  $\rho^i$ ,  $i = 0, \dots, 3$  der Niveaufunktion auf den Ecken  $e_i$  des Einheitstetraeders

**Ausgabe :** Hängt von der Funktionsweise der Unterroutine `addTetra()` ab. In Zusammenspiel mit Algorithmus 3.12: Liste von Quadraturpunkten  $\bar{p}_j$  (in baryzentrischen Koordinaten) und -gewichten, so daß die Exaktheit der gegebenen Quadraturformel vom gesamten Tetraeder auf  $[\rho < 0]$  übertragen wird.

1 Berechne aus den Eingabedaten

$$\lambda_{ij} = \frac{\rho^i - \rho^j}{\rho^i}, \quad // \text{Schnittverhältnis auf Kante } (i, j)$$

$$c_{ij} = (\lambda_{ij} \in ]0; 1[), \quad // \text{wahr, falls Kante } (i, j) \text{ geschnitten wurde}$$

$$\bar{v}_{ij} = (1 - \lambda_{ij})\bar{e}_i + \lambda_{ij}\bar{e}_j. \quad // \text{Schnittpunkte}$$

2 Sei  $(i_0, j_0)$  die erste geschnittene Kante, also  $j_0 < i_0$ , beide minimal mit  $c_{i_0, j_0}$  wahr.

3 Sei  $(i_1, j_1)$  die nächste solche.

4 **wenn** die Kante an  $(i_0, j_0)$  anstößt, **dann**

*// ... haben wir drei zusammenhängende Punkte auf einer Seite des Nullniveaus, sind also im ersten Fall. Weil  $(i_0, j_0)$  minimal war und  $i_1 < j_1$  nach Definition einer Kante gilt, ist  $i_1 = i_0$  oder  $i_0 = j_0$ , jedenfalls aber  $j_1 \neq i_0, j_0$ .*

5 Sei  $k$  der fehlende Index, so daß  $\{i_0, j_0, j_0, k\} = \{0, \dots, 3\}$ .

6 **wenn**  $\rho^k < 0$  **dann**

7     `addTetra`( $\bar{e}_k, \bar{v}_{k, i_0}, \bar{v}_{k, i_1}, \bar{v}_{k, j_1}$ )

8 **sonst**

9     `addTetra`( $\bar{e}_{i_0}, \bar{e}_{i_1}, \bar{v}_{k, i_1}, \bar{v}_{k, j_1}$ )

10    `addTetra`( $\bar{e}_{j_0}, \bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{i_0}, \bar{v}_{k, j_1}$ )

11    `addTetra`( $\bar{e}_{i_0}, \bar{v}_{k, i_0}, \bar{v}_{k, j_0}, \bar{v}_{k, j_1}$ )

12 **sonst**

*// ... liegen  $(i_0, j_0)$  und  $(i_1, j_1)$  auf verschiedenen Seiten von  $[\rho = 0]$ .*

13 **wenn**  $\rho^{i_0} < 0$  **dann**

14     `addTetra`( $\bar{e}_{i_0}, \bar{e}_{j_0}, \bar{v}_{j_0, j_1}, \bar{v}_{j_0, i_1}$ )

15     `addTetra`( $\bar{e}_{i_0}, \bar{v}_{i_0, i_1}, \bar{v}_{i_0, j_1}, \bar{v}_{j_0, j_1}$ )

16     `addTetra`( $\bar{e}_{i_0}, \bar{v}_{j_0, j_1}, \bar{v}_{i_0, j_1}, \bar{v}_{j_0, i_1}$ )

17 **sonst**

18     genauso mit vertauschten Sub-Indizes 0 und 1.

19     Will man positiv orientierte Tetraeder erhalten, vertauscht man außerdem z. B. die hinteren beiden Ecken.

20 **für alle** Gewichte  $w_i$  **tue**  $w_i \leftarrow w_i/V$      *// damit wieder  $\sum w_i = 1$*

21  $V \leftarrow V h^3$      *// Volumenskalisierung*

---

### 3.3. Diskrete Algorithmen für alle drei implementierten Strategien

Im folgenden werden wir die Algorithmen beschreiben, die zur Lösung unseres Problems

**3.19** *Finde unter allen FE-Approximationen zulässiger Parametrisierungen  $\{Y \in V_{\Phi}^2 \mid E(Y) \text{ endlich, } H(Y) = 0\}$  ein lokales Minimum von  $E$*

herangezogen wurden.

#### Schrittweitensteuerung

**3.20**

Alle benutzten Algorithmen arbeiten mit der Minimierung von linearen oder quadratischen Modellen von  $E$  und  $H$ . Diese Modelle von  $E$  sind nur in einer gewissen Umgebung um die aktuelle Iterierte gültig. Daher werden die Update-Schritte gegebenenfalls gedämpft.

Wir verwenden dafür die Schrittweitensteuerung nach ARMIJO [1966] bezüglich einer **Zielfunktion (objective function)**  $q$ , welche Verringerung der Energie und approximative Einhaltung der Nebenbedingungen gleichermaßen kontrolliert. Diese bestimmt bei aktueller Iterierter  $x$  und bereits gefundener Suchrichtung  $p$  ein  $\tau \in [\tau_{\min}; \tau_{\max}]$ , so daß

$$q(x + \tau p) \leq q(x) + \sigma \tau \nabla q(x) \cdot p \quad \text{für gegebenes } \sigma \in ]0; 1[.$$

Sie sorgt also dafür, daß durch den Schritt  $\tau p$  mindestens das  $\sigma$ -fache des durch die Richtungsableitung  $\nabla f(x) \cdot p$  prognostizierten Abstiegs realisiert wird.

Unsere Implementierung findet ein solches  $\tau$  durch **Backtracking**<sup>10</sup>: Wenn das im letzten Schritt gewählte  $\tau$  die Armijo-Bedingung nicht erfüllt, so wird  $\tau$  halbiert, bis die Ungleichung erfüllt ist. Andernfalls wird  $\tau$  verdoppelt, solange die Bedingung erfüllt bleibt.

#### Gradientenabstieg

Wir benutzen die übliche **Augmented Lagrangian**<sup>11</sup> mit Strafparameter  $\mu$ ,

$$L_{\mu}(\bar{Y}, \lambda) = E(Y) - H(Y)^T \lambda + \frac{\mu}{2} \|H(Y)\|^2,$$

mit  $y$ -Ableitung

$$\nabla_{\bar{Y}} L_{\mu}(\bar{Y}, \lambda) = \nabla E(Y) - \mathbf{D}H(Y)^T \lambda + \frac{\mu}{2} (H(Y)^T \mathbf{D}H(Y) + \mathbf{D}H(Y)^T H(Y)).$$

In Algorithmus 3.20 wird eine Approximation an den Gradientenfluß<sup>12</sup>  $\partial_t \bar{Y} = \nabla_{\bar{Y}} L_{\mu^k}(\bar{Y}, \lambda(Y))$  für wachsende  $\mu^k$  berechnet.

<sup>10</sup> NOCEDAL/WRIGHT [2006], Algorithmus 3.1, Seite 37. Auch ARMIJO [1966] beschreibt seine Schrittweitenbedingung nur im Kontext eines Backtracking-Algorithmus.

<sup>11</sup> NOCEDAL/WRIGHT [2006], Seite 436.

<sup>12</sup> BERKELS [2005], Abschnitt 2.2, Seiten 12f.



### 3.3. Diskrete Algorithmen für alle drei implementierten Strategien

**Bemerkung:** Folgen von Minima von  $L_\mu$  für  $\mu \rightarrow \infty$  streben nicht notwendigerweise gegen eine Lösung von 3.19, sondern nur gegen einen zulässigen kritischer Punkt von  $E$ .<sup>13</sup>

---

#### Algorithmus: Gradientenverfahren mit Strafterm-Aufteilung

---

3.21

**Input :** Startwert  $\bar{Y}^{(0,1)} \in V_\Phi^2$  mit endlicher Energie  
 Anfangs-Strafparameter  $\mu^1 \in \mathbb{R}$   
 Aufteilungsfaktor  $\kappa$

- 1 **für**  $k = 1, 2, \dots$  **tue**
- 2     **für**  $i = 1, \dots, i_{\max}$  **tue**
- 3         **wenn**  $|\bar{P}^{(i,k)}| \leq TOL$  **oder**  $i = i_{\max}$  **dann**
- 4             break
- 5         Setze  $\bar{P}^{(i,k)} = \nabla_y L_{\mu^k}(\bar{Y}^{(i,k)})$
- 6         Bestimme Schrittweite  $\tau^{(i,l)}$  durch Armijo-Regel bezüglich  $q = L_{\mu^k}$
- 7         Setze  $\bar{Y}^{(i+1,k)} = \bar{Y}^{(i,k)} + \tau^{(i,k)} \bar{P}^{(i,k)}$
- 8         Erhöhe  $i$
- 9      $\mu^{k+1} = \kappa \mu^k$
- 10     $\bar{Y}^{(0,k+1)} = \bar{Y}^{(i,k)}$

---

#### Newton-Verfahren mit festgehaltenen Randwerten

3.22

Der Rand des Rechengebietes  $\Omega$  besteht aus zwei Teilen: Einerseits der in  $Q$  enthaltene Teil  $[\varphi = \pm\delta]$ , andererseits die Vereinigung der Ränder  $\partial^* M_t$ . Auf diesem zweiten Rand  $\Gamma := \partial Q \cap \partial\Omega$  wollen wir zu Testzwecken eine Parametrisierung vorgeben und im Gegenzug die Nebenbedingung  $H$  unberücksichtigt lassen.

Dafür benutzen wir ein Standard-Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung, bei dem in  $\mathbf{DE}$  und  $\mathbf{D}^2E$  die Einträge für Rechenknoten auf dem Rand maskiert sind (vgl. Rnn. A.8f.). Das lineare Gleichungssystem jedes Newton-Schritts wird über das diagonal vorkonditionierte<sup>14</sup> CG-Verfahren<sup>15</sup> gelöst.

#### SQP-Verfahren

3.23

Nehmen wir an, daß die Zeilen von  $\mathbf{DH}$  linear unabhängig sind (*linear independence constraint qualification*). Dann setze für  $\lambda \in \mathbb{R}^3$

$$L(\bar{Y}, \lambda) = E(Y) + H(Y)^T \lambda.$$

Ableitungen davon sind

$$\partial_{\bar{Y}} L(\bar{Y}, \lambda) = \nabla E(Y) + \mathbf{DH}(Y)^T \lambda, \quad \partial_{\bar{Y}}^2 L(\bar{Y}, \lambda) = \mathbf{D}^2 E(Y) + \mathbf{D}^2 H_3(Y)^T \lambda_3$$

Nach der Theorie der endlichdimensionalen beschränkten Optimierung<sup>16</sup> erfüllt ein

---

<sup>13</sup> NOCEDAL/WRIGHT [2006], Seite 436.

<sup>14</sup> MEISTER [2008], Satz 5.7, Seite 205.

<sup>15</sup> HESTENES/STIEFEL [1952].

<sup>16</sup> NOCEDAL/WRIGHT [2006], Seite 320.

3. Endlichdimensionale Minimierung der Verzerrungsenergie

zulässiges Minimum von  $E$

$$H(Y) = 0, \quad \partial_{\bar{Y}} L(Y, \lambda) = 0 \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}^3.$$

Wir lösen das Problem mit dem SQP-Verfahren, d. h. einer Newton-Nullstellensuche für

$$F(\bar{Y}, \lambda) := \begin{pmatrix} \partial_{\bar{Y}} L(\bar{Y}, \lambda) \\ H(Y) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\mathbf{D}F = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{Y}\bar{Y}}^2 L & \mathbf{D}H^T \\ \mathbf{D}H & 0 \end{pmatrix}$$

lautet das komplette Verfahren:<sup>17</sup>

---

**3.24 Algorithmus:** SQP-Verfahren

---

**Input :** Startwert  $(\bar{Y}^0, \lambda^0)$

- 1 **für**  $i = 1, 2, \dots$  **tue**
- 2     **wenn**  $|F(\bar{Y}^i, \lambda^i)| \leq TOL$  **oder**  $i > i_{\max}$  **dann**
- 3         **break**
- 4     Bestimme die Lösung  $(\Delta\bar{Y}, \Delta\lambda)$  von

$$\mathbf{D}F(\bar{Y}^k, \lambda^k) \begin{pmatrix} \Delta\bar{Y} \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = -F(\bar{Y}^k, \lambda^k)$$

- 5     Bestimme die Schrittweite  $\tau^i$  durch Armijo-Schrittweitensuche bezüglich  $q = E$
- 6     Setze

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}^{i+1} \\ \lambda^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}^i \\ \lambda^i \end{pmatrix} + \tau^i \begin{pmatrix} \Delta\bar{Y} \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}.$$


---

Hierbei ist in der Literatur auch die Wahl  $q = |E|$  häufig, weil der damit entstehende Algorithmus gleich dem einer reinen Nullstellensuche für das Blocksystem  $F(\bar{Y}, \lambda) = 0$  ist.

---

<sup>17</sup> NOCEDAL/WRIGHT [2006], Abschnitt 18.1, Seiten 530f.

## 4. Numerische Ergebnisse

### Wahl von analytischen und numerischen Parametern

In der numerischen Realisierung verwenden wir stets  $Q = [0; 1]^3$ , versehen mit einem Gitter der Weite  $2^{-\ell}$  mit **Gittertiefe**  $\ell \in \mathbb{N}$ , und  $M$  ist in allen Beispielen eine einfach zusammenhängende Fläche mit Rand, also homöomorph zur Kreisscheibe. Aufgrund der Darstellung durch eine Niveaufunktion  $Q \rightarrow \mathbb{R}$  ist ihr Rand  $\partial M$  in  $\partial Q$  enthalten.

Die Parameter  $K_d$  und  $K_c$  verändern wir, um die Auswirkung verschiedener Gewichte zu zeigen. Dagegen halten wir  $\gamma = \frac{1}{2}$  und  $K_s = K_n = 1$  konstant.

### Mehrstufiges Vorgehen

4.1

Die iterativen Minimierungsverfahren aus der vorigen Kapitel erfordern eine Initialparametrisierung als Startwert. Diese verschaffen wir uns, indem wir auf den Rand eine feste Parametrisierung vorgeben und eine FE-Approximation an die nach Satz 2.9 existierende eindeutige harmonische Parametrisierung  $Y^s$  mit diesen Randwerten bestimmen. Die Lösbarkeit dieses linearen Problems ist invariant unter Skalierung der Randwerte, während die Flächenverzerrungsenergie sehr sensitiv auf globale Stauchung und Dehnung reagiert. Daher schließen wir einen Schritt an, in welchem wir eine optimale Skalierung suchen, d. h. einen Minimierer

$$Y^0 = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} E_d(\alpha Y^s).$$

Danach verwenden wir  $Y^0$  als Startwert der Abstiegsverfahren.

Die praktischen Experimente haben gezeigt, daß die Hesse-Matrix  $\mathbf{D}^2 E(Y^s)$  oft sehr schlecht zu invertieren ist. Eine geringe Anzahl (Größenordnung  $10^2$ ) von Gradientenabstiegsschritten führt zumeist an einer wesentlich unproblematischeren Stelle.

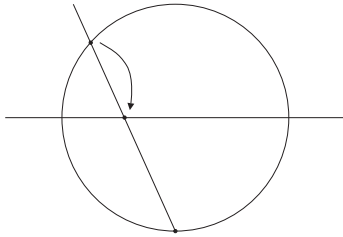
Es ergibt sich ein vierstufiges Verfahren:

- (1) Festlegung von Randwerten, Minimierung von  $E_s$ .
- (2) optimale Skalierung
- (3) Gradientenabstieg nach Alg. 3.20
- (4) Newton-Verfahren nach Alg. 3.23

### Visualisierung

Zur Visualisierung unserer Ergebnisse legen wir in den  $\mathbb{R}^2$  eine Textur und ziehen sie durch das berechnete  $Y$  auf die Flächen zurück. Um Flächen- und Winkelverzerrung gleichermaßen gut visuell beurteilen zu können, wurde ein Schachbrettmuster

#### 4. Numerische Ergebnisse



**Abbildung 8:** Geometrische Konstruktion der stereographischen Projektion  $\mathbb{S}^{d-1} \setminus \{-e_d\} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Der Bildpunkt eines Punktes  $p$  auf der Sphäre ist der Schnittpunkt der Geraden durch  $p$  und den Südpol  $-e_d$  mit der Ebene  $[x_d = 0]$ .

verwendet. In unseren Beispielen ist sie stets so skaliert, daß jedes einzelne Schachfeld Kantenlänge  $\frac{1}{40}$  besitzt.

Die Extraktion des Nullniveaus geschieht über eine von SCHWEN im Rahmen seiner Dissertation verfaßte Funktion, die im Gegensatz zum populären und auch durchaus effizienteren *Marching-Cubes*-Algorithmus<sup>1</sup> die gleiche tetraedrale Interpolation zwischen den Rechenknoten verwendet wie die Finiten Elemente aus Rn. 3.10. Die übrige Visualisierung ist mithilfe des VISUALIZATION TOOLKIT<sup>2</sup> in dem für diese Arbeit entstandenen Programm KIWI realisiert worden.

### 4.1. Implementierungstest: Die stereographische Projektion als harmonische Parametrisierung der Sphäre

Um das lineare Problem

$$4.2 \quad \min_{y \in \text{Par}(\Omega)} \mathcal{E}_l[y]$$

und damit auch die korrekte Implementierung der abgeschnittenen Finiten Elemente zu testen, wählen wir für  $M$  die obere Hälfte der Einheitssphäre  $M = \mathbb{S}^2 \cap [x_3 \geq 0]$ , beispielsweise mithilfe der gerichteten Abstandsfunktion

$$\varphi : x \mapsto |x|$$

und der zusätzlichen Einschränkung, daß nur Elemente mit positiver dritter Koordinate in das Rechengebiet aufgenommen werden. Aus implementationspraktischen Gründen skalieren wir  $M$  noch mit  $r = \frac{1}{4}$  und verschieben es um  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ , um das Rechengebiet innerhalb des Einheitswürfels liegen zu lassen.

Durch Abschneiden der Basisfunktionen erreichen wir dann ein Rechengebiet

$$M^\delta = [-\delta < \Phi < \delta]$$

und versuchen, die stereographische Projektion als Lösung eines Dirichlet-Problems zu berechnen. Randwerte geben wir vor, wo  $M$  den Gebietsrand schneidet, also auf  $\Gamma_D := \bar{M}^\delta \cap [x_3 = 0]$ .

<sup>1</sup> LORENSEN/CLINE [1987].

<sup>2</sup> SCHROEDER/MARTIN/LORENSEN [2006]; KITWARE [2006].

### 4.3 Fortsetzung der stereographischen Projektion auf das gesamte Band

Analytische Lösung auf  $M_0$  soll die stereographische Projektion zum Südpol

$$p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x_3}(x_1, x_2),$$

sein. Sie ist konform<sup>3</sup>, daher nach Rn. 1.18 harmonisch, und auf  $\Gamma_D$  ist  $p(x) = x$ .

Es ist jedoch nicht vollständig klar, auf welche Weise diese Funktion auf  $M^\delta$  ausgedehnt werden soll. Man konstruiert  $p(x)$  bekanntlich, indem eine Gerade durch  $x$  und den Südpol  $-e_3$  betrachtet und ihr Schnittpunkt mit der Ebene  $[x_3 = 0]$  berechnet wird, vgl. Abb. 8. Eine intuitive Fortsetzung wäre es daher, alle Punkte auf dieser Geraden auf  $p(x)$  abzubilden. Das ergibt

$$p^i : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x_3}(x_1, x_2).$$

Diese Funktion ist in Richtung der Geraden durch Südpol und  $x$  konstant, jedoch nicht in Normalenrichtung bzgl.  $\varphi$ .

Konstruiert man dagegen eine Erweiterung vom  $p$  auf den  $\mathbb{R}^2$ , indem man statt der Einheitssphäre die  $|x|$ -Sphäre und also den Schnittpunkt der Geraden durch  $x$  und  $-|x|e_3$  mit  $[x_3 = 0]$  betrachtet, bekommt man

$$p^1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \frac{|x|}{|x|+x_3}(x_1, x_2).$$

Offensichtlich ist  $p^1$  eine 1-homogene Funktion (weshalb 0 auch nicht aus dem Definitionsbereich herausgenommen werden muß), insbesondere also linear und nicht konstant in Normalenrichtung. Eine solche 0-homogene Fortsetzung von  $p$  erhalten wir stattdessen als  $p^0 := \frac{1}{|x|}p^1$ , also

$$p^0 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \frac{1}{|x|+x_3}(x_1, x_2).$$

Da  $\Delta$  linear ist und  $|x|$  konstant auf jeder Niveaumenge, folgt aus  $\Delta p = 0$  und  $p^0(x) = \frac{1}{|x|}p(x/|x|)$  direkt  $\Delta p^0 = \Delta p^1 = 0$  in ganz  $M^\delta$ . Die „intuitivste“ Fortsetzung  $p^i$  scheidet dadurch bereits aus, denn die Lösung des Dirichlet-Problems ist eindeutig, und es ist  $p^i \neq p^0$ .

Da wir auf dem Randteil  $\partial M^\delta \setminus \Gamma_D$  implizit von-Neumann-Nullrandwerte vorgeben, sind nur Lösungen invariant gegen Veränderungen der Bandbreite, die auch im Inneren von  $M^\delta$  verschwindende Normalableitung haben. Daher setzen wir als Randwerte

$$y_D : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \frac{1}{|x|}x,$$

womit  $y_D = p^0|_{\Gamma_D}$  gilt, und also folgt mit der eindeutigen Lösbarkeit von 4.2, daß wir über  $\|Y - P^0\|$  (in einer noch zu wählenden Norm) den Diskretisierungsfehler des numerischen Verfahrens messen können.

<sup>3</sup> KREYSZIG [1968], Seite 222.

#### 4. Numerische Ergebnisse

Insbesondere zeigt die Überlegung, daß die sehr intuitive Wahl  $y_D = \text{id}$  eine dem numerischen Verfahren nicht angemessene Randwertvorgabe wäre, da eine numerische Lösung des Problems 4.2 nicht gegen eine der oben konstruierten Fortsetzungen  $p^i$ ,  $p^1$  oder  $p^0$  konvergieren würde.

#### 4.4 Berechnung der Fehlernormen

Wie üblich berechnen wir die  $\mathcal{L}^2$ -Norm und die  $\mathcal{H}_\varphi^1$ -Halbnorm auf dem gesamten Rechengebiet durch

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{L}^2(M^\delta)} &= \bar{M} \bar{U} \cdot \bar{U}, \\ |U|_{\mathcal{H}_\varphi^1(M^\delta)} &= \bar{L}^{\text{tg1}} \bar{U} \cdot \bar{U}.\end{aligned}$$

Integrale über die einzelne Niveaufläche  $M$  berechnen wir über eine wiederum von SCHWEN zur Verfügung gestellte Iteratorklasse, mit der alle Dreiecksflächen von  $[\Phi = 0]$  durchlaufen werden können. Auf jedem von ihnen wird eine Mittelpunktsquadratur angewandt.

Beim Übergang von einer Gittertiefe zur nächstgrößeren halbiert sich die Gitterweite, folglich ist die **geschätzte Konvergenzordnung**<sup>4</sup> EOC zur einer (endlichen) Folge  $e_i$

$$\text{EOC}_i = \log_2 \frac{e_i}{e_{i-1}}.$$

#### Präliminartest

4.5

Wir verifizieren Approximation glatter Funktionen in  $V_\Phi$ , vor allem aber auch die korrekte Approximation des kontinuierlichen Steifigkeitsoperators  $L^{\text{tg1}}$  durch die Steifigkeitsmatrix  $\bar{L}^{\text{tg1}}$  mit einer Reihe von Gittern, die allesamt das Band  $[\Phi < \frac{1}{8}]$  diskretisieren. Über  $A := \langle 1, 1 \rangle_{\mathcal{L}^2} = \bar{M} \bar{1} \cdot \bar{1}$  läßt sich das Volumen des diskreten Bandes berechnen und mit dem Volumen der Kugelschale

$$a = \frac{4}{3} \pi ((r + \delta)^2 - (r - \delta)^2)$$

vergleichen.

$\ell$	Elemente	Knoten	$a - A$	EOC
3	116	225	$8,79 \cdot 10^{-3}$	—
4	648	967	$2,04 \cdot 10^{-3}$	2,1
5	4 208	5 287	$5,10 \cdot 10^{-4}$	2,0
6	30 868	34 935	$1,27 \cdot 10^{-4}$	2,0
7	234 965	250 743	$3,20 \cdot 10^{-5}$	2,0
8	1 832 396	1 894 539	$7,98 \cdot 10^{-6}$	2,0

<sup>4</sup> Beispielsweise DECKELNICK et al. [2009], Seite 21.

#### 4.1. Implementierungstest: stereographische Projektion

Bis auf Abweichung mit relativer Größe von  $10^{-3}$  ergibt sich dasselbe Ergebnis, wenn zur Volumenbestimmung direkt die Volumina aller Elemente addiert werden.

Sei  $U$  die stückweise lineare Interpolation der stereographischen Projektion. Wir messen den Approximationsfehler als Norm des Vektors  $\bar{E}$  mit Einträgen  $\bar{L}^{\text{tg}1}[U, \psi]$ ,  $\psi$  nodale Basisfunktion zu einem inneren Knoten. In der Notation von Rn. A.9 ist dies  $\bar{E}^{\text{int}} = R\bar{L}^{\text{tg}1}\bar{U}$ .

$\ell$	$\ \bar{E}\ _{\ell^\infty}$	EOC	$\ E\ _{\mathcal{L}^2(M^\delta)}$	EOC	$ E _{\mathcal{H}_\varphi^1(M^\delta)}$	EOC
3	$1,02 \cdot 10^{-1}$	—	$4,61 \cdot 10^{-3}$	—	$8,83 \cdot 10^{-2}$	—
4	$2,21 \cdot 10^{-2}$	2,2	$8,84 \cdot 10^{-4}$	2,4	$2,76 \cdot 10^{-2}$	1,7
5	$6,16 \cdot 10^{-3}$	1,8	$1,64 \cdot 10^{-4}$	2,4	$9,87 \cdot 10^{-3}$	1,5
6	$1,73 \cdot 10^{-3}$	1,8	$2,97 \cdot 10^{-5}$	2,5	$3,55 \cdot 10^{-3}$	1,5
7	$4,59 \cdot 10^{-4}$	1,9	$5,33 \cdot 10^{-6}$	2,5	$1,27 \cdot 10^{-3}$	1,5
8	$1,18 \cdot 10^{-4}$	2,0	$9,50 \cdot 10^{-7}$	2,5	$4,51 \cdot 10^{-4}$	1,5

#### Numerisch berechnete stereographische Projektion

4.6

Nach diesem Vorlauftest berechnen wir eine FE-Approximation der stereographischen Projektion, indem wir auf einem  $h = 2^{-\ell}$  breiten Band ein harmonisches  $Y$  mit Randwerten  $Y_D$  auf  $\Gamma_D$  suchen. Element- und Knotenzahlen hierzu finden sich im nächsten Abschnitt. Die beiden Komponenten von  $Y$  sind voneinander entkoppelt, wir geben im folgenden nur den Fehler in der ersten Komponente  $E = Y_1 - P_1^0$  wieder. Der Fehler in  $Y_2$  verhält sich stets bis auf kleinere Abweichungen, die aus der Anisotropie unserer Triangulierung herrühren, analog.

Die von DECKELNICK et al. [2009] beobachtete Konvergenz erster Ordnung für  $\mathcal{L}^2$ - und  $\mathcal{H}_\varphi^1$ -Fehler auf dem gesamten Band ließ sich bei uns in etwa nachvollziehen:

$\ell$	$\ E\ _{\mathcal{L}^2(M^\delta)}$	EOC	$ E _{\mathcal{H}_\varphi^1(M^\delta)}$	EOC
3	$1,50 \cdot 10^{-2}$	—	$2,57 \cdot 10^{-1}$	—
4	$5,23 \cdot 10^{-3}$	1,5	$1,41 \cdot 10^{-1}$	0,9
5	$2,32 \cdot 10^{-3}$	1,2	$8,69 \cdot 10^{-2}$	0,7
6	$1,10 \cdot 10^{-3}$	1,1	$4,89 \cdot 10^{-2}$	0,8
7	$6,27 \cdot 10^{-4}$	0,8	$2,68 \cdot 10^{-2}$	0,9
8	$4,91 \cdot 10^{-4}$	0,4	$1,55 \cdot 10^{-2}$	0,8

Die von ihnen ebenfalls angegebene Konvergenz fast zweiter Ordnung des  $\mathcal{L}^2$ -Fehlers auf dem Nullniveau konnten wir leider nicht beobachten. Auch der  $\mathcal{H}_\varphi^1$ -Fehler auf der Fläche, für den sie lineare Konvergenz in  $h$  bewiesen haben, zeigt bei uns nicht ganz das optimale Verhalten:

#### 4. Numerische Ergebnisse

$\ell$	$\ E\ _{\mathcal{L}^2(M)}$	EOC	$ E _{\mathcal{H}_\varphi^1(M)}$	EOC
3	$1,13 \cdot 10^{-2}$	—	$1,48 \cdot 10^{-1}$	—
4	$2,91 \cdot 10^{-3}$	2,0	$4,68 \cdot 10^{-2}$	1,7
5	$1,33 \cdot 10^{-3}$	1,1	$2,89 \cdot 10^{-2}$	0,7
6	$6,88 \cdot 10^{-4}$	1,0	$1,77 \cdot 10^{-2}$	0,7
7	$4,93 \cdot 10^{-4}$	0,5	$1,10 \cdot 10^{-2}$	0,7
8	$4,59 \cdot 10^{-4}$	0,1	$7,33 \cdot 10^{-3}$	0,6

Für das Einbrechen der Konvergenzraten in den  $\mathcal{L}^2$ -Fehlern auf  $M$  wie auch auf  $M^\delta$  haben wir leider keine befriedigende theoretische Begründung finden können.

## 4.2. Harmonische Parametrisierungen als Startwerte der Optimierung

In Rn. 4.1 haben wir dargestellt, daß wir unsere nichtlineare Optimierung mit einer harmonischen Parametrisierung starten. Randwerte hierfür geben wir auf ganz  $\partial^* M^\delta$ , also allen im Band liegenden Rechenknoten auf  $\partial Q$ , vor.

### 4.7 Mögliche Randparametrisierung

Wenn wir  $\partial^* M_t$  als glatte Mannigfaltigkeit annehmen, muß es ganz in einer der Seitenflächen von  $Q$  enthalten sein, sonst besäße es einen Knick. Ohne Einschränkung sei dies  $[x_3 = 0]$ .

**Identität:** Wegen  $x_3 = 0$  für alle  $x \in \Gamma_D$  ist

$$y(x) = (x_1, x_2)$$

eine informationserhaltende Randwertvorgabe.

**Projektion auf den Einheitskreis:** Sei das von  $\Gamma_D$  berandete Gebiet  $G$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene zusätzlich sternförmig, d. h. es gebe ein  $p \in \text{conv } G$ , aus dem die Strahlen  $\{p + \mathbb{R}^+ v \mid v \in \mathbb{R}^3, v_3 = 0\}$ , den Rand  $\partial^* M_t$  in nur einem Punkt  $s_t(v)$  schneiden. Dann ergibt  $s_t(v) \mapsto v$  einen berechenbaren Homöomorphismus  $\partial^* M_t \rightarrow \mathbb{S}^1$ , denn für  $q \in \partial^* M_t$  ist

$$s_t^{-1}(q) = \frac{q - p}{|q - p|}.$$

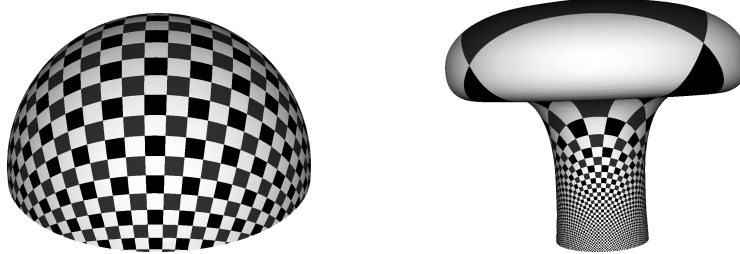
**Projektion auf den Würfel:** Indem wir  $s^{-1}$  mit dem Homöomorphismus  $\eta : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \partial[-1; 1]^d$  vermöge

$$(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, \frac{x_i}{|x_i|}, \dots, x_d) \quad \text{mit } |x_i| \geq |x_j| \text{ für alle } j = 1, \dots, d$$

von der Sphäre auf den Rand des Würfels verketten, läßt sich  $\partial^* M_t$  auch über dem Rand eines Quadrates parametrisieren.



**Abbildung 9:** Harmonische Parametrisierung der Halbsphäre und des Pilzes, Randvorgabe Identität. Die harmonischen Parametrisierungen der anderen drei Flächen folgen in Abb. 10.



#### 4.8 Synthetische Testflächen

Wir haben einige Flächen auf verschiedenen Gittertiefen parametrisieren lassen, um die Sensitivität des linearen Problems auf verschiedene Geometrien zu testen:

- (a) Die obere Hälfte der Sphäre,
- (b) eine auf 92% ihrer Höhe abgeschnittene Sphäre,
- (c) einen geglätteten Quader ohne Unterseite,
- (d) eine geglättete Pyramide ohne Unterseite,
- (e) einen Pilz ohne Unterseite, der aus Rotation einer passenden Bézier-Spline-Kurve um die  $x_3$ -Achse erzeugt wurde.

Dabei wurde die Glättung des Quaders und der Pyramide über einen Zeitschritt des Wärmeleitungs-Flusses für die Niveaufunktion realisiert.

Bis auf die fast vollständige Sphäre läßt sich bei ihnen allen durch die Identität als Randwertvorgabe eine invertierbare Parametrisierung berechnen. Problem der Sphäre ist der sehr kleine Winkel zwischen Fläche und Randebene: Auf den einzelnen Flächen werden über die Identität als Randwertvorgabe auf den weiter außen liegenden Flächen größere Randwerte als auf den innen liegenden Parallelfächen vorgegeben, und über den Kopplungsterm  $E_n$  beeinflussen diese die weiter innen liegenden Flächen. Man müßte  $K_s$  und  $K_n$  in diesen Fällen sehr genau austarieren, damit sich auf der innen liegenden Fläche noch eine invertierbare Parametrisierung einstellt.

Deshalb geben wir für den folgenden Vergleich zwischen den verschiedenen Flächen und Gittertiefen auf den anderen Flächen die Identität, bei der Sphäre dagegen die stereographische Projektion bezüglich ihres Südpols auf die Ebene  $[x_3 = 0]$  vor. Im darauffolgenden Abschnitt betrachten wir auch die anderen vorgestellten Randparametrisierungen.

#### Iterationszahlen

Das Band besitzt in allen Fällen wie bei Berechnung der stereographischen Projektion Breite  $h$ . Damit steigt die Anzahl benutzter Knoten und damit der Rechenaufwand

#### 4. Numerische Ergebnisse

zwischen den Gittertiefen wie erwartet nicht um den Faktor  $2^d = 8$  wie in Rn. 4.5, sondern (approximativ)  $2^{d-1} = 4$  und damit genauso schnell wie bei einem intrinsisch zweidimensionalen Ansatz, beispielsweise einer Triangulierung der zu parametrisierenden Flächen.

	Gittertiefe $\ell$					
	3	4	5	6	7	8
Halbsphäre	180	548	2 104	8 140	32 536	128 960
80% Sphäre	278	963	3 882	15 520	62 188	248 461
Würfel	256	732	2 884	11 796	47 836	192 052
Pyramide	193	637	2 301	8 689	34 216	135 877
Pilz	292	796	3 037	12 252	49 208	196 203

Bei DECKELNICK et al. [2009], Seite 19, wird erwähnt, daß zum Erhalt der üblichen Kondition der Systemmatrizen eine diagonale Vorkonditionierung nötig ist. Zur Illustration des dort angesprochenen Effekts stellen wir die Iterationszahlen eines gewöhnlichen CG-Verfahrens sowie eines CG-Verfahrens mit diagonaler Vorkonditionierung für die Residuums-Zieltoleranz  $TOL = 10^{-16}$  vor.

**CG-Verfahren.** Die Zeilen der Hesse-Matrix sind mit der Größe der Basisfunktions-Träger skaliert. Basisfunktionen, deren Träger (vor dem Abschneiden) fast vollständig außerhalb des Bandes lag, erzeugen daher extrem kleine Einträge, die zu sehr schlecht konditionierten Systemmatrizen führen. Je feiner das Gitter wird, umso stärker beeinflußt dieser Effekt die Konvergenz des nicht-vorkonditionierten CG-Verfahrens:

	Gittertiefe $\ell$			
	3	4	5	6
Halbsphäre	161	597	1 994	6 362
92% Sphäre	515	1 256	26 866	178 305
Würfel	84	603	575	1 620
Pyramide	230	1 355	22 061	104 840
Pilz	333	5 011	48 555	> 500 000

**PCG-Verfahren.** Daß die entstehenden Gleichungssysteme mit diagonaler Vorkonditionierung problemlos lösbar sind, läßt schließen, daß keine anderen Effekte als die disparate Skalierung der einzelnen Matrixzeilen für die schlechte Konvergenz gesorgt hat.

### 4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen

	Gittertiefe $\ell$					
	3	4	5	6	7	8
Halbsphäre	42	71	130	252	475	915
92% Sphäre	59	105	201	392	767	1503
Würfel	55	94	183	355	696	1351
Pyramide	38	71	145	288	558	1084
Pilz	67	149	330	660	1284	2507

### 4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen

Die nur zu Parameterstudien harmonisch parametrisierten Beispiele Halbsphäre und Pilz ersetzen wir zur praktischen Demonstration unserer nichtlinearen Energieanteile durch zwei Beispiele aus dem STANFORD SCANNING REPOSITORY:

- (e) Die Egea-Statue
- (f) Der Mannequin-Kopf

#### Auswirkung verschiedener Randparametrisierungen

4.9

Die Identität als Randwertvorgabe auf dem Würfel und der Pyramid ergibt jeweils ein abgerundetes Quadrat als Parametergebiet, die stereographische Projektion für die Sphäre einen Kreis. Zum Vergleich gibt Abb. 10 (zweite Spalte) deshalb auch harmonische Parametrisierungen über dem jeweils anderen Gebiet wieder.

#### Begünstigung von Flächen- oder Winkelverzerrung

4.10

Am Beispiel der Egea-Statue und des Mannequin-Kopfes zeigen wir die Auswirkungen verschiedener Gewichtungstriplet  $\Lambda = (K_s, K_d, K_c)$ . Für die Egea-Statue sind auf den Abb. 13f., für den Mannequin-Kopf auf Abb. 17f. zu sehen:

- (1) Harmonische Parametrisierung, Randwertvorgabe Identität.
- (2) Bevorzugung der Flächenverzerrung durch  $\Lambda = (1, 1, 10)$ , also einem großem Gewicht auf dem Winkelverzerrung bestrafenden Konformitätsterm.
- (3) Gleichgewichtung aller Energieterme, das heißt  $\Lambda = (1, 1, 1)$ .
- (4) Bevorzugung von Winkelverzerrung durch ein hohes Gewicht auf dem Flächen-term,  $\Lambda = (1, 10, 1)$ .

Dann sind in Abb. 11f. die Parameterbereiche der Optimalparametrisierungen, schattiert mit dem Winkel zwischen Flächennormale  $n$  und dem Richtungsvektor  $(0, 0, 1)$ , dargestellt. Die gemäß Satz 2.23 zulässige Drehung der Parametrisierung um  $\frac{\pi}{2}$  oder ein Vielfaches davon tritt während der Newton-Iteration wirklich auf, so daß einige der Parameterbereiche um  $\frac{\pi}{2}$  gedreht wurden, damit sie optisch besser vergleichbar sind.

#### 4. Numerische Ergebnisse

Um den optischen Vergleich durch die von uns genutzten Fehlermaße  $s$ ,  $d$  und  $c$  zu unterstreichen, sind in den Abb. 15f. bzw. 19f. dies drei auf den Flächen HSV-farbkodiert dargestellt. Darüber hinaus geben wir dort Minimum, Integralmittel und Maximum der Verzerrungsmaße an. Dafür wurden sie an den für die eigentliche FE-Berechnung gerade nicht benötigten (vgl. Rn. 3.10ff.) Ecken der Dreiecksflächen  $[\Phi = 0]$  (virtuellen Knoten) interpoliert und eine Integration über die Fläche nach Rn. 4.4 durchgeführt.

Die dargestellten Ergebnisse geben zu zwei Beobachtungen Anlaß: Zum einen die auch optisch enge Verwandtschaft zwischen harmonischer und Winkelverzerrung vermeinder Parametrisierung sowie der praktischen Notwendigkeit, für eine optisch plausibel anmutende Texturierung den Flächenterm zu benutzen.

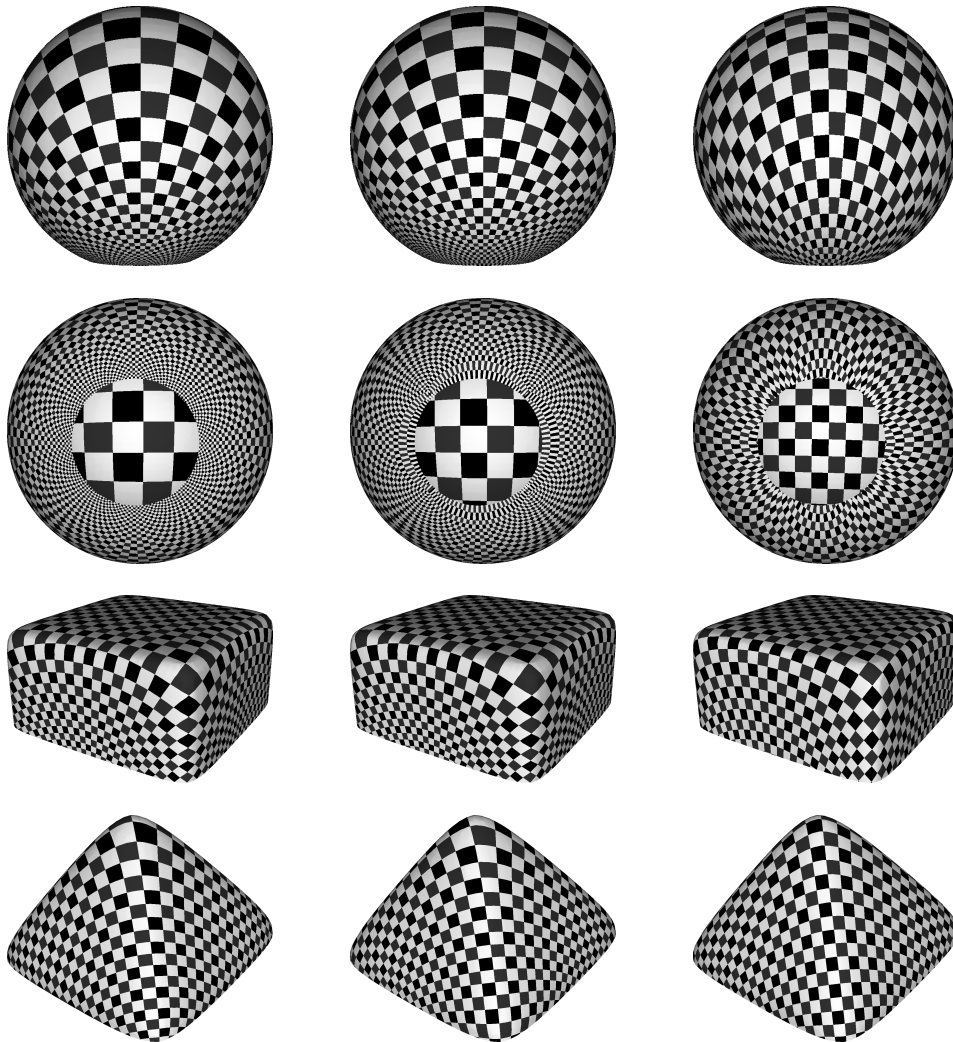
Zum ersten: Eine konforme Parametrisierung läßt sich nach Rn. 1.18 berechnen, indem bei Optimierung von  $\mathcal{E}_s$  die passenden Randwerte vorgegeben werden. Die von uns gewählte Identität auf  $[x_3 = 0]$  ist von ihnen nicht sehr weit entfernt. Daher unterscheiden sich die Parametrisierungen zu (1) und (2) optisch nicht sehr stark, selbst wenn die Parameterbereich in Abb. 11f. noch deutlich verschiedene Gestalt haben.

Zum zweiten: Die in größerer Hinsicht auf Winkelerhaltung optimierte Parametrisierung (2) ist für die Egea-Statue visuell sehr befriedigend, zeigt aber beim Mannequin-Kopf ihre Schwäche. Dieses optimistische Ergebnis ist für praktisch arbeitende Computergrafiker das wesentliche Argument, sich mit dem derzeitigen Stand der Technik, der konformen Parametrisierung durch ABF (Rn. 2.18) oder ähnlichen Verfahren noch nicht zufriedenzugeben. In der Tat idn die Parametrisierungen zu  $\Lambda = (1, 1, 1)$  nach unserem persönlichen Eindruck am gefälligsten, während bei starkem Gewicht auf Flächenerhaltung die dafür nötige nötige sehr ungleiche Streckung der beiden Koordinatenachsen sehr deutlich sichtbar wird.

##### 4.11 Konvergenz der nichtlinearen Verfahren

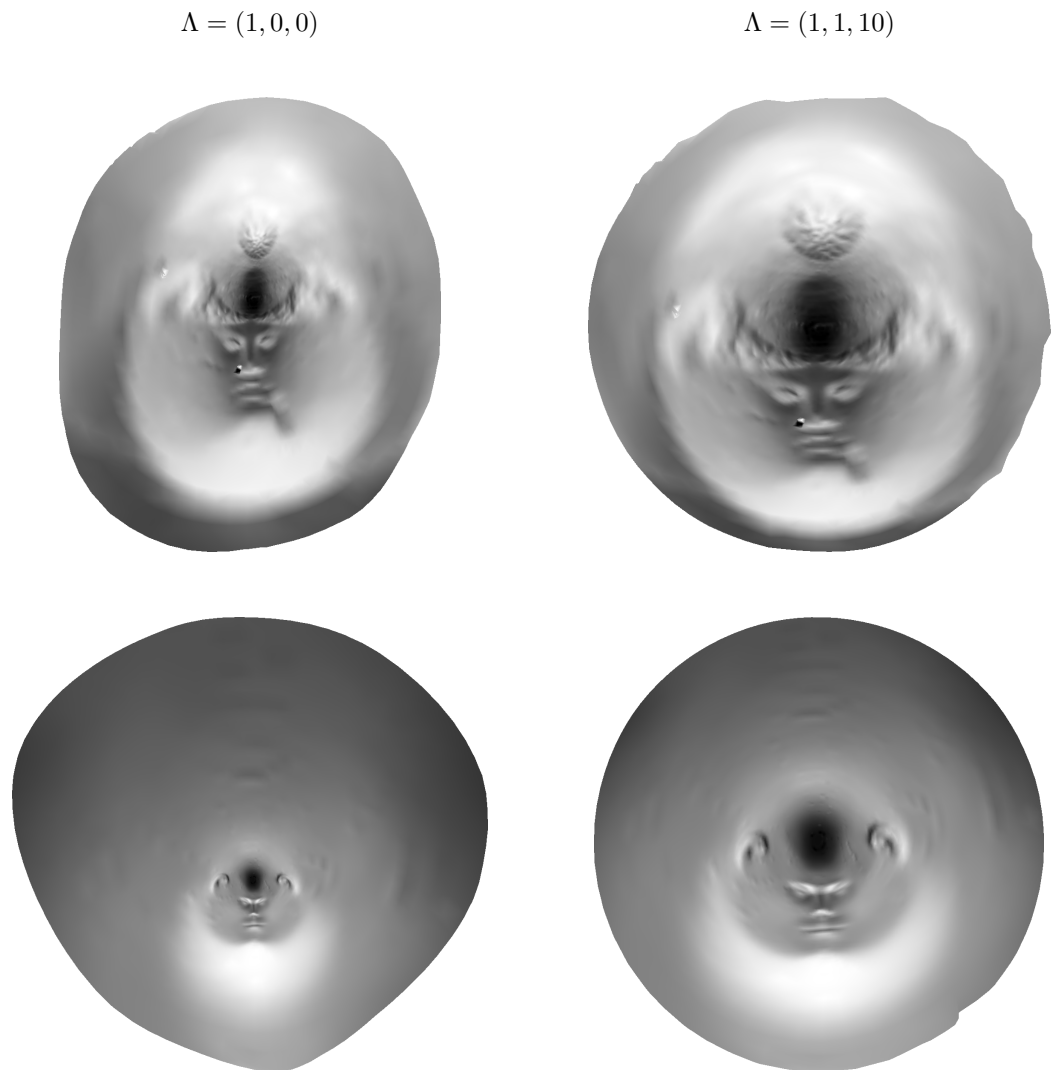
In Abb. 21 geben wir die Entwicklung von  $E$ ,  $\nabla E$  und der geometrischen Verzerrungsmaße bei Berechnung der optimalen Parametrisierung des Mannequin-Kopfes zum Gewichtstripel  $\Lambda = (1, 1, 1)$  während des Gradientenabstiegs (Alg. 3.20) in Schritt 4.1 (3) und des SQP-Verfahrens (Alg. 3.23) in Schritt 4.1 (4) an. Der Sprung in allen dargestellten Größen nach 100 Gradientenabstiegsschritten ist durch die Erhöhung des Strafparameters  $\mu$  verursacht.

4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen



**Abbildung 10:** Parametrisierung der Kugel (Ansicht von der Seite und von unten), des Würfels und der Pyramide. Von links nach rechts: (1) harmonische Parametrisierung, Randvorgabe stereographische Projektion (Kugel) bzw. Identität (Würfel und Pyramide), (2) harmonische Parametrisierung, Randvorgabe Projektion auf den Würfel (bei der Kugel) bzw. den Kreis (bei Würfel und Pyramide) gemäß Rn. 4.7, (3) optimale Parametrisierung bezüglich  $\Lambda = (1, 1, 1)$ .

4. Numerische Ergebnisse

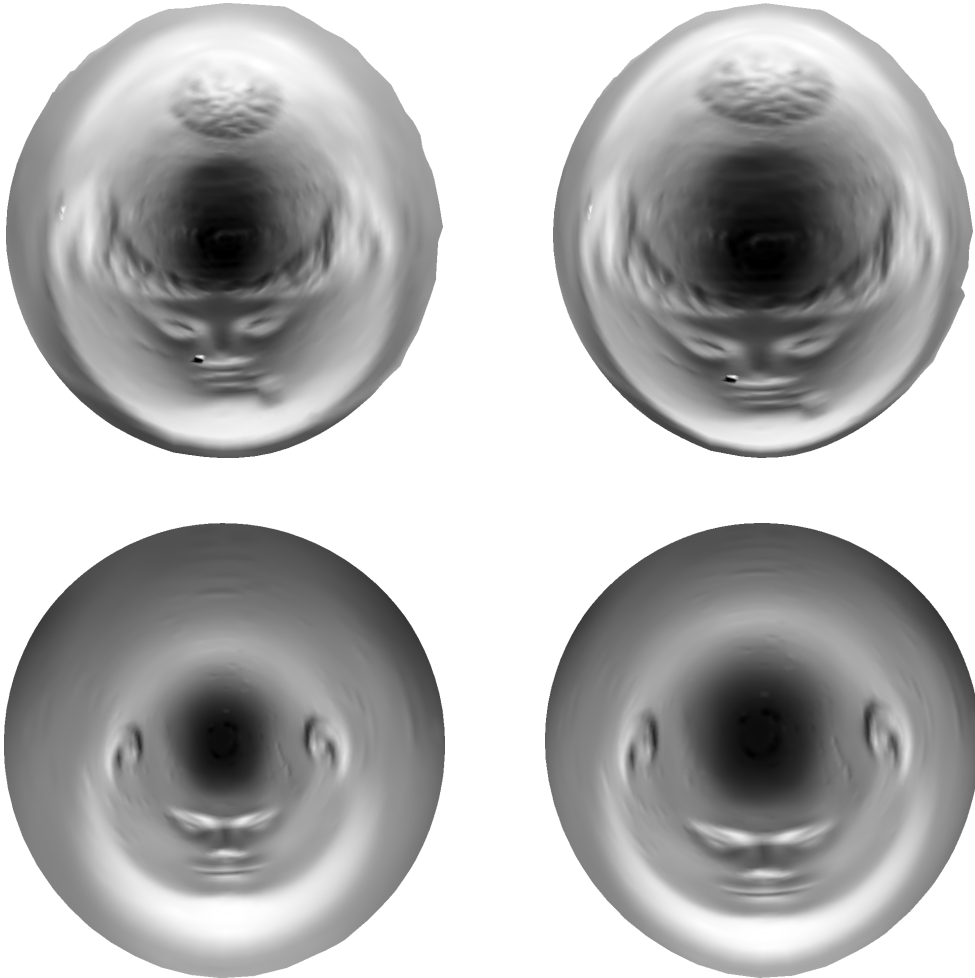


**Abbildung 11:** Parameterbereich der Egea- und Mannequin-Parametrisierungen zu Gewichtstripeln  $(1, 0, 0)$  und  $(1, 1, 10)$ , eingefärbt nach dem Winkel zwischen Flächennormale und drittem euklidischen Einheitsvektor.

4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen

$$\Lambda = (1, 1, 1)$$

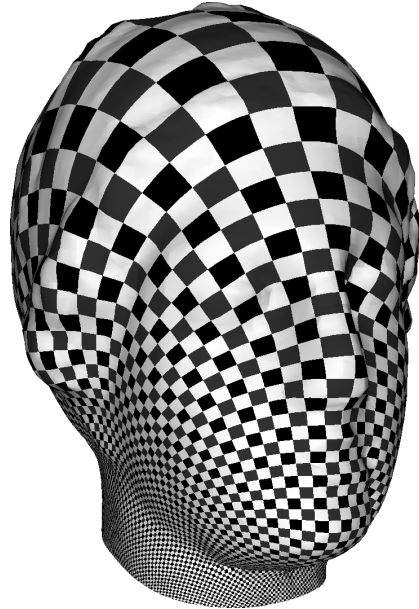
$$\Lambda = (1, 10, 1)$$



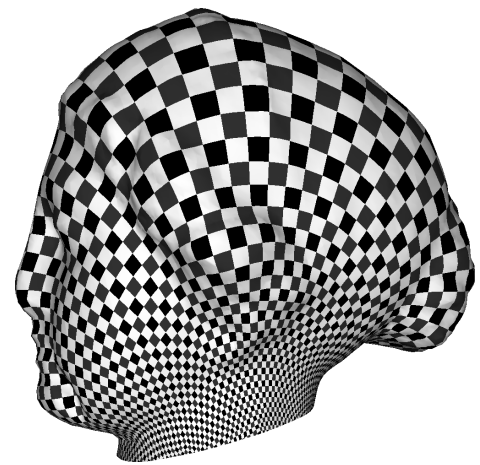
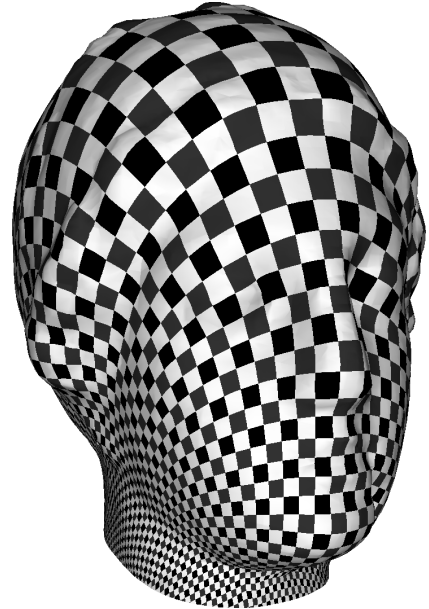
**Abbildung 12:** Parameterbereich der Egea- und Mannequin-Parametrisierungen zu Gewichtstripeln  $(1, 1, 1)$  und  $(1, 10, 1)$ , eingefärbt nach dem Winkel zwischen Flächennormale und drittem euklidischen Einheitsvektor.

4. Numerische Ergebnisse

$$\Lambda = (1, 0, 0)$$



$$\Lambda = (1, 1, 10)$$

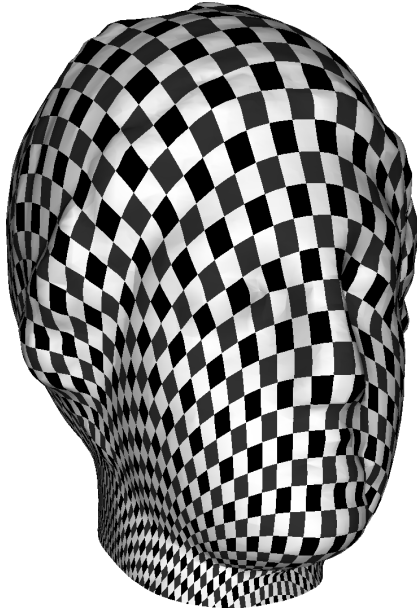


**Abbildung 13:** Texturierung der Egea-Statue gemäß der optimaler Parametrisierungen zu Gewichtstripeln  $(1, 0, 0)$  und  $(1, 1, 10)$ .

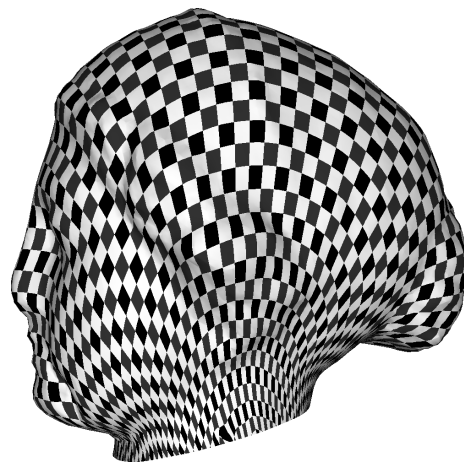
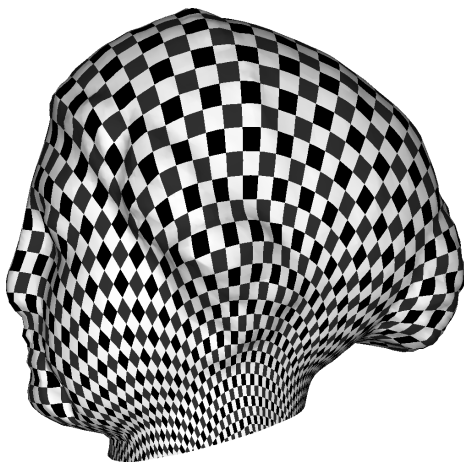
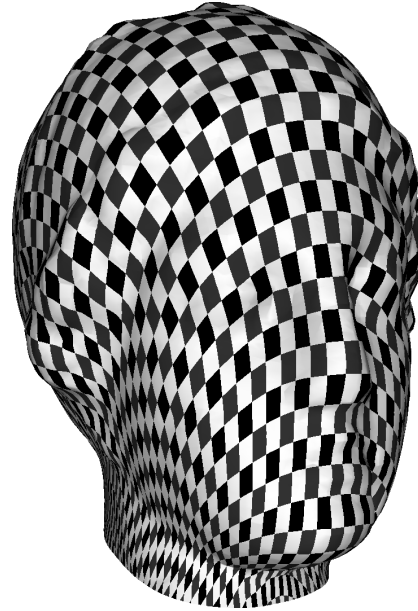


4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen

$$\Lambda = (1, 1, 1)$$

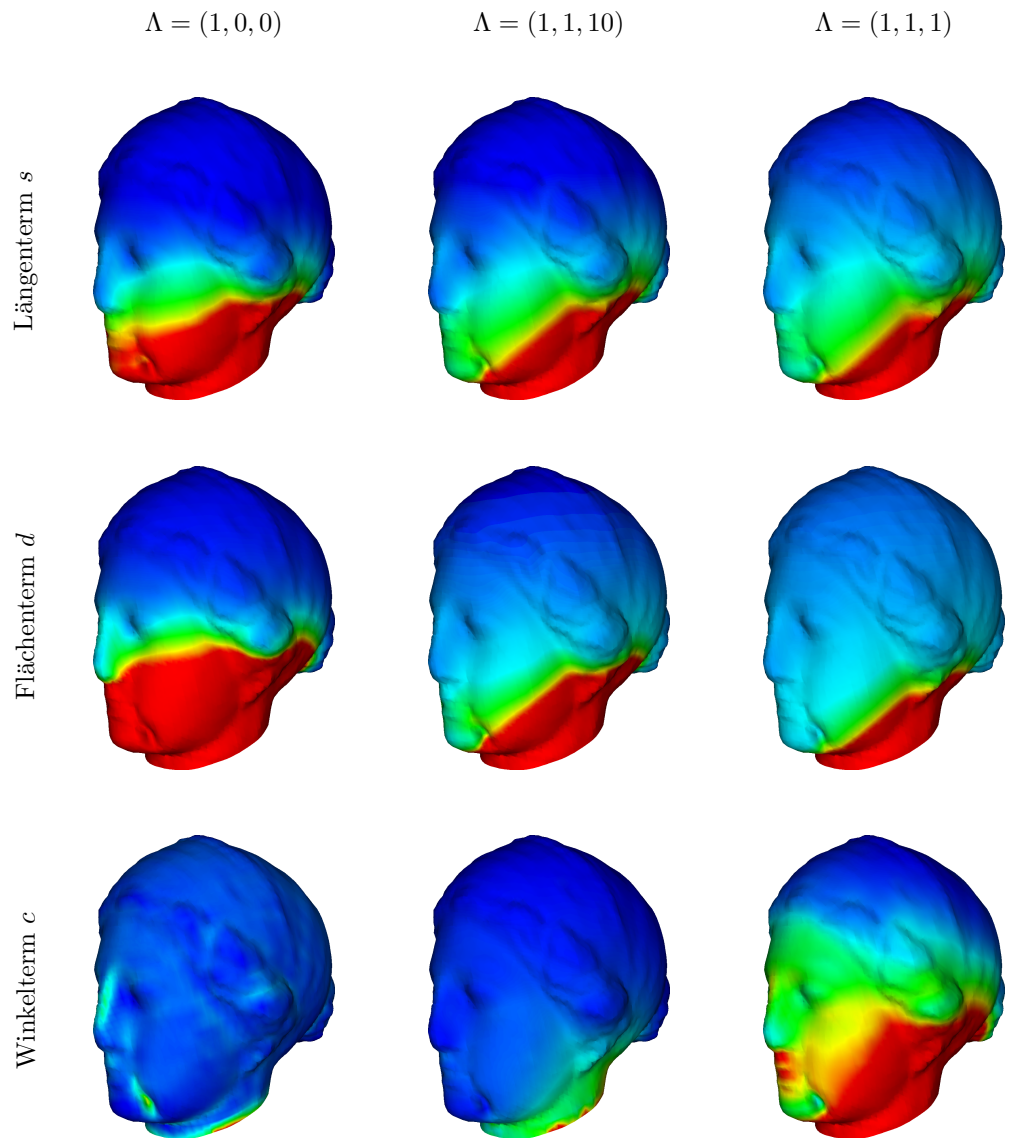


$$\Lambda = (1, 10, 1)$$



**Abbildung 14:** Texturierung der Egea-Statue gemäß der optimaler Parametrisierungen zu Gewichtstripeln  $(1, 1, 1)$  und  $(1, 10, 1)$ .

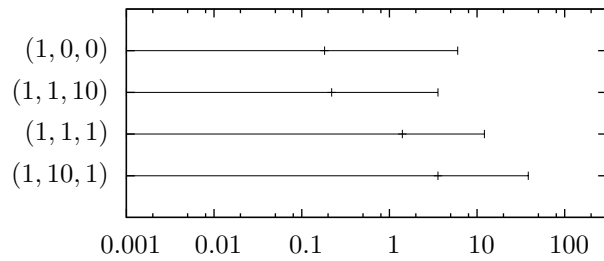
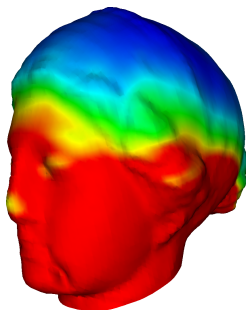
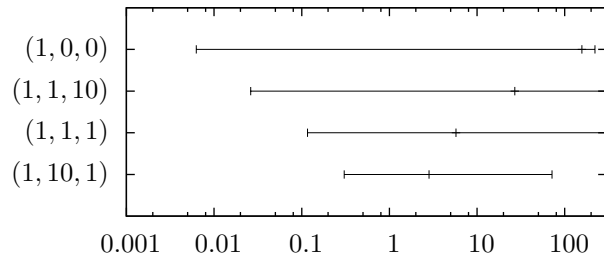
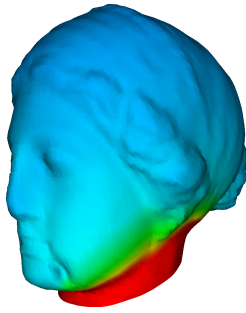
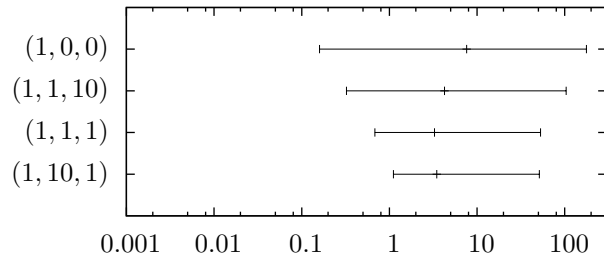
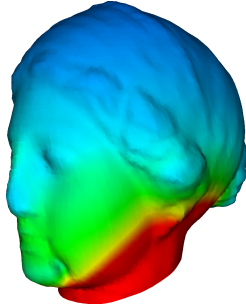
#### 4. Numerische Ergebnisse



**Abbildung 15:** Von oben nach unten: Längen-, Flächen- und Winkelterm in verschiedenen Parametrisierungen der Egea-Statue. Hier und auf der folgenden Seite umspannt die Farbskala [blau; rot] beim Längenterm  $[0,68; 6]$ , beim Flächenterm  $[0,026; 6]$  und beim Winkelterm  $[0; 2]$ .

4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen

$$\Lambda = (1, 10, 1)$$



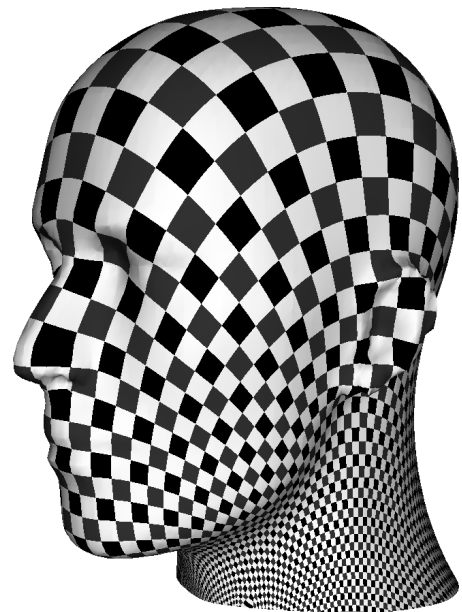
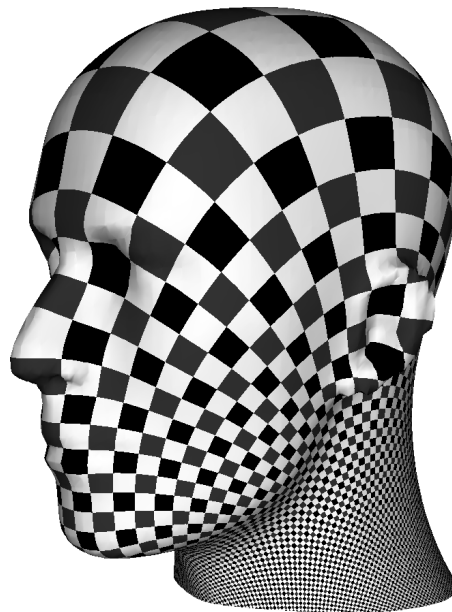
**Abbildung 16:** Links: Längen-, Flächen- und Winkelterm in den flächenerhaltungsbetonten Parametrisierungen der Egea-Statue. Rechts die Maximal- und Minimalwerte der Energieterme auf der Fläche sowie ihr Integralmittel.

4. Numerische Ergebnisse

$$\Lambda = (1, 0, 0)$$



$$\Lambda = (1, 1, 10)$$

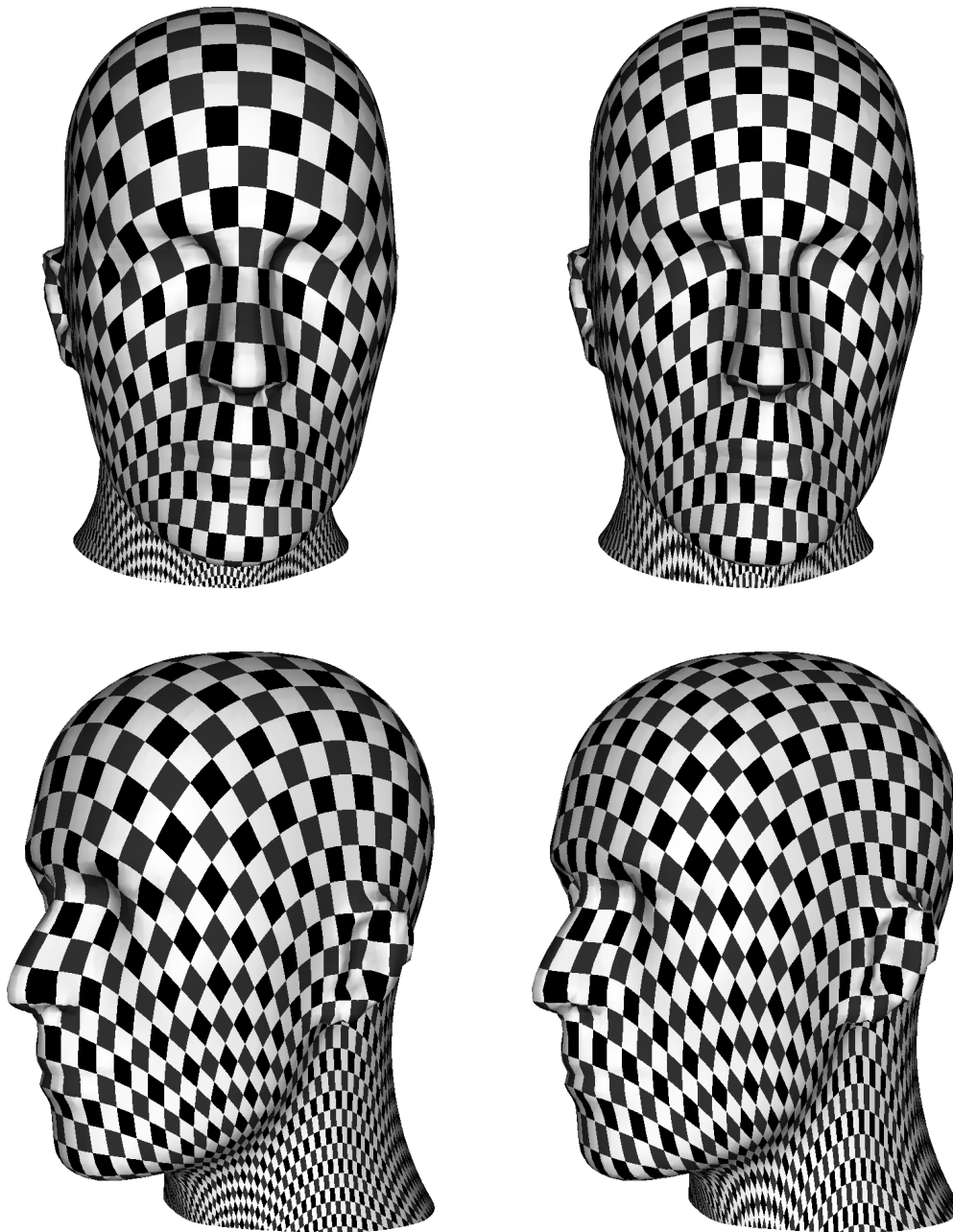


**Abbildung 17:** Texturierung des Mannequin-Kopfes gemäß der optimaler Parametrisierungen zu Gewichtstripeln  $(1, 0, 0)$  und  $(1, 1, 10)$ .

4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen

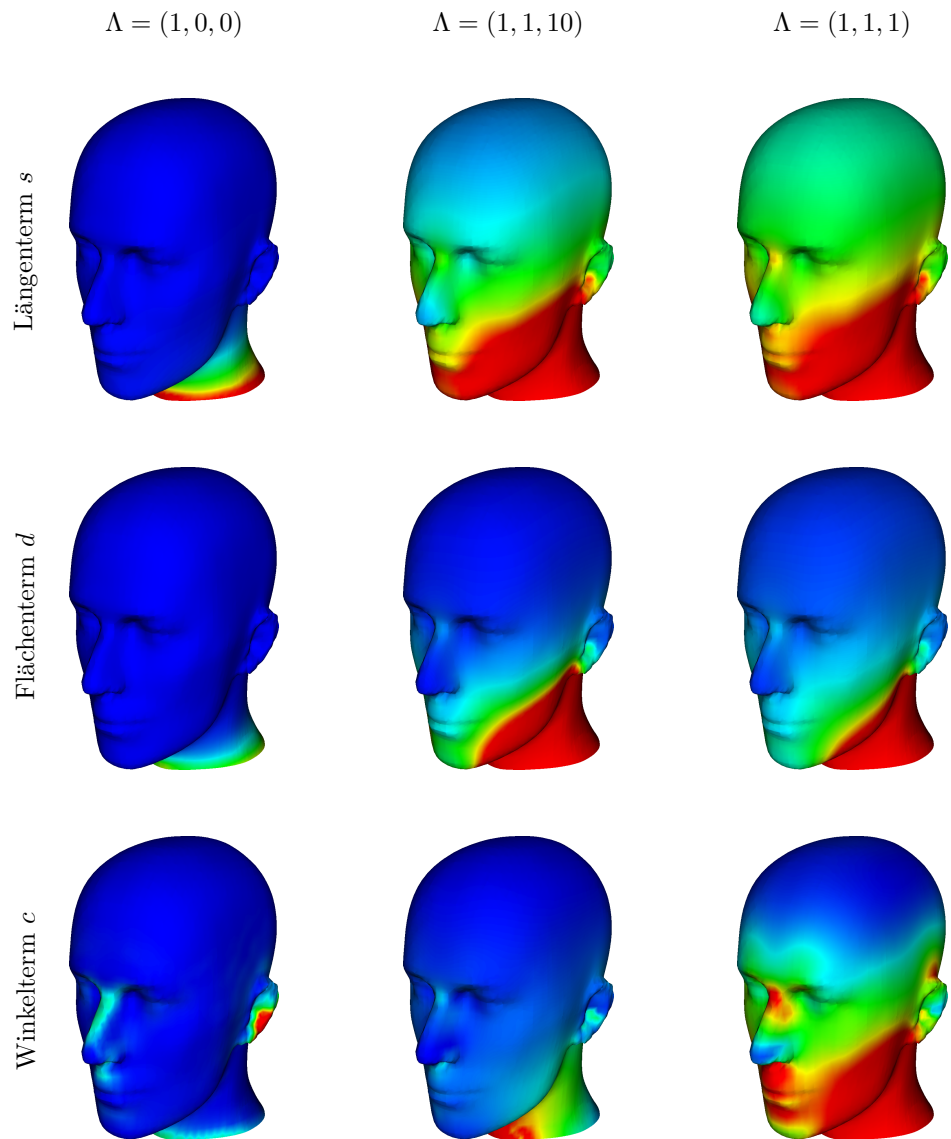
$$\Lambda = (1, 1, 1)$$

$$\Lambda = (1, 10, 1)$$



**Abbildung 18:** Texturierung des Mannequin-Kopfes gemäß der optimaler Parametrisierungen zu Gewichtstripeln  $(1, 1, 1)$  und  $(1, 10, 1)$ .

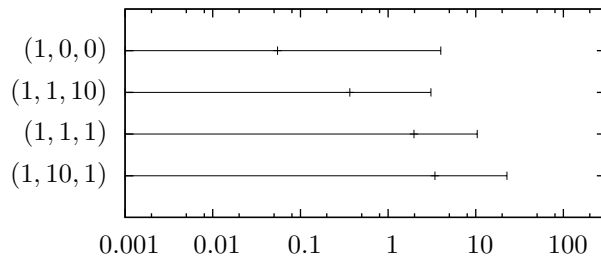
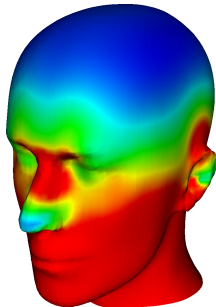
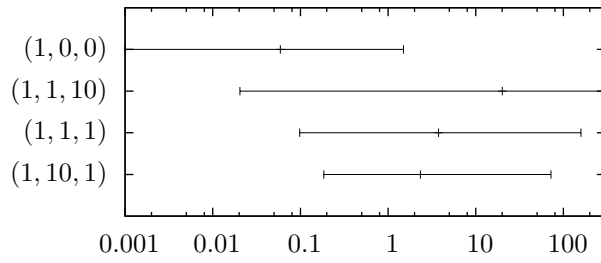
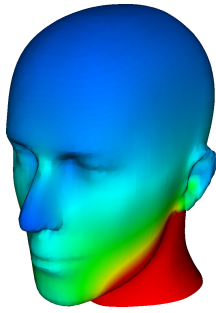
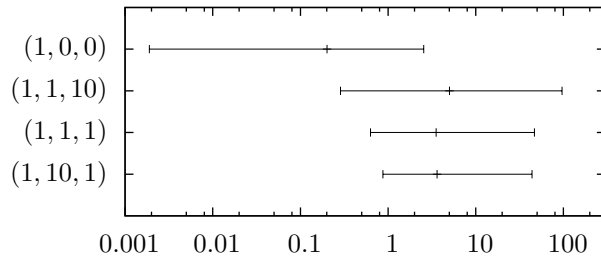
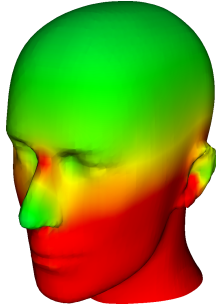
4. Numerische Ergebnisse



**Abbildung 19:** Von oben nach unten: Längen-, Flächen- und Winkelterm in verschiedenen Parametrisierungen des Mannequin-Kopfes. Hier und auf der folgenden Seite umspannt die Farbskala [blau; rot] für alle drei Verzerrungsmaße das Intervall  $[0; 2]$ .

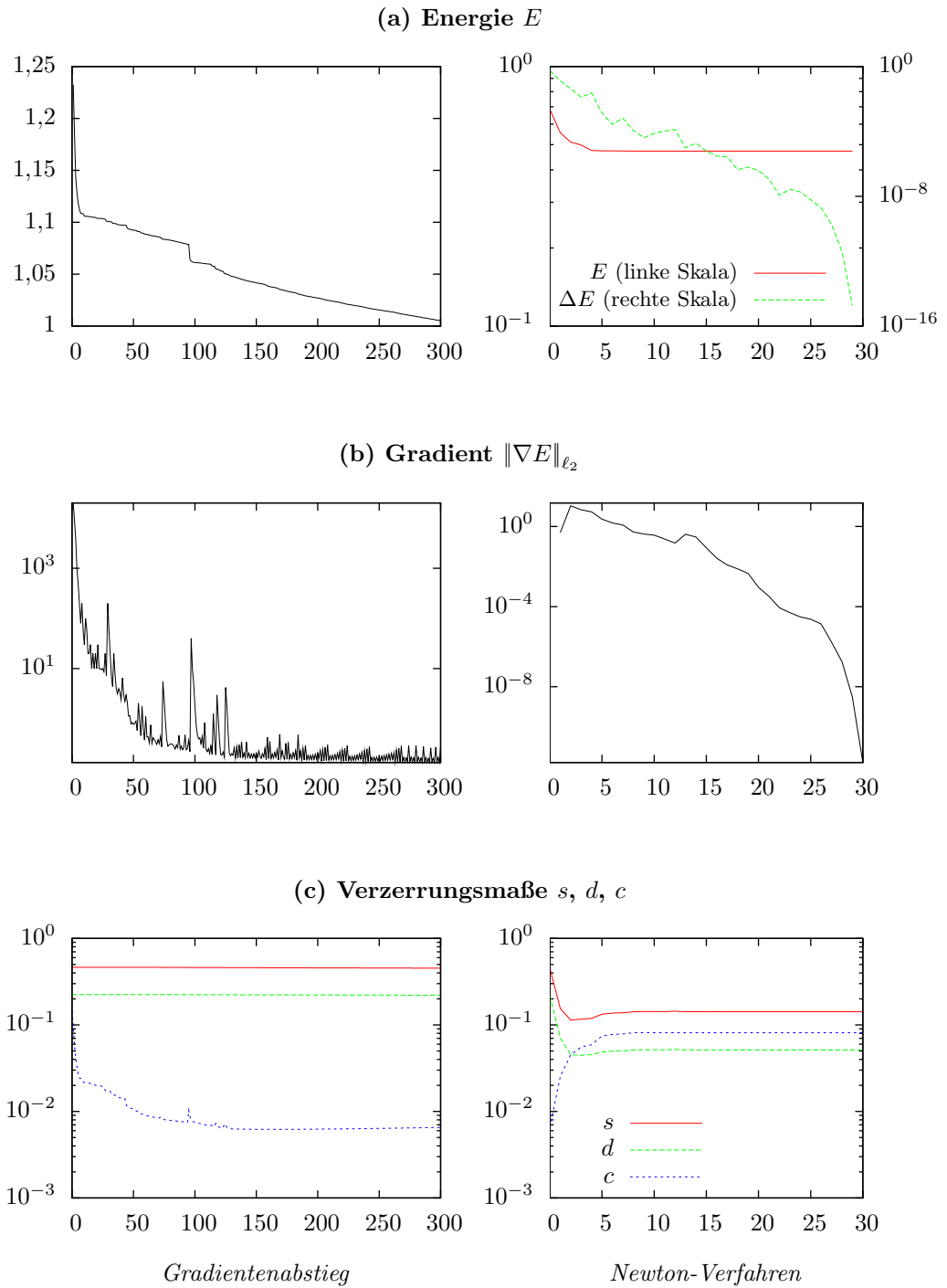
4.3. Berechnung verzerrungsminimierender Parametrisierungen

$$\Lambda = (1, 10, 1)$$



**Abbildung 20:** Links: Längen-, Flächen- und Winkelterm in den flächenerhaltungsbetonten Parametrisierungen des Mannequin-Kopfes. Rechts die Maximal- und Minimalwerte der Energieterme auf der Fläche sowie ihr Integralmittel.

4. Numerische Ergebnisse



**Abbildung 21:** Konvergenzplots für die Optimierung der Mannequin-Parametrisierung bezüglich  $\Lambda = (1, 1, 1)$ .



## 5. Schlußbetrachtungen

Wir haben in der vorliegenden Arbeit eine Energie zur Messung von Parametrisierungsgütern vorgestellt, für ein dünnes Band von Parallellflächen formuliert, implementiert und an Beispielfällen getestet. Es bleibt zu fragen, ob sich diese Variante der Parametrisierungsoptimierung im Vergleich zu den ebenfalls dargestellten bisherigen Verfahren ähnlich gut für die Anwendungsprobleme eignet, die in der Einleitung angesprochen worden sind – insbesondere für den am häufigsten benötigten Fall der Texturgenerierung.

### Interaktivität

Ein in der Parametrisierungspraxis verwendeter Algorithmus würde vermutlich die Werte der Parametrisierung am Rand eines kleinen Gebietsstückes interaktiv vorgeben, eine zu diesen Randwerten gehörige harmonische Parametrisierung berechnen, um anschließend einen Gradientenfluß zu starten, dessen Schritte dem Benutzer sofort angezeigt werden. Damit könnte er den Algorithmus abbrechen, sobald die Verzerrung für die graphische Anwendung hinreichend klein hält. Eine vollautomatische, nur an der Energie orientierte Minimierung erfüllt meist nicht die Erwartungen der Anwender. Computergraphiker, so eine vielfache Aussage beim Workshop „Geometric Modelling, CAD and Simulation“ im März 2009 in Darmstadt, seien an einer Unterstützung ihrer Arbeit, nicht an einer Komplettlösung, die sich nicht beeinflussen können, interessiert. Auch ein Eingreifen zwischen zwei Gradientenfluß-Schritten würde sehr begrüßt.

Dies würde eine stärkere Interaktivität der erstellten Programme erfordern. Algorithmen, die in vielen jeweils schnellen Schritten minimieren, sind in dieser Hinsicht stark im Vorteil gegenüber Newton- oder newtonartigen Verfahren.

### Einbau zusätzlicher Schnittkanten

Die Konnektivität einer impliziten Fläche wird auch bei numerischen Rechnungen nicht explizit gespeichert – im Gegensatz zur Konnektivität von Triangulierungen. Bei diesen werden üblicherweise Geometrie und Topologie getrennt gespeichert.<sup>1</sup> Für evolvierende Flächen ist dies ein gewaltiger Nachteil, denn indem die Konnektivität beibehalten und nur die Knotenkoordinaten verändert werden, ist es sehr aufwendig, Selbstüberschneidungen zu verhindern. Weil aber diese redundant gespeicherte Konnektivität ausgenutzt wird, um die globale Stetigkeit von FE-Funktionen zu gewährleisten, können durch sie auch absichtliche Unstetigkeitsstellen eingebaut werden: Indem die Verbindung zwischen den Dreiecken entlang eines Kantenzugs aus der Konnektivitätsliste entfernt wird und die betroffenen Knoten verdoppelt werden, tragen die in

---

<sup>1</sup> HJELLE/DÆLEN [2006].

## 5. Schlußbetrachtungen

der geometrischen Realisierung nur einfach vorhandenen Knoten plötzlich zwei Freiheitsgrade, und auf jedem der nun nicht mehr verbundenen Teile der Triangulierung kann sich ein anderer Wert einstellen.

Für Parametrisierungen bedeutet dies, sie an einem Kantenzug der Triangulierung „aufzuschneiden“ und im Bild der Triangulierung das Auseinanderlaufen oder auch Überschneiden eigentlich benachbarter Dreiecke zu erlauben. Dieses Aufschneiden wird typischerweise vom Anwender an einer nicht direkt im Blickfeld befindlichen Kante oder automatisiert<sup>2</sup> geschehen und reduziert die Flächenverzerrung erheblich.

Ein solches Aufschneiden der Parametrisierung erscheint bei der expliziten Nutzung eines uniformen Gitters, dessen Vorteil es vor allem ist, keinerlei Konnektivätsinformationen vorrätig halten zu müssen, zunächst nicht durchführbar. Tatsächlich ist hier aber der Ansatz von KAUFMANN et al. [2009] höchst gewinnbringend nutzbar: Indem eine Schnittkante durch die Elemente gezogen wird, für die man noch nicht einmal auf den Verlauf der Elementgrenzen angewiesen ist, sondern die frei durch die Fläche hindurchgezogen werden kann, und die Freiheitsgrade auf den Ecken der so geschnittenen Elemente verdoppelt werden, wird auch das „Aufschneiden“ implizit gegebener Fläche möglich.

### Verwendung nicht-uniformer Gitter

Unsere Implementierung basierte auf abgeschnittenen Basisfunktion auf uniformen Gittern. Wir haben in Abb. 4 (Seite 42) kurz erwähnt, daß dabei beliebig schlecht konditionierte virtuelle Tetraeder auftreten können. Bei der Parametrisierung von Dreiecksnetzen führen schlecht konditionierte, das heißt extrem schmale, Dreiecke sehr schnell zu *triangle flips* und damit Unbrauchbarkeit der Parametrisierung. Wir haben während unserer praktischen Implementierungsarbeit keine eindeutigen Belege dafür gefunden, daß das Problem bei abgeschnittenen Basisfunktionen auf Tetraedern exakt analog auftritt, können es aber auch nicht ausschließen. Die Idee eines dünnen Bandes um die Fläche eröffnet jedoch einen dritten Weg:<sup>3</sup> Der Rand des dünnen Bandes um eine als Dreiecksnetz gegebene Fläche muß längst nicht mit der gleichen Genauigkeit wie die Fläche selbst trianguliert sein, um noch visuell plausible Texturkoordinaten aus der Optimierung zu erhalten. Es böte sich also an, diesen Rand ungenau, aber mit hoher Dreiecksgüte zu triangulieren und daraus eine Tetrahedrisierung des Bandes aus sehr gut konditionierten Tetraedern zu konstruieren. Auf dieser könnte die Parametrisierung robust optimiert und anschließend wieder auf den Knoten des ursprünglichen Dreiecksnetzes interpoliert werden.

---

<sup>2</sup> SHEFFER/HART [2002].

<sup>3</sup> Persönliche Mitteilung DEGENER.

# A. Implementierung mithilfe der QuocMesh-Bibliothek

Sämtliche numerischen Experimente in dieser Arbeit wurden mithilfe der QuocMesh-Bibliothek durchgeführt. Sie ist eine von der Arbeitsgruppe Professor Martin Rumpf entwickelte FE-Bibliothek in C++, deren Kernbestandteile laufend fortentwickelt werden, um auf jeder Programmtiefe von den Standard-Algorithmen abweichen und Modifikationen austesten zu können. Bei fremdentwickelten Bibliotheken sind diese Eingriffsmöglichkeiten häufig sehr beschränkt.

Bisher existiert keine klare Darstellung der wesentlichen Strukturelemente „Gitter“ und „Konfiguratoren“ sowie der grundlegenden Assemblierungsroutinen. Wir versuchen eine kurze Darstellung der Konzepte, die auch als kleiner Ausdruck des Danks angesichts mannigfaltiger Hilfestellung und Unterstützung, die dem Verfasser im Laufe seiner Diplomandenzeit zugekommen ist, verstanden werden möge.

## A.1. Zur Struktur der QuocMeshes

BASTIAN et al. [2005] beschreiben die Möglichkeit, FE-Code simultan für verschiedene Arten von Gitterstrukturen und Ansatzräumen mithilfe generischer Programmierung zu erzeugen. Dieser Ansatz prägt die Struktur der QuocMeshes: Sämtliche FE-Operator-Klassen sind über dem Typ des Rechengitters und der verwendeten Art von Basisfunktionen (gekapselt in einer **Konfigurator**-Klasse) templatisiert.

Wir stellen die Schnittstellen, die sämtliche Gitter- und Konfigurator-Klassen implementieren, im folgenden durch die Syntax des derzeitigen C++-Standard dar. Die Verwendung von **Konzepten**<sup>1</sup> wäre syntaktisch korrekter, ist jedoch derzeit noch kaum verbreitet. Darüber hinaus ist völlig unklar, ob diesem Sprachkonstrukt möglicherweise das gleiche Schicksal erleidet wie Ausnahmespezifikationen, die aufgrund mangelnder Nachfrage von den Compilerherstellern seit zehn Jahren ignoriert werden. Auch der Ausschluß des Konzept-Konstrukts aus dem kommenden Standard C++0x weist in diese Richtung.

**Gitter-Klassen** speichern das verwendete Gitter, d. h. eine Aufzählung und die Struktur der vorhandenen Elemente, und können den globalen Index eines Elements berechnen bzw. abrufen. Sie implementieren folgende Schnittstelle:

A.1

---

<sup>1</sup> Vgl. beispielsweise JÄRVI/MARCUS/SMITH [2007].

### A. Implementierung mithilfe der QuocMesh-Bibliothek

```
class Grid {
public:
    class ElementType;
    class FullElementIterator;
    class FullNodeIterator;
    class BeginIterType;
    class EndIterType;

    const BeginIterType & begin () const;
    const EndIterType & end () const;

    int getNumberOfNodes () const;
    int getNumberOfElements () const;
    int getElementIndex ( const ElementType & );

    Dimension getDimOfWorld () const;
    RealType H () const;
};
```

Die meisten in `Grid` enthaltenen Klassen sind nur Typdefinitionen auf außerhalb bereits implementierte Klassen. Alle Iteratoren werden in üblicher STL-Syntax verwendet. Da sowohl Element- als auch Knoteniteratoren über `begin()` initialisiert und mit `end()` verglichen werden sollen, dürfen beide nicht selbst einen Iterator zurückgeben. Entsprechend besitzen die Iteratorklassen keinen Kopierkonstruktor und können nicht mit sich selbst, sondern nur mit einem `EndIterType` verglichen werden.

In der hier beschriebenen Vollständigkeit sind derzeit nur uniforme Gitter implementiert, d. h. die Rechenknoten liegen auf einem Gitter  $h\mathbb{Z}^d$  (Elemente sind also stets Würfel oder kongruente Simplicia), und alle innerhalb des Rechengebiets liegenden Punkte dieses Gitters werden auch als Rechenknoten verwendet. Im einzelnen sind vorhanden:

**GridDefinition** hierarchisches Gitter, also  $2^\ell + 1$  Knoten in jeder Raumdimension, äquidistant verteilt. Als Rechengebiet wird stets  $[0; 1]^d$ ,  $d = 2, 3$ , angenommen. Das Gitter ist als veraltet markiert und sollte nicht mehr genutzt werden, da die Dimensionalität des Rechengebiets kein Template-Argument, sondern nur eine Member-Variable ist und es daher nicht als Trait für Iteratoren benutzt werden kann.

**RectangularGrid** Gitter mit quaderförmigem Rechengebiet, also verschiedener Anzahl von Rechenknoten in jeder Raumrichtung.

**simplex::GridStructure** Ist über einem Gitter mit würfelförmigen Elementen templatisiert und unterteilt die Elemente des  $d$ -dimensionale Rechtecksgitter in je  $d!$  Simplicia. Das liefert eine natürliche Indizierung eines simplizialen Elements als  $(e, s)$  mit  $e$  Index des enthaltenden Quaders im Ursprungsgitter,  $s$  Ordnungsnummer des Simplex in der (frei gewählten) Aufzählung der  $d!$  Simplicia in  $e$ .

Sind die Quaderelemente angeordnet, ist über  $e d! + s$  eine Anordnung auch der simplizialen Elemente möglich.

**NarrowBandGrid** Ist über einem Vollgitter templatisiert und enthält nur eine benutzerdefinierte Auswahl der dortigen Elemente. Als Vollgitter wird im allgemeinen eine `GridDefinition` oder eine `simplex::GridStructure`, spezialisiert über der `GridDefinition`, genutzt. Vergleiche auch Rnn. A.6f.

Bis auf das `NarrowBandGrid` werden die Elemente in keinem Gitter einzeln gespeichert, da sie ohnehin durch die Gitterstruktur vollständig bestimmt sind.

Viele, aber nicht alle der hier beschriebenen Funktionen sind auch für ein zweidimensionales Dreiecksgitter implementiert, dessen Gitterverwaltung durch eine Schnittstelle zur Bibliothek `OpenMesh` erledigt wird.

**Konfigurator-Klassen** stellen (als Typdefinitionen) sämtliche Vektor- und Matrixklassen bereit, die für die gewählte Art von Basisfunktionen geeignet sind. In diesem Hinblick sind sie als **Trait**<sup>2</sup> zu verstehen. Darüber hinaus geben sie für jedes Element Zugriff auf ein `BaseFuncSet`-Objekt, welches seinerseits Auswertung der auf diesem Element lebenden Basisfunktionen erlaubt. **A.2**

```
class Configurator {
public:
    class InitType;
    class ElementType;
    class ElementIteratorType;

    class VectorType;
    class FullMatrixType;
    class MatrixType;
    class MaskType;

    class VecType;
    class DomVecType;
    class MatType;

    class BeginIterType;
    class EndIterType;

    class BaseFuncSet {
public:
        int numQuadPoints () const;
        RealType getWeight ( int QuadPoint ) const;
        const DomVecType & getRefCoord ( int QuadPoint ) const;
    };
};
```

---

<sup>2</sup> MYERS [1995], VELDHUIZEN [2000], Seiten 18ff.

A. Implementierung mithilfe der QuocMesh-Bibliothek

```

RealType evaluate ( int BaseFuncNum, int QuadPoint ) const;
RealType evaluate ( int BaseFuncNum,
                    const DomVecType & RefCoord ) const;
const VecType & evaluateGradient
    ( int BaseFuncNum,
      int QuadPoint ) const;
void evaluateGradient ( int BaseFuncNum,
                       const DomVecType & RefCoord,
                       VecType & Gradient ) const;
};

static const int maxNumLocalDofs;
static const Dimension Dim;
static const Dimension DomDim;

const BeginIterType & begin () const;
const EndIterType end () const;

const InitType & getInitializer () const;
RealType H ( const ElementType & ) const;
RealType vol ( const ElementType & ) const;

int maxNumQuadPoints () const;
int getNumLocalDofs ( const ElementType & );
int getNumGlobalDofs () const;
const BaseFuncSet & getBaseFunctionSet
    ( const ElementType & ) const;
int localToGlobal ( const ElementType & El, int LocalIndex )
    const;
};

```

Für Würfelemente sind bilineare und quadratische Basisfunktionen implementiert, letztere ohne Freiheitsgrade im Inneren der Elemente, sondern mit größerem Träger als die bilinearen Basisfunktionen. Für simpliziale Elemente existieren lineare und abgeschnittene (vgl. Rnn. 3.10ff.) lineare Basisfunktionen.

### A.3 Finite-Elemente-Operatoren und statischer Polymorphismus

Seien  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  ein Multiindex,  $\mathbb{R}^\sigma := \mathbb{R}^{\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k}$  und  $x \in \mathbb{R}^\sigma$  ein Tensor  $k$ -ter Stufe mit Komponenten  $x_\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \sigma$ . Mit dieser Bezeichnung läßt sich die **Assemblierung** eines FE-Operators als numerische Quadratur gemäß Rn. 3.15 für

$$\int f_\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \sigma,$$

formulieren.  $f_\alpha$  wird im allgemeinen punktweise von den Funktionswerten und Gradienten der Basisfunktionen  $\psi_{\alpha_i}$  abhängen, häufig auch noch von den Funktionswerten weiterer FE-Funktionen. Es ist daher nicht gesichert, daß für Basisfunktion, die lokal Polynome vom maximalen Grad  $n$  sind, eine Quadraturregel vom Exaktheitsgrad  $kn$

genügt. Daher wird die Quadraturregel typischerweise auch vom Anwender zu spezifizieren sein.

Beispielsweise erhalten wir den tangentialen Steifigkeitsoperator vermöge  $\sigma = (N, N)$  und

$$f_{(i,j)} = |\nabla\Phi| \underline{\nabla}\Psi_i \cdot \underline{\nabla}\Psi_j.$$

Der Integrand ist kein Polynom mehr, so daß ihn keine Quadraturregel im allgemeinen Fall exakt auswerten wird. Nach dem ersten Lemma von Strang<sup>3</sup> wird die asymptotische Konvergenz des Ritz-Galerkin-Verfahrens nicht gestört, wenn ein Quadraturfehler von gleicher Ordnung wie die Gesamt-Konvergenzordnung des Verfahrens gemacht wird, bei den Finiten Elementen aus Rn. 3.6 genügt also eine Quadraturregel von Exaktheitsgrad 2.

Eine Funktion zur Assemblierung, welche die oben definierten Schnittstellen verwendet, wäre beispielsweise für  $\sigma = (N, N)$ :

```

void FEOp::assembleAdd ( MatrixType & M ) {
    typedef typename ConfiguratorType::ElementIteratorType Iterator;
    const typename ConfiguratorType::EndIterType
        end_it = configurator.end();

    int global[ConfiguratorType::maxNumLocalDofs];
    Iterator it = configurator.begin();

    for ( ; it != end_it; ++it ) {
        int numLocalDofs = configurator.getNumLocalDofs ( *it );

        // get the global indices of the local Dofs
        // of the current element
        for ( int i = 0; i < numLocalDofs; ++i )
            global[i] = configurator.localToGlobal ( *it, i );

        // add the locally computed values to the matrix
        for ( int i = 0; i < numLocalDofs; ++i ) {
            int glob_i = global[i];
            for ( int j = 0; j < numLocalDofs; ++j ) {
                int glob_j = global[j];
                M(glob_i, glob_j) += f.evaluate(i, j);
            }
        }
    }
}

```

Da für jeden Anwendungsfall einer Bibliothek ein gesondertes  $f$  implementiert werden muß, die Assemblierung ansonsten aber stets gleich funktioniert, bietet es sich an, die Auswertung von  $f$  von der übergeordneten Assemblierungsschleife zu trennen.

<sup>3</sup> BRAESS [2007], Lemma III.1.1, Seite 100. Direkt auf den Quadraturfehler bezogen vgl. LARSSON/THOMÉE [2005], Lemma 5.1, Seite 72.

## A. Implementierung mithilfe der QuocMesh-Bibliothek

Die Nutzung rein virtueller Funktionen verbietet sich aus Geschwindigkeitsgründen.<sup>4</sup> Stattdessen bieten sich zwei Lösungen an, die über generische Programmierung einen statischen Polymorphismus erzeugen:

- A.4 Funktor-Objekt zur Integrandenauswertung.** Die Operator-Klasse wird über den Typ von  $f$  templatisiert, ein Objekt dieses Typs wird beispielsweise im Konstruktor übergeben.<sup>5</sup>

Diese Lösung ergibt eine vollständige Trennung von Auswertungs- und Assemblierungsklassen. Einerseits kann sie zu extrem strukturiertem Code führen. Die extrem lose Kopplung der Klassen kann aber andererseits auch Unübersichtlichkeit erzeugen, da das Zusammenspiel der beiden nur nachvollziehbar ist, indem der getrennte Code im Geiste zusammengeführt wird.

- A.5 Implementierung der Auswertungsfunktion in Unterklassen, Vermeidung der virtuellen Funktion über Barton-Nackman-Konstruktion.** Nehmen wir an, `FEOp` sei über `typename ImpType` templatisiert, und `FEOpConcr` sei eine Unterklasse von `FEOp<FEOpConcr>` mit einer Funktion `evaluate(int, int)`. Die Rückbezüglichkeit des Template-Arguments erzeugt keinerlei gegenseitige Abhängigkeiten und ist problemlos möglich.

Dann betrachte die Funktionen

```
template<typename ImpType>
const ImpType & FEOp::asImp () {
    return static_cast<ImpType&> ( *this );
}
```

und ersetze die letzte Code-Zeile der Assemblierung durch:

```
M(glob_i, glob_j) += asImp().evaluate(i, j);
```

Offensichtlich kann zur Kompilierzeit die Auswertungsfunktion vollständig inline-expanded werden und erzeugt damit (wenigstens theoretisch) keinerlei Zeit-Overhead gegenüber einer menschengemachten Codeervielfachung durch Kopieren der Assemblierungsroutine für jeden Operator.

Die Barton-Nackman-Konstruktion<sup>6</sup> ermöglicht, da sie iterativ betrieben werden kann, eine Teilspezialisierung des Integranden. Beispielsweise kann eine direkte Unterklasse  $f_{(i,j)} := f_{(i,j)}(W) = W \nabla \Psi_i \cdot \nabla \Psi_j$  implementieren, wobei die Auswertung von  $W$  einer tieferen Unterklasse überlassen bleibt. Auch können Interfaces stärker spezialisiert werden, in diesem Beispiel als Operator  $V \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $W \mapsto \int f(W)$ .

Im Gegensatz zum Funktor-Ansatz bleibt der Code zusammenhängend und für den an virtuelle Funktionen gewöhnten Programmierer intuitiver, wohingegen ein Callback-gewöhnter Anwender die erste Variante vorziehen wird. Die QuocMeshes verwenden durchgängig die Barton-Nackman-Konstruktion und machen von der partiellen Implementierung des Integranden intensiven Gebrauch.

<sup>4</sup> VELDHUIZEN [2000], Seiten 6f.

<sup>5</sup> So beispielsweise VELDHUIZEN [2000], Seite 11.

<sup>6</sup> BARTON/NACKMAN [1994].



## A.2. Das Narrow-Band-Konzept der QuocMeshes

### A.6 Grundkonzept

Die QuocMeshes stellen bisher keine Möglichkeit zur Verfügung, beliebige Gebiete zu diskretisieren. Unter Rn. A.1 wurde bereits erwähnt, daß die Standard-Gitter der QuocMeshes einen vollen Einheitswürfel zum Rechenggebiet haben. Die Elemente werden natürlich nicht in einer Liste gespeichert, sondern über ihren linken unteren vorderen Punkt im Gitter  $h\mathbb{Z}^3$  indiziert. Probleme allerdings, die zu lösen nur in einer dünnen Umgebung  $\Omega$  einer im Rechenggebiet  $Q := [0; 1]^d$  eingebetteten  $d'$ -Mannigfaltigkeit interessant ist, würden bei Benutzen des vollen Gitters  $O(n^d)$  Aufwand erfordern, wo nur  $O(n^{d'})$  nötig wäre. DECKELNICK et al. [2009] verwenden eine Triangulierung von  $Q$ , die dergestalt adaptiv verfeinert wird, daß innerhalb  $\Omega$  eine vorgegebene Gitterweite nicht überschritten wird. Wir wählen einen davon in technischer Hinsicht sehr verschiedenen Ansatz.

Über die Gitter-Klasse für das Standard-Rechenggebiet  $Q$  wird das Narrow-Band-Gitter (NB-Gitter) als **Hülle** (eine über ihrer direkten Oberklasse templatisierte Klasse) gelegt. Wesentliches Datum dieser Klasse ist eine Liste von Elementen, die dem Gitter einzeln hinzugefügt wurden. Sie werden in einer STL-Hash-Map gespeichert, und der Hash-Map-Iterator wird als Elementiterator exportiert.

### Indizierung

Die Element- und Knotenindizierung des Vollgitters wird auch zur Indizierung der Elemente und Knoten im NB-Gitter verwendet. Sie sind also nicht mehr fortlaufend in einem Intervall natürlicher Zahlen indiziert, sondern eine (arbiträre) Auswahl aus  $\{0, \dots, i_{\max}\}$ . Technisch wie auch konzeptionell birgt dies Vor- und Nachteile gegenüber einer vom Vollgitter unabhängigen Indizierung.

Vektoren, die Werte auf den Knoten des NB-Gitters speichern, müssen entweder Index-Wert-Paare ablegen, was den Zugriff wesentlich verlangsamt – gleichgültig, welche interne Datenstruktur verwendet wird –, oder es werden Werte für nicht-benutzte Knoten gespeichert (wofür wir uns entschlossen haben). Bei Matrizen (die in den QuocMeshes grundsätzlich zeilenbasiert gespeichert werden) werden nur für benutzte Knoten Zeilen-Objekte erzeugt, die restlichen Zeilen enthalten eine „nicht benutzt“-Information in Form eines NULL-Zeigers.

Ob ein Index  $i \in \mathbb{N}$  einen Rechenknoten bzw. ein Element indiziert, kann nicht durch einfaches Range-Checking überprüft werden. Bei Elementen dient der Element-Index als Hash-Index, so daß die Überprüfung in konstanter Zeit<sup>7</sup> durchgeführt werden kann. Bei Knoten ist auch dies nicht möglich, wenigstens in unserer Implementierung: Beim Gitteraufbau wird nicht gleichzeitig eine Liste der zugehörigen Rechenknoten geführt. Sobald aber ein Knoteniterator erzeugt wird, ruft dieser die Erstellung einer Knotenexistenzmaske auf. Sie speichert für jeden Knoten des zugrundeliegenden Vollgitters, ob er Ecke eines zum Gitter gehörenden Elements und als Rechenknoten des Narrow-Band-Gitters ist. Wenn das Gitter, wie in unserer Anwendung, nicht in der

<sup>7</sup> SAAKE/SATTLE [2006], Abschnitt 15.2.3, Seite 404.

### A.7

A. Implementierung mithilfe der QuocMesh-Bibliothek

Zeit verändert wird, fällt diese einmalige  $O(n^d)$ -Initialisierung sehr kleiner Konstanten wegen nicht ins Gewicht.

### A.3. Maskierung

**A.8 Problemstellung:** Sei  $L$  Bilinearform zur schwachen Form eines elliptischen Differentialoperators mit Dirichlet-Randwerten auf  $\Gamma_D$  und Neumann-Nullrandwerten auf dem Rest des Rechengebietsrandes. Zu lösen ist dann für einen Ansatzraum  $V$ , dessen auf  $\Gamma_D$  verschwindende Elemente den Unterraum  $V_0$  bilden mögen,

$$\begin{aligned} L[\psi, u] &= M[\psi, f] && \text{für alle } \psi \in V_0 \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D \end{aligned}$$

mit vorgegebener rechter Seite  $f$  und dem Massenoperator  $M$  aus Rn. 2.24.

Nun betrachte zu diesem Problem ein Rechengitter, dessen Dirichlet-Knoten über  $I_D$  und dessen restliche Knoten über  $I_{\text{int}}$  indiziert sind. Setze  $I := I_{\text{int}} \cup I_D$ . Analog zu NEMITZ [2008], Seiten 122f., führen wir die kanonische Restriktion (durch Fortwerfen von Einträgen) und die Prolongation durch Einfügen von Null-Einträgen

$$R : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^{I_{\text{int}}}, \quad P : \mathbb{R}^{I_{\text{int}}} \rightarrow \mathbb{R}^I$$

sowie die analoge Restriktion und Prolongation  $R^\perp$  und  $P^\perp$  von bzw. auf  $\mathbb{R}^{I_D}$  ein. Sehen wir dann die Matrix-Darstellung  $\bar{L}$  von  $L$  analog zu Rn. 3.7 und  $\bar{M}$  von  $M$  nach Rn. 3.9 über  $\mathbb{R}^{I \times I}$  assembliert an, so erhalten als diskretisierte Form die vektorwertige Gleichung

$$\begin{aligned} R\bar{L}\bar{U} &= R\bar{M}\bar{F}, \\ R^\perp\bar{U} &= \bar{U}_D \end{aligned}$$

Zerlegt man den zu findenden Vektor  $\bar{U}$  in den Vektor zu inneren und äußeren Knoten als  $\bar{U} = P\bar{U}^{\text{int}} + P^\perp\bar{U}^D$ , so lautet die untere Gleichung gerade  $\bar{U}^D = \bar{U}_D$ , und das läßt sich in die obere einsetzen:

**A.9** 
$$R\bar{L}P\bar{U}^{\text{int}} = R\bar{M}\bar{F} - R\bar{L}P^\perp\bar{U}_D$$

Wie bereits von NEMITZ referiert, gibt es technisch gesehen verschiedene Realisierungen dieser Prolongation und Restriktion:

**Aufbau kleinerer Matrizen.** Die in Gl. A.9 vorkommenden Matrizen werden einzeln assembliert, die Vektoren  $\bar{U}^{\text{int}}$  und  $\bar{U}_D$  sind im Programm als getrennte Variablen gespeichert. Aus Konsistenzgründen kann man dann auch noch  $\bar{F} = P\bar{F}^{\text{int}} + P^\perp\bar{F}^D$  zerlegen und für den linken Summanden der rechten Seite die beiden kleineren Matrizen  $R\bar{M}P$  und  $R\bar{M}P^\perp$  assemblieren. – Diese Variante ist in der QuocMesh-Bibliothek nicht implementiert.

**A.10**

**A.11 Zeilen- und Spaltenstreichung.** Die Matrizen in A.9 sind ja Teilmatrizen von  $\bar{L}$  und  $\bar{M}$ , beispielsweise erhält man  $R\bar{L}$  aus  $\bar{L}$ , indem man alle zu Knoten auf  $\Gamma_D$  gehörigen Zeilen entfernt.

Bis hierhin sind wir von der Vorstellung ausgegangen, daß  $\mathbb{R}^{I_{\text{int}}}$  und  $\mathbb{R}^I$  zwei voneinander unabhängige getrennte Räume seien. Genauso können wir uns natürlich auch den ersten in den zweiten eingebettet denken. In dieser Darstellung werden durch Anwendung von  $R$  die zu Randknoten gehörenden Werte nicht entfernt, sondern durch Null überschrieben.  $R\bar{L}$  erhalten wir dann aus  $\bar{L}$ , indem wir die entsprechenden Zeilen ausnullen.

Nummehr ist  $\bar{U}^D$  ein Vektor aus  $\mathbb{R}^I$ , der aber für alle inneren Knoten Nullen enthält, mithin gleich  $P^\perp \bar{U}^D$ . Genauso ist  $\bar{U}^{\text{int}} = P^\perp \bar{U}^{\text{int}}$ . Man sieht leicht ein, daß der folgende Algorithmus die Lösung von Gl. A.9 berechnet:

- (1) Assembliere  $\bar{L}$  und  $\bar{M}$ .
- (2) Berechne  $\bar{M}\bar{F}$  und  $\bar{L}\bar{U}_D$ . Speichere ihre Differenz.
- (3) Nulle die zu Randknoten gehörigen Werte des Vektors aus (2) aus, das ergibt  $R\bar{M}\bar{F} - R\bar{L}\bar{U}_D$ .
- (4) Ersetze Zeilen und Spalten in  $\bar{L}$ , die zu Randknoten gehören, durch Zeilen und Spalte der Einheitsmatrix (falls der lineare Löser die Invertierbarkeit seiner Matrix nicht explizit prüft und – wie beispielsweise das CG-Verfahren – in reiner Matrix-Anwendung formulierung werden kann, können auch Nullzeilen und -spalten verwendet werden; falls das Verfahren keine symmetrische Matrix erwartet, kann auf das Spalten-Ausnullen völlig verzichtet werden). Das ergibt  $R\bar{L}$ .
- (5) Nun sind Systemmatrix und rechte Seite des Gleichungssystems A.9 berechnet. Löse es nach  $\bar{U} \in \mathbb{R}^I$  auf. Bis auf Approximationsfehler wird das Ergebnis in  $\mathbb{R}^{I_{\text{int}}}$  liegen, also an Randknoten nur Nullen enthalten.
- (6) Ersetze die Werte an Randknoten durch Werte aus  $\bar{U}_D$ .

Diese Methode wird in der QuocMesh-Bibliothek häufig verwandt. Wenn Matrizen benutzt werden, bei denen das Ausnullen von Spalten nicht implementiert ist, muß anstelle von Schritt (4) eine Matrix  $R\bar{L}P$  neu assembliert werden, die bei Randknoten nichts als den (dann frei wählbaren) Diagonaleintrag enthält. Dieser Schritt wird als **maskierte Assemblierung** bezeichnet.

**Maskierte Anwendung.** Zuweilen soll die Matrix  $\bar{L}$  während der Lösung des Problems nicht modifiziert werden. So werden tangentiale und gewöhnliche Steifigkeitsmatrix in der Implementierung zu dieser Arbeit im gesamten Programmablauf nur jeweils einmal assembliert, und jeder Programmteil greift über ein Singleton<sup>8</sup> auf diese Matrix zu.

In diesem Fall muß die Berechnung des Matrix-Vektor-Produkts während der Lösung in Schritt (5) eine Matrix mit ausgenullten Zeilen und Spalten mimikrieren: Es wird

<sup>8</sup> GAMMA et al. [2004], Seiten 157ff.

#### *A. Implementierung mithilfe der QuocMesh-Bibliothek*

eine Hülle um das eigentliche Matrixobjekt angelegt, das bei Aufruf der Matrix-Vektor-Produkt-Funktion erst das gewöhnliche Produkt berechnet und hinterher im Ergebnis alle Randwerte ausnullt. Es wird dabei davon ausgegangen, daß der Ausgangsvektor im nicht benutzten Teil nur Nullen enthält; ansonsten könnte er ja nicht Ergebnis einer Prolongation sein. Diese Vorbedingung wird man im allgemeinen nicht jedesmal überprüfen und muß durch sorgfältiges Programmieren sichergestellt sein. – Die Methode ist insgesamt im Programmcode und während des Debugprozesses schwerer nachzuvollziehen und sollte deshalb nur angewandt werden, wenn das Kopieren der Systemmatrix einen zu großen Aufwand bedeuten würde.

# Literaturverzeichnis

- WILLIAM ABIKOFF: The Uniformization Theorem. *The American Mathematical Monthly*, **88** (1981) Nr. 8, Seiten 574–592.
- ROBERT A. ADAMS: Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.
- ALEXANDER DANILOWITSCH ALEXANDROW: Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Berlin: Akademie-Verlag, 1955.
- HANS WILHELM ALT: Lineare Funktionalanalysis. Berlin, Heidelberg: Springer, <sup>5</sup>2006.
- HERBERT AMANN/JOACHIM ESCHER: Analysis I. Basel: Birkhäuser, 1998.
- HERBERT AMANN/JOACHIM ESCHER: Analysis II. Basel: Birkhäuser, <sup>2</sup>2006.
- HERBERT AMANN/JOACHIM ESCHER: Analysis III. Basel: Birkhäuser, 2001.
- LARRY ARMIJO: Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, **16** (1966) Nr. 1, Seiten 1–3.
- IVO BABUŠKA/JENS MARKUS MELENK: The Partition of Unity Method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **40** (1997), Seiten 727–758.
- JOHN M. BALL: Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity. *Archive for rational mechanics and analysis*, **63** (1976) Nr. 4, Seiten 337–403.
- JOHN M. BALL: Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Series A (Mathematics)*, **88** (1981), Seiten 315–328.
- JOHN W. BARRETT/CHARLES M. ELLIOT: A Finite-element Method for Solving Elliptic Equations with Neumann Data on a Curved Boundary Using Unfitted Meshes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **4** (1984), Seiten 309–325.
- JOHN BARTON/LEE NACKMAN: Scientific and engineering C++. Reading (MA): Addison-Wesley, 1994.
- PETER BASTIAN ET AL.: Towards a Unified Framework for Scientific Computing. In: TIMOTHY J. ET AL. BARTH (HRSG.): Domain Decomposition Methods in Science and Engineering. Band III, Berlin: Springer, 2005, Seiten 167–173.
- ALAN F. BEARDON: A Primer on Riemann Surfaces. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

*Literaturverzeichnis*

- ALAN F. BEARDON: Algebra and Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- BENJAMIN BERKELS: Gradientenflussmethoden bei inversen Problemen in der Fernerkennung. Diplomarbeit Universität Duisburg, 2005.
- MARCELO BERTALMIO ET AL.: Variational Problems and Partial Differential Equations on Implicit Surfaces. *Journal of Computational Physics*, **174** (2001) Nr. 2, Seiten 759–780.
- WILHELM BLASCHKE/KURT LEICHTWEISS: Elementare Differentialgeometrie. Berlin: Springer, <sup>5</sup>1973.
- ALEXANDER I. BOBENKO/BORIS A. SPRINGBORN: Variational Principles for Circle Patterns and Koebe’s Theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356** (2004) Nr. 2, Seiten 659–689.
- ALEXANDER I. BOBENKO/BORIS A. SPRINGBORN: A Discrete Laplace–Beltrami Operator for Simplicial Surfaces. *Discrete Computational Geometry*, **38** (2007), Seiten 740–756.
- DIETRICH BRAESS: Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. Berlin: Springer, <sup>4</sup>2007.
- GLEN E. BREDON: Geometry and Topology. New York: Springer, 1993.
- MARTIN BURGER: Finite element approximation of elliptic partial differential equations on implicit surfaces. *Computing and Visualization in Science*, **12** (2009) Nr. 3, Seiten 87–100.
- MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Braunschweig: Vieweg, 1983.
- GUSTAVE CHOQUET: Sur un type de transformation analytique généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **69** (1945), Seiten 156–165.
- PHILIPPE G. CIARLET: Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity. Amsterdam: Elsevier, 1988.
- ULRICH CLARENZ/NATHAN LITKE/MARTIN RUMPF: Axioms and Variational Problems in Surface Parameterization. *Computer Aided Geometric Design*, **21** (2004) Nr. 8, Seiten 727–749.
- KLAUS DECKELNICK ET AL.: An  $h$ -narrow band finite-element method for elliptic equations on implicit surfaces. *IMA Journal of Numerical Analysis* (2009).
- PATRICK DEGENER: Surface Deformation Potentials on Meshes for Computer Graphics and Visualization. Dissertation Universität Bonn, 2009.

- PATRICK DEGENER/JAN MESETH/ROLF KLEIN: An Adaptable Surface Parameterization Method. In: Proceedings of the 12th International Meshing Roundtable. 2003, Seiten 201–213.
- MATTHIEU DESBRUN/MARK MEYER/PIERRE ALLIEZ: Intrinsic Parameterizations of Surface Meshes. In: Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics). 2002.
- PETER DEUFLHARD/ANDREAS HOHMANN: Numerische Mathematik I. Berlin: de Gruyter, <sup>3</sup>2002.
- AYELET DOMINITZ/ALLEN TANNENBAUM: Texture Mapping via Optimal Mass Transport. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **16** (2010), online vorveröffentlicht.
- MARC DROSKE/MARTIN RUMPF: A level set formulation for Willmore flow. *Interfaces and Free Boundaries*, **6** (2004) Nr. 3, Seiten 361–378.
- RICHARD J. DUFFIN: Distributed and lumped networks. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **8** (1959) Nr. 5, Seiten 793–825.
- GERD DZIUK/CHARLES M. ELLIOTT: Eulerian finite element method for parabolic PDEs on implicit surfaces. *Interfaces and Free Boundaries*, **10** (2008), Seiten 119–138.
- MATTHIAS ECK ET AL.: Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes. In: Computer Graphics (SIGGRAPH '95 Proceedings). New York: ACM Press, 1995, Seiten 173–182.
- JOST-HINRICH ESCHENBURG/JÜRGEN JOST: Differentialgeometrie und Minimalflächen. Berlin: Springer, <sup>2</sup>2007.
- HERBERT FEDERER: Curvature Measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, **93** (1959), Seiten 418–491.
- MICHAEL S. FLOATER: Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, **14** (1997), Seiten 231–250.
- MICHAEL S. FLOATER: One-to-one piecewise linear mappings over triangulations. *Mathematics of Computation*, **72** (2003), Seiten 685–696.
- MICHAEL S. FLOATER/KAI HORMANN: Surface Parameterization: A Tutorial and Survey. In: NEIL A. DOGSON/MICHAEL S. FLOATER/MALCOLM A. SABIN (HRSG.): Advances in Multiresolution for Geometric Modelling. Berlin: Springer, 2005, Seiten 157–186.
- EBERHARD FREITAG/ROLF BUSAM: Funktionentheorie I. Berlin: Springer, <sup>4</sup>2006.
- ERICH GAMMA ET AL.: Entwurfsmuster. Elemente wiederverwendbarer Software. München: Addison-Wesley, 2004.

*Literaturverzeichnis*

- CARL FRIEDRICH GAUSS: Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. *Astronomische Abhandlungen*, **3** (1825), in: GAUSS: Werke, Band VI, Seiten 189–216.
- CARL FRIEDRICH GAUSS: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie (erste Abhandlung). *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **2** (1844), in GAUSS: Werke, Band IV, Seiten 259–300.
- CARL FRIEDRICH GAUSS: Werke. Herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen, Leipzig, Berlin, 1870–1933.
- DAVID GILBARG/NEIL S. TRUDINGER: Elliptic PDE of Second Order. Berlin: Springer, 2001, Nachdruck der Auflage <sup>2</sup>1998.
- ENNIO DE GIORGI: Su una teoria generale della misure  $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio ad  $r$  dimensioni. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **4** (1954), Seiten 191–212.
- WOLFGANG HACKBUSCH/STEFAN A. SAUTER: Composite finite elements for the approximation of PDEs on domains with complicated micro-structures. *Numerische Mathematik*, **75** (1997), Seiten 447–472.
- STEVEN HAKER ET AL.: Conformal Surface Parameterization for Texture Mapping. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **6** (2000) Nr. 2, Seiten 181–189.
- ALAN HATCHER: Algebraic Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- MARTIN HERMANN: Numerische Mathematik. München: Oldenbourg, <sup>2</sup>2006.
- MAGNUS R. HESTENES/EDUARD STIEFEL: Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **49** (1952) Nr. 6, Seiten 409–436.
- KLAUS HILDEBRANDT/KONRAD POLTHIER/MAX WARDETZKY: On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces. *Geometricae Dedicata*, **123** (2006), Seiten 89–112.
- STEFAN HILDEBRANDT/HEIKO VAN DER MOSEL: On Lichtenstein’s theorem about globally conformal mappings. *Calculus of Variations*, **23** (2005), Seiten 415–424.
- ØYVIND HJELLE/MORTEN DÆLEN: Triangulations and Applications. Berlin: Springer, 2006.
- KAI HORMANN: Theory and Applications of Parameterizing Triangulations. Diss. Universität Erlangen, 2001.



- KAI HORMANN/GÜNTHER GREINER: MIPS: An Efficient Global Parametrization Method. In: PIERRE-JEAN LAURENT/PAUL SABLONNIÈRE/LARRY L. SCHUMAKER (HRSG.): Curve and Surface Design. Nashville (TN): Vanderbilt University Press, 2000, Seiten 153–162.
- KAI HORMANN/BRUNO LÉVY/ALLA SHEFFER: Mesh Parameterization: Theory and Practice. In: SIGGRAPH Course Notes. 2007.
- KLAUS JÄNICH: Vektoranalysis. Berlin: Springer, <sup>5</sup>2005.
- JAAKKO JÄRVI/MATTHEW A. MARCUS/JACOB N. SMITH: Library Composition and Adaptation using C++ Concepts. In: Generative Programming And Component Engineering. Proceedings of the 6th international conference on Generative programming and component engineering. 2007, Seiten 73–82.
- JÜRGEN JOST: Conformal mappings and the Plateau-Douglas problem in Riemannian manifolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **359** (1985), Seiten 37–54.
- JÜRGEN JOST: Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer, <sup>4</sup>2005.
- PETER KAUFMANN ET AL.: Enrichment Textures for Detailed Cutting of Shells. *ACM Transactions on Graphics* **28** (2009) Nr. 3.
- LILIYA KHAREVYCH/BORIN SPRINGBORN/PETER SCHRÖDER: Discrete conformal mappings via circle patterns. *ACM Transactions on Graphics*, **25** (2006) Nr. 2, Seiten 412–438.
- KITWARE, INC. (HRSG.): The VTK User’s Guide. Clifton Park (NY): Kitware, Inc., 2006.
- HELMUTH KNESER: Lösung der Aufgabe 41. *Jahresbericht der DMV*, **35** (1926), Seiten 123f.
- PAUL KOEBE: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, **62** (1907), Seiten 191–210.
- ERWIN KREYSZIG: Differentialgeometrie. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, <sup>2</sup>1968.
- STIG LARSSON/VIDAR THOMÉE: Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden. Berlin: Springer, <sup>3</sup>2005.
- JOHN M. LEE: Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. New York: Springer, 1997.
- BRUNO LÉVY ET AL.: Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Transactions on Graphics*, **21** (2002) Nr. 3, Seiten 362–371.

*Literaturverzeichnis*

- M. LÉON LICHTENSTEIN: Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A: Sciences Mathématiques*, (1916), Seiten 192–217.
- FLORIAN LIEHR: Ein effizienter Löser für elastische Mikrostrukturen. Diplomarbeit Universität Duisburg, 2004.
- FLORIAN LIEHR ET AL.: Composite Finite Elements for 3D Image Based Computing. *Computing and Visualization in Science*, **12** (2009) Nr. 4, Seiten 171–188.
- ELON L. LIMA: The Jordan-Brouwer Separation Theorem for Smooth Hypersurfaces. *The American Mathematical Monthly*, **95** (1988) Nr. 1, Seiten 39–42.
- WILLIAM E. LORENSEN/HARVEY E. CLINE: Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *Computer Graphics*, **21** (1987), Seiten 163–169.
- JAN MALÝ/DAVID SWANSON/WILLIAM P. ZIEMER: The Co-Area Formula for Sobolev Mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, **355** (2002), Seiten 477–492.
- ANDREAS MEISTER: Numerik linearer Gleichungssysteme. Wiesbaden: Vieweg, <sup>3</sup>2008.
- JÜRGEN MOSER: On the Volume Elements on a Manifold. *Transactions of the American Mathematical Society*, **120** (1965), Seiten 286–294.
- JAMES A. MUNKRES: Topology. Upper Saddle River (NJ): Pearson Education, <sup>2</sup>2000.
- NATHAN C. MYERS: Traits: a New and Useful Template Technique. *C++ Report*, **7** (1995) Nr. 5, Seiten 32–35.
- OLIVER NEMITZ: Anisotrope Verfahren in der Bildverarbeitung: Gradientenflüsse, Level-Sets und Narrow Bands. Dissertation Universität Bonn, 2008.
- JORGE NOCEDAL/STEPHEN J. WRIGHT: Numerical Optimization. Berlin: Springer, <sup>2</sup>2006.
- NADINE OLISCHLÄGER: Optimale konforme Parametrisierungen von topologischen Sphären. Diplomarbeit Universität Duisburg-Essen, 2005.
- STANLEY OSHER: Level Set Methods. In: STANLEY OSHER/NIKOS PARAGIOS (HRSG.): Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics. New York: Springer, 2003, Seiten 3–20.
- STANLEY OSHER/RONALD FEDKIW: Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. New York: Springer, 2003.
- STANLEY OSHER/JAMES A. SETHIAN: Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton–Jacobi Formulations. *Journal of Computational Physics*, **79** (1988), Seiten 12–49.

- ULRICH PINKALL/KONRAD POLTHIER: Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates. *Experimental Mathematics*, **2** (1993) Nr. 1, Seiten 15–36.
- TOBIAS PREUSSER/MARTIN RUMPF/LARS OLE SCHWEN: Finite Element Simulation of Bone Microstructures. In: Proceedings of the 14th Workshop on the Finite Element Method in Biomedical Engineering, Biomechanics and Related Fields. Universität Ulm 2007, Seiten 52–66.
- TIBOR RADÓ: Aufgabe 41. *Jahresbericht der DMV*, **35** (1926), Seite 48.
- REINHOLD REMMERT/GEORG SCHUMACHER: Funktionentheorie I. Berlin: Springer, <sup>5</sup>2002.
- REINHOLD REMMERT/GEORG SCHUMACHER: Funktionentheorie II. Berlin: Springer, <sup>3</sup>2007.
- BERNHARD RIEMANN: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Dissertation Universität Göttingen, 1851, in: RIEMANN: Werke, Seiten 3–43.
- BERNHARD RIEMANN; HEINRICH WEBER/RICHARD DEDEKIND (HRSG.): Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. Leipzig: B. G. Teubner, <sup>2</sup>1892.
- GUNTHER SAAKE/KAI-UWE SATTLER: Algorithmen und Datenstrukturen. Heidelberg: dpunkt.verlag, <sup>3</sup>2006.
- HANS SAMELSON: Orientability of Hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*, **22** (1969) Nr. 1, Seiten 301f..
- ROBERT SCHABACK/HOLGER WENDLAND: Numerische Mathematik. Berlin: Springer, <sup>5</sup>2005.
- WILL SCHROEDER/KEN MARTIN/BILL LORENSEN: The Visualization Toolkit. Kitware, <sup>4</sup>2006.
- ALLA SHEFFER/JOHN C. HART: Seamster: Inconspicuous Low-Distortion Texture Seam Layout. In: Proceedings of IEEE Visualization. 2002, Seiten 291–298.
- ALLA SHEFFER ET AL.: ABF++: Fast and Robust Angle Based Flattening. *ACM Transactions on Graphics*, **24** (2005) Nr. 2, Seiten 311–330.
- ALLA SHEFFER/EMIL PRAUN/KENNETH ROSE: Mesh parameterization methods and their applications. *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, **2** (2006) Nr. 2, Seiten 105–171.
- ALLA SHEFFER/ERIC DE STURLER: Parameterization of Faceted Surfaces for Meshing using Angle-Based Flattening. *Engineering with Computers*, **17** (2001), Seiten 326–337.

*Literaturverzeichnis*

- BORIS SPRINGBORN/PETER SCHRÖDER/ULRICH PINKALL: Conformal Equivalence of Triangle Meshes. *ACM Transactions on Graphics* **27** (2008) Nr. 3, Artikel 77.
- PAUL STÄCKEL: Gauss als Geometer. *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Band 5. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 1917, in: GAUSS: Werke, Band X.2, Abhandlung 4.
- KENNETH STEPHENSON: Introduction to Circle Packing. The Theory of Discrete Analytic Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- MARTINA TEUSNER: Variationsmethoden höherer Ordnung zur Flächenbearbeitung. Diplomarbeit Universität Bonn, 2007.
- TODD VELDHIJZEN: Techniques for Scientific C++. Indiana University Department of Computer Science, 2000 (542). – Technischer Bericht.
- SHIN YOSHIKAWA/ALEXANDER BELYAEV/HANS-PETER SEIDEL: A fast and simple strich-minimizing mesh parameterization. *Proceedings of Shape Modeling Applications*, **6** (2004), Seiten 200–208.