

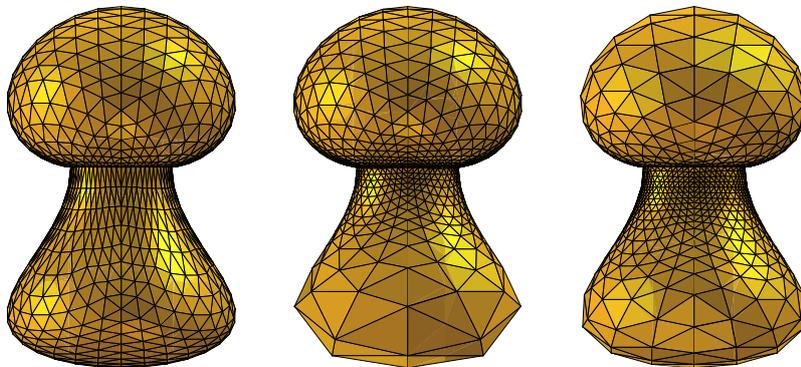


UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN, CAMPUS DUISBURG  
FACHBEREICH MATHEMATIK

# Optimale konforme Parametrisierungen von topologischen Sphären

Diplomarbeit  
von  
Nadine Olischläger

Duisburg, Januar 2005





## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Konformität</b>	<b>8</b>
2.1	Konforme Abbildungen . . . . .	8
2.2	Konforme Automorphismen der Sphäre . . . . .	12
2.3	Darstellung der konformen Automorphismen der Sphäre . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Energieformulierung</b>	<b>22</b>
3.1	Flächen- und Längenerhaltung . . . . .	22
3.2	Tangentiale Ableitung der konformen Diffeomorphismen der Sphäre . . . . .	25
3.3	Berechnung der Determinate des Verzerrungstensors . . . . .	26
3.4	Darstellung der elastischen Energie . . . . .	27
3.5	Existenzresultat . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Diskretisierung und Implementierung</b>	<b>50</b>
4.1	Diskretisierung der Energie . . . . .	50
4.2	Gradient und Hesse-Matrix der diskreten Energie . . . . .	54
4.3	Diskret konforme Startparametrisierung . . . . .	60
4.4	Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung . . . . .	61
4.5	Implementationsdetails . . . . .	65
4.6	Numerische Ergebnisse . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Gitteroptimierung via optimaler konformer Parametrisierung</b>	<b>77</b>
5.1	Beispiele von Reparametrisierungen . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>83</b>
<b>7</b>	<b>Schlussbemerkungen</b>	<b>87</b>
	<b>Literatur</b>	<b>89</b>



## 1 Einleitung

Eine gute Parametrisierung ist wichtige Grundlage für viele Anwendungen in der Computergrafik. Zum Beispiel konstruieren Hormann und Greiner [15] MIPS, Most Isometric Parametrizations, globale Parametrisierungen von triangulierten Flächen mit minimaler Verzerrung. Clarenz, Litke und Rumpf [6] definieren optimale Parametrisierungen für Flächenstücke von zweidimensionalen glatten Flächen. Für eine weitere Anwendung verweise ich auf Khodakovsky, Litke und Schröder [17].

Wünschenswert ist, dass Parametrisierungen Isometrien sind, weil dann alle Eigenschaften der Fläche ins korrespondierende Parametergebiet übertragen werden. Eine Abbildung zwischen zwei Flächen ist eine Isometrie, wenn die ersten Fundamentalformen übereinstimmen. Da es nach dem Theorema egregium ([8], §1.3) für gekrümmte Flächen i.a. keine isometrische Parametrisierung geben muss, sucht man Parametrisierungen, welche Längen, Winkel oder lokal Flächen erhalten. Moser [20, 7] hat zum Beispiel lokal flächenerhaltende Abbildungen zwischen allgemeinen Mannigfaltigkeiten konstruiert.

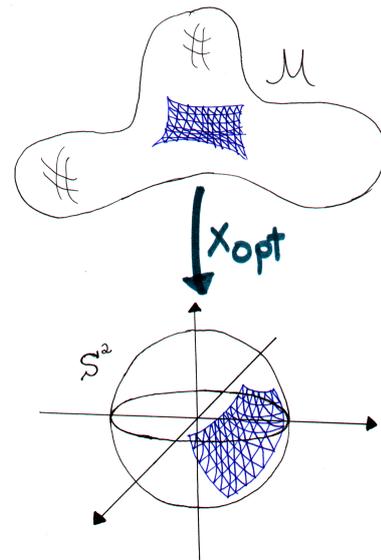
Die Frage nach winkeltreuen, d.h. konformen, Abbildungen hat eine lange Geschichte. Gauß zeigte, dass alle zweidimensionalen und reell analytischen Flächen lokal konform parametrisiert werden können [12]. 1916 bewies Lichtenstein [19], dass dies auch für  $C^{1,\alpha}$ -Flächen möglich ist. Jede reguläre  $C^{1,\alpha}$ -Fläche kann sogar global konform parametrisiert werden, wenn man den Uniformisierungssatz verwendet. Literaturangaben zu verschiedenen Varianten des Beweises findet man in [21], §60. Hildebrandt und von der Mosel [14] präsentierten kürzlich einen Beweis für die Existenz von konformen Parametrisierungen für Flächen vom Typ der Kreisscheibe. Konforme Parametrisierungen für Flächen höheren Geschlechtes findet man bei Gu und Yau [13].

In meiner Arbeit suche ich zur eingebetteten Fläche  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  vom topologischen Typ der Sphäre konforme Parametrisierungen  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  (Abbildung rechts), die möglichst flächen- und längentreu sind. Dabei kann die Gewichtung von Flächen- und Längenerhaltung variieren.

Um Konformität zu erhalten, formuliert man die Problemstellung um: Angenommen  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  sei eine bereits harmonische Parametrisierung. Numerisch erhält man ein harmonisches Gitter wie in [5] beschrieben. Nach einem speziellen Fall eines von Eells und Wood [11] bewiesenen Satzes ist  $\mathbf{x}$  bereits konform. Die Idee ist nun, eine optimale konforme Deformation  $\Phi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  zu finden, so dass die konforme Umparametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi] := \Phi \circ \mathbf{x}$  optimal bzgl. Flächen- und Längenerhaltung ist, vgl. Abbildung 1.1. Zu jedem konformen Automorphismus  $\Phi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  existiert eine Möbiustransformation  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  und  $ad - bc = 1$ , so dass sich  $\Phi$  darstellen lässt als  $\Phi = \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi$ , wobei  $\Pi$  die stereographische Projektion vom Nordpol ist. Die optimale Parametrisierung  $\mathbf{x}_{opt} = \mathbf{x} \circ \Phi_{opt}$  definiere ich als Minimierer einer geeigneten Energie, welche später nur von den acht reellen Parametern



obiger Möbiustransformation abhängen wird. Dabei folge ich wie Clarenz, Litke und Rumpf [6] und Ciarlet [4] der Elastizitätstheorie und entwickle eine Energie, welche nur von den Invarianten Spur und Determinante des Verzerrungstensors

$$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$$

abhängt.  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}}$  bezeichnet dabei den tangentialen Gradienten, d.h. die Projektion des Gradienten auf den Tangentialraum von  $\mathcal{M}$ . Ich leite die Energie aus den an mein Parametrisierungskonzept angepassten Axiomen Isotropie und Bezugssysteminvarianz her. Das zugehörige diskrete nicht-lineare Minimierungsproblem löse ich mit einem Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung.

Die Diskretisierung basiert auf lineare finite Elemente auf triangulierten Flächen, was in [10] von Dziuk entwickelt worden ist. Die Fläche  $\mathcal{M}$  wird durch eine diskrete, aber stetige Fläche

$$\mathcal{M}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

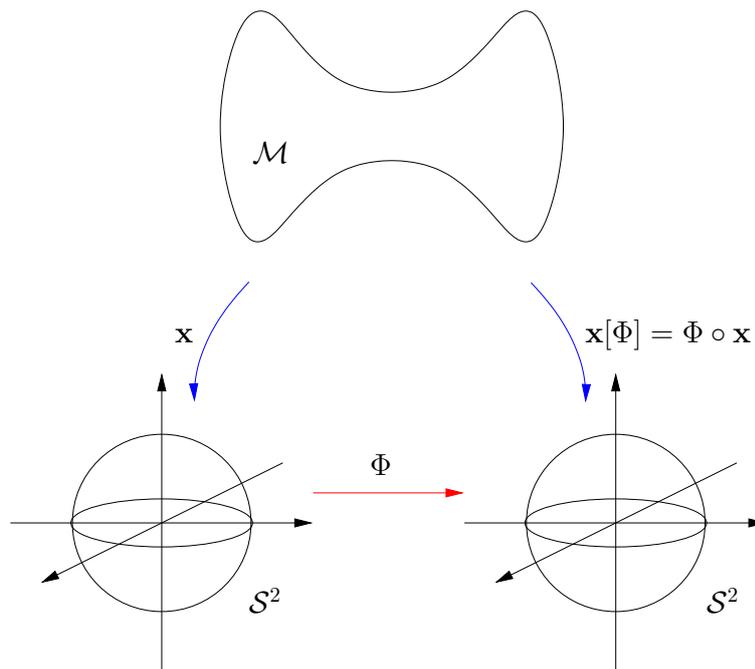
approximiert, welche aus Dreiecken  $T$  einer zulässigen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  besteht. Der finite Element-Raum von stückweise linear finiten Elementen auf  $\mathcal{M}_h$  ist definiert als

$$V_h = V_h(\mathcal{M}_h) = \{ \mathbf{x}_h \in C^0(\mathcal{M}_h) \mid \mathbf{x}_h|_T \in \mathcal{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_h \}.$$

Analog ist  $\mathcal{S}_h^2$  eine diskrete Sphäre, welche aus Dreiecken einer Triangulierung mit Knoten auf der  $\mathcal{S}^2$  besteht. Der finite Element-Raum  $V_h(\mathcal{M}_h)$  wird aufgespannt von den nodalen Basisfunktionen  $\phi_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) für eine Indexmenge, welche zu den Knoten  $a_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) von  $\mathcal{T}_h$ , den Ecken der Dreiecke von  $\mathcal{M}_h$ , korrespondiert. Damit bilden  $\{\phi_{ij}\}_{i=1,2,3; j=1,\dots,N}$  mit  $\phi_{ij} := \phi_j e_i$  eine Basis des diskreten Raumes  $V_h^3$ . Auf jedem Dreieck  $T$  von  $\mathcal{M}_h$  ist der Gradient von  $\phi_{ij}$  und damit auch die diskrete Metrik zur Längen- und Flächenmessung auf  $\mathcal{M}_h$  konstant. Diskret konforme Abbildungen werden nach [5] als Minimierer des Dirichlet-Integrals im Raum  $V_h^3$  mit Schwerpunkt im Ursprung definiert.

Die für den diskreten Gradient und für die diskrete Hesse-Matrix benötigten Ableitungen der Determinante und Spur des Verzerrungstensors  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  habe ich mit Maple 8 berechnen lassen. Maple hat dann aus den Ergebnissen einen c++-Code generiert. Zum Beispiel ist der c++-Code zur Berechnung der diskreten Hesse-Matrix der Determinante auf einem Dreieck  $T$  der Triangulierung von  $\mathcal{M}_h$  ungefähr 5500 Zeilen lang und berechnet 4508 lokale Variablen. Dies belegt die Komplexität der Ableitungen von Spur und Determinante.

Als eine Anwendung zeige ich zum Schluss, wie man die Qualität der Triangulierung einer Fläche verbessern kann, indem man eine regelmäßige Sphärentriangulierung mit Hilfe der gefundenen optimalen Parametrisierung auf die Fläche projiziert.

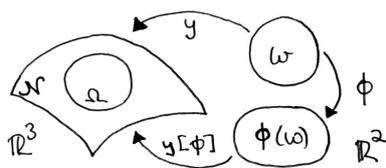


**Abbildung 1.1:** Das Setting der Reparametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi]$  einer gegebenen Parametrisierung  $\mathbf{x}$  mittels Deformation  $\Phi$ .

Meine Arbeit ist wie folgt organisiert:

In Abschnitt 2 definiere ich konforme und harmonische Abbildungen und charakterisiere die konformen Automorphismen von  $\mathcal{S}^2$ .

Der Elastizitätstheorie folgend, leite ich im 3. Kapitel aus den Axiomen der Elastizität, Bezugssysteminvarianz und Isotropie eine Klasse von Energiefunktionalen her. Sie sind geometrisch von



Bedeutung, da sie Flächen- und Längenverzerrung messen. Ich beweise die Existenz von Minimierern dieser Energiefunktionale. Die Darstellung der elastischen Energie in Abschnitt 3.4 orientiert sich dabei an Clarenz, Litke und Rumpf [6]. Für ein Flächenstück  $\Omega$  einer zweidimensionalen glatten Fläche  $\mathcal{N}$  im  $\mathbb{R}^3$  beschreiben sie Parametrisierungen mit niedriger Verzerrung als Minimierer eines ähnlichen Energiefunktionals. Zu einer gegebenen Karte  $\mathbf{y} : \omega \rightarrow \Omega \subset \mathcal{N}$  suchen sie, wie in der linken Abbildung zu sehen ist, eine optimale euklidische Deformation  $\Phi : \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche ein Diffeomorphismus ist.

Abschnitt 4 befasst sich mit der Diskretisierung und Implementation. Die zu minimierende diskrete Energie wird eingeführt. Der hier vorgestellte Algorithmus basiert auf eine Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung. Numerische Ergebnisse belegen seine quadratische Konvergenz.

Eine Anwendung zur Gitteroptimierung der Fläche  $\mathcal{M}$  findet man in Kapitel 5.

Meine Arbeit endet mit Diskussion im Kapitel 6.

## 2 Konformität

### 2.1 Konforme Abbildungen

$\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  sei eine zweidimensionale eingebettete reguläre Fläche. Sie sei orientierbar und  $n : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}^2$  bezeichne die Normalenabbildung. Die geometrischen Grundlagen zur Flächentheorie findet man z. Bsp. in [9, 8].

Ich werde das Konzept der tangentialen Gradienten benutzen:

**Definition 2.1 (Tangentialer Gradient.)**

$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine  $C^1$ -Funktion, wobei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^3$  und  $\Gamma \subset U$ .

Der tangentielle Gradient  $\underline{\nabla}_\Gamma \varphi$  ist definiert als Projektion des Gradienten  $\nabla_{\mathbb{R}^3} \varphi$  auf den Tangentialraum von  $\Gamma$ :

$$\underline{\nabla}_\Gamma \varphi = (\mathbf{1} - n \otimes n) \nabla_{\mathbb{R}^3} \varphi = \nabla_{\mathbb{R}^3} \varphi - (n \cdot \nabla_{\mathbb{R}^3} \varphi) n.$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{1}$  die Identität im  $\mathbb{R}^3$  und  $n$  die Normale an  $\Gamma$ . Das euklidische Skalarprodukt wird mit  $\cdot$ , und die Komponenten von  $\underline{\nabla}_\Gamma \varphi$  werden mit  $\underline{\nabla}_{\Gamma,i} \varphi$ ,  $i = 1, 2, 3$ , bezeichnet. Weitere Bezeichnungen:

$$\underline{\nabla}_\Gamma \varphi = \underline{\nabla} \varphi \quad \text{bzw.} \quad \underline{\nabla}_{\Gamma,i} \varphi = \underline{\nabla}_i \varphi.$$

Wenn  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$  und  $\varphi^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi^i \in C^1(U)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ist, dann bezeichnet  $\underline{\nabla}_\Gamma \varphi$  den komponentenweisen tangentialen Gradienten:

$$\underline{\nabla}_\Gamma \varphi = \begin{pmatrix} \underline{\nabla}_\Gamma \varphi^1 \\ \underline{\nabla}_\Gamma \varphi^2 \\ \underline{\nabla}_\Gamma \varphi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\nabla}_{\Gamma,1} \varphi^1 & \underline{\nabla}_{\Gamma,2} \varphi^1 & \underline{\nabla}_{\Gamma,3} \varphi^1 \\ \underline{\nabla}_{\Gamma,1} \varphi^2 & \underline{\nabla}_{\Gamma,2} \varphi^2 & \underline{\nabla}_{\Gamma,3} \varphi^2 \\ \underline{\nabla}_{\Gamma,1} \varphi^3 & \underline{\nabla}_{\Gamma,2} \varphi^3 & \underline{\nabla}_{\Gamma,3} \varphi^3 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 2.2**

Der tangentielle Gradient hängt nur von den Werten der Funktion  $\varphi$  auf der Fläche  $\Gamma$  ab. Angenommen  $\bar{\varphi} \in C^1(U)$ ,  $U$  wie in Definition 2.1, genüge  $\varphi = \bar{\varphi}$  auf  $\Gamma$ . Dann ist  $\nabla_{\mathbb{R}^3}(\varphi - \bar{\varphi}) = kn$  für eine Konstante  $k$  und man erhält

$$\underline{\nabla}_\Gamma(\varphi - \bar{\varphi}) = kn - kn = 0.$$

**Satz 2.3 (Kettenregel.)**

Seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$  zweidimensionale eingebettete reguläre Flächen und  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Diffeomorphismus auf  $\Gamma_2$ , d.h.  $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$ . Dann gilt für glatte  $\psi : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{\nabla}_{\Gamma_1} (\psi \circ \varphi) = (\underline{\nabla}_{\Gamma_2} \psi) \circ \varphi \underline{\nabla}_{\Gamma_1} (\varphi). \quad (2.1)$$

**Beweis** (Einsteinsche Summenkonvention, über doppelt auftretende Indizes wird summiert.)

Lokal lässt sich  $\Gamma_2$  darstellen als  $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : u(x) = 0\}$ , mit  $\nabla_{\mathbb{R}^3} u \neq 0$  auf  $\Gamma_2$ .

Sei  $n^{\Gamma_1}$  die Normale an  $\Gamma_1$  und  $n^{\Gamma_2} = \frac{\nabla_{\mathbb{R}^3} u}{|\nabla_{\mathbb{R}^3} u|}$  die Normale an  $\Gamma_2$ .

$\partial_k$  bezeichnet die partielle Ableitung nach der  $k$ -ten Variablen. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(\varphi) = 0 &\stackrel{\frac{\partial}{\partial x_k}}{\Rightarrow} \nabla_{\mathbb{R}^3} u \cdot \partial_k \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\nabla_{\mathbb{R}^3} u}{|\nabla_{\mathbb{R}^3} u|} \cdot \partial_k \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow n^{\Gamma_2} \cdot \partial_k \varphi = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_k(\psi \circ \varphi) &= \partial_k(\psi \circ \varphi) - n_k^{\Gamma_1} n_l^{\Gamma_1} \partial_l(\psi \circ \varphi) \\ &= \partial_i \psi \partial_k \varphi^i - n_k^{\Gamma_1} n_l^{\Gamma_1} \partial_j \psi \partial_l \varphi^j \\ &= \partial_i \psi \partial_k \varphi^i - n_k^{\Gamma_1} n_l^{\Gamma_1} \partial_j \psi \partial_l \varphi^j \\ &\quad - n_l^{\Gamma_2} \partial_l \psi \underbrace{n_i^{\Gamma_2} \partial_k \varphi^i}_{=0} + n_k^{\Gamma_1} n_s^{\Gamma_1} n_l^{\Gamma_2} \partial_l \psi \underbrace{n_i^{\Gamma_2} \partial_s \varphi^i}_{=0} \\ &= \left( \partial_i \psi - n_i^{\Gamma_2} n_l^{\Gamma_2} \partial_l \psi \right) \left( \partial_k \varphi^i - n_k^{\Gamma_1} n_s^{\Gamma_1} \partial_s \varphi^i \right) \\ &= (\underline{\nabla}_{\Gamma_2} \psi) \circ \varphi \underline{\nabla}_{\Gamma_1}(\varphi). \end{aligned}$$

□

#### Definition 2.4 (Konforme Abbildung.)

Ein Diffeomorphismus  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  einer zweidimensionalen Fläche im  $\mathbb{R}^3$  auf eine ebensolche Fläche  $\Gamma_2$  heißt konform, wenn jedem Paar von Kurven auf  $\Gamma_1$ , die sich in  $x \in \Gamma_1$  unter einem Winkel  $\alpha$  schneiden, ein Kurvenpaar auf  $\Gamma_2$  durch  $\varphi$  zugeordnet ist, das sich in  $\varphi(x) \in \Gamma_2$  ebenfalls unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet.

Nun zu einigen mathematischen Formulierungen des Begriffs konforme Abbildung:

**Lemma 2.5**  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  sei wie oben ein Diffeomorphismus zwischen zweidimensionalen Flächen im  $\mathbb{R}^3$ . Der positiv definite Endomorphismus  $E_x$  auf dem Tangentialraum von  $\Gamma_1$ ,  $E_x : \mathcal{T}_x \Gamma_1 \rightarrow \mathcal{T}_x \Gamma_1$ , sei definiert als

$$E_x = \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x)^T \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x).$$

$\varphi$  ist genau dann konform, wenn  $E_x$  diagonal ist, d.h. wenn es eine positive Funktion  $\lambda : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  gibt, so dass

$$E_x v = \lambda(x) v \quad \text{für } v \in \mathcal{T}_x \Gamma_1.$$

#### Beweis

$E_x$  ist eine Endomorphismus, denn sei  $n_x$  die Normale von  $\Gamma_1$  in  $x$  und  $v \in \mathcal{T}_x \Gamma_1$  sei ein Tangentialvektor. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_x v \cdot n_x &= \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x)^T \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x) v \cdot n_x = \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x) v \cdot \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x) n_x \\ &= \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x) v \cdot \begin{pmatrix} \underline{\nabla}_{\Gamma} \varphi^1 \cdot n_x \\ \underline{\nabla}_{\Gamma} \varphi^2 \cdot n_x \\ \underline{\nabla}_{\Gamma} \varphi^3 \cdot n_x \end{pmatrix} = \underline{\nabla}_{\Gamma_1} \varphi(x) v \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

weil  $\nabla_{\Gamma} \varphi^i \in \mathcal{T}_x \Gamma_1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ist. Damit ist  $E_x v \in \mathcal{T}_x \Gamma_1$ .

Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Kurven auf  $\Gamma_1$ , welche sich in  $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $\alpha = \pi$ , d.h.  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneiden sich orthogonal. Da sich nach Voraussetzung die Bildkurven auch orthogonal schneiden, gilt:

$$E_x \dot{\gamma}_1(0) \cdot \dot{\gamma}_2(0) = \nabla_{\Gamma_1} \varphi(x) \dot{\gamma}_1(0) \cdot \nabla_{\Gamma_1} \varphi(x) \dot{\gamma}_2(0) = \varphi \circ \dot{\gamma}_1(0) \cdot \varphi \circ \dot{\gamma}_2(0) = 0.$$

Nach Umparametrisierung auf Bogenlänge gilt mit  $e_1 = \dot{\gamma}_1(0)$  und  $e_2 = \dot{\gamma}_2(0)$ , dass  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ , wobei  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol bezeichnet:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= (e_1 + e_2) \cdot E_x(e_1 - e_2) = e_1 \cdot E_x e_1 - e_2 \cdot E_x e_2 \\ \Leftrightarrow e_1 \cdot E_x e_1 &= e_2 \cdot E_x e_2 \end{aligned}$$

Da  $\{e_1, e_2\}$  eine orthonormale Basis von  $\mathcal{T}_x \Gamma_1$  ist, folgt der erste Teil der Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen, die Bildkurven von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  schneiden sich unter dem Winkel  $\beta$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{\varphi \circ \dot{\gamma}_1(0) \cdot \varphi \circ \dot{\gamma}_2(0)}{\left| \varphi \circ \dot{\gamma}_1(0) \right| \left| \varphi \circ \dot{\gamma}_2(0) \right|} = \frac{E_x \dot{\gamma}_1(0) \cdot \dot{\gamma}_2(0)}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda} |\dot{\gamma}_1(0)| |\dot{\gamma}_2(0)|} \\ &= \frac{\lambda \dot{\gamma}_1(0) \cdot \dot{\gamma}_2(0)}{\lambda |\dot{\gamma}_1(0)| |\dot{\gamma}_2(0)|} = \cos(\alpha). \end{aligned}$$

□

Aus diesem Lemma folgt sofort

**Lemma 2.6**  $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei eine Immersion eines zweidimensionalen Parametergebietes  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  und die erste Fundamentalform sei gegeben als

$$g = (g_{ij})_{i,j} = (\partial_i u \cdot \partial_j u)_{i,j} = \nabla u^T \nabla u = \underline{\nabla} u^T \underline{\nabla} u.$$

Die Abbildung  $u$  ist genau dann konform, wenn

$$g_{ij} = \lambda(\mathbf{x}) \delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

für eine positive Funktion  $\lambda$  auf  $\omega$ .

**Definition 2.7 (Harmonische Abbildung.)**

$\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  seien zweidimensionale kompakte orientierbare Flächen.

Eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  liegt in  $H^1(\Gamma_1, \mathbb{R}^3)$ , wenn  $\varphi \in H^1(U)$  für eine offene Menge  $U$

in  $\mathbb{R}^3$  mit  $\Gamma_1 \subset U$ . Dabei bezeichnet  $H^1(U)$  den Sobolev-Raum von  $L_2$ -Funktionen mit quadratintegrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung 1.

Die Abbildung  $\varphi \in H^1(\Gamma_1, \Gamma_2) := \{\varphi \in H^1(\Gamma_1, \mathbb{R}^3) \mid \varphi(\Gamma_1) \subset \Gamma_2 \text{ f.ü.}\}$  heißt (schwache) harmonische Abbildung, wenn sie ein stationärer Punkt des Dirichlet-Integral

$$D[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma_1} \varphi|^2 \, da$$

ist. Dabei ist  $\varphi$  ein stationärer Punkt des Dirichlet-Integrals, wenn

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} D[\varphi \circ \sigma_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

für jede Familie  $(\sigma_\varepsilon)$  mit  $\sigma_\varepsilon \in H^1(\Gamma_1, \Gamma_2)$  und  $\sigma_0 = \text{Id}$ .

Es ist

$$|\nabla_{\Gamma_1} \varphi|^2 := \nabla_{\Gamma_1} \varphi : \nabla_{\Gamma_1} \varphi = \text{tr} (\nabla_{\Gamma_1} \varphi^T \nabla_{\Gamma_1} \varphi).$$

Denn seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  und  $B = (B_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ . Dann ist

$$A : B := \sum_{k,i} A_{ki} B_{ki} = \text{tr} \left( \left( \sum_k A_{ki} B_{kj} \right)_{i,j=1,\dots,n} \right) = \text{tr} (A^T B).$$

Der folgende Satz ist ein spezieller Fall eines von Eells und Wood [11] bewiesenen Theorems und zeigt den Zusammenhang zwischen harmonischen und konformen Abbildungen. Den Beweis findet man auch in [16].

**Satz 2.8** Sei  $\mathbf{x} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  ein harmonischer Diffeomorphismus zwischen zwei topologischen Sphären  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ . Dann ist  $\mathbf{x}$  eine konforme Abbildung.

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  eine zweidimensionale topologische Sphäre und  $\mathcal{S}^2$  die zweidimensionale Sphäre. Anstelle die Parametrisierung  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  direkt zu optimieren, betrachte ich konforme Diffeomorphismen  $\Phi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  der Sphäre (vgl. Abb. 1.1). Man erhält eine neue Parametrisierung

$$\mathbf{x}[\Phi] := \Phi \circ \mathbf{x}.$$

Es ist klar, dass jede glatte konforme Parametrisierung  $\tilde{\mathbf{x}}$  von  $\mathcal{M}$  geschrieben werden kann als  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}[\Phi]$  mit  $\Phi = \tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1}$ . Nach Satz 2.8 sind harmonische Diffeomorphismen  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  konform. Wie man numerisch eine harmonische Startparametrisierung  $\mathbf{x}$  berechnet, beschreibe ich in Kapitel 4.3.

Gesucht ist nun ein konformer Diffeomorphismus  $\Phi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$ , so dass  $\mathbf{x}[\Phi] = \Phi \circ \mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  optimal bezüglich Flächen- und Längenerhaltung ist. Optimale Diffeomorphismen  $\Phi$  werde ich als Minimierer einer geeigneten Energie  $E$  in Kapitel 3 definieren.

## 2.2 Konforme Automorphismen der Sphäre

Mit  $\text{conf}(\mathcal{S}^2)$  bezeichne ich die Menge der konformen Automorphismen von

$$\mathcal{S}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Es ist nützlich die Sphäre mit der Riemannschen Sphäre  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  zu identifizieren:

### Definition 2.9 (Stereographische Projektion.)

Die biholomorphe und konforme Abbildung  $\Pi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , welche gegeben ist durch

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{1-x_3}(x_1 + i x_2) & : (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}^2 - \{N\} \\ \infty & : (x_1, x_2, x_3) = N \end{cases},$$

wird stereographische Projektion vom Nordpol  $N=(0,0,1)$  genannt.

$\Pi$  projiziert die zweidimensionale Einheitssphäre vom Nordpol  $N$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$ , indem jedem  $x \in \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$  der Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden von  $N$  und  $x$  mit  $\mathbb{C}$  zugeordnet wird (Abb. 2.1).

Die Umkehrabbildung  $\Pi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{S}^2$  ist gegeben durch

$$\Pi^{-1}(u + i v) = \begin{cases} \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1) & : u + i v \in \mathbb{C} \\ N & : \text{sonst} \end{cases}.$$

**Satz 2.10**  $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei eine konforme  $C^1$ -Immersion eines zweidimensionalen Parametergebietes  $\omega \subset \mathbb{R}^2$ .  $\varphi : \tilde{\omega} \rightarrow \omega$  eine  $C^1$ -Reparametrisierung, d.h. ein  $C^1$ -Diffeomorphismus (Bijektion und  $\det \nabla \varphi \neq 0$ ).

Dann ist  $\tilde{u} = u \circ \varphi : \tilde{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  genau dann konform, wenn  $\varphi$  (anti-)holomorph ist.

**Beweis** Nach Voraussetzung ist  $\tilde{u}$  auch eine  $C^1$ -Immersion.

Sei  $g$ , bzw.  $\tilde{g}$ , die erste Fundamentalf orm von  $u$ , bzw.  $\tilde{u}$ .

„ $\Rightarrow$ “ Seien  $\tilde{u}$  und  $u$  konforme Abbildungen. Mit Lemma 2.6 folgt:

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & \tilde{g} &= \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} &= \tilde{g} &= \nabla \tilde{u}^T \nabla \tilde{u} &= \nabla (u \circ \varphi)^T \nabla (u \circ \varphi) \\ &= \nabla \varphi^T \underbrace{(\nabla u^T \circ \varphi \nabla u \circ \varphi)}_{g \circ \varphi} \nabla \varphi \\ &= \lambda \circ \varphi \nabla \varphi^T \nabla \varphi \\ \Rightarrow \nabla \varphi^T \nabla \varphi &= \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda \circ \varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (\det(\nabla \varphi))^2 &= \det(\nabla \varphi^T \nabla \varphi) = \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda \circ \varphi} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\det(\nabla\varphi)| = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda \circ \varphi} \quad \text{und} \quad \text{tr}(\nabla\varphi^T \nabla\varphi) = 2 \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda \circ \varphi}$$

$$\Rightarrow 2|\det(\nabla\varphi)| = \text{tr}(\nabla\varphi^T \nabla\varphi) = |\nabla\varphi|^2 \quad (\text{Frobeniusnorm})$$

$$(\varphi \text{ Diffeom., } \omega \text{ zusgh.}) \Rightarrow \det(\nabla\varphi) > 0 \text{ oder } \det(\nabla\varphi) < 0.$$

Wenn  $\det(\nabla\varphi) > 0$ , dann gilt mit  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ :

$$\begin{aligned} 2|\det(\nabla\varphi)| &= |\nabla\varphi|^2 \\ \Leftrightarrow 2(\partial_1\varphi^1 \partial_2\varphi^2 - \partial_1\varphi^2 \partial_2\varphi^1) &= (\partial_1\varphi^1)^2 + (\partial_1\varphi^2)^2 + (\partial_2\varphi^1)^2 + (\partial_2\varphi^2)^2 \\ \Leftrightarrow (\partial_1\varphi^1 - \partial_2\varphi^2)^2 + (\partial_1\varphi^2 - \partial_2\varphi^1)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \partial_1\varphi^1 = \partial_2\varphi^2 \quad \text{und} \quad \partial_1\varphi^2 = \partial_2\varphi^1 \end{aligned}$$

Somit ist  $\varphi$  holomorph. Falls  $\det(\nabla\varphi) < 0$  folgt analog, dass  $\varphi$  antiholomorph ist.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\varphi$  (anti-)holomorph. Dann folgt

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \nabla\varphi^T \underbrace{(\nabla u^T \circ \varphi \nabla u \circ \varphi)}_{g \circ \varphi} \nabla\varphi = \nabla\varphi^T \begin{pmatrix} \lambda \circ \varphi & 0 \\ 0 & \lambda \circ \varphi \end{pmatrix} \nabla\varphi \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \circ \varphi & 0 \\ 0 & \lambda \circ \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial_1\varphi^1)^2 + (\partial_1\varphi^2)^2 & \partial_1\varphi^1 \partial_2\varphi^1 + \partial_1\varphi^2 \partial_2\varphi^2 \\ \partial_2\varphi^1 \partial_1\varphi^1 + \partial_2\varphi^2 \partial_1\varphi^2 & (\partial_2\varphi^1)^2 + (\partial_2\varphi^2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \circ \varphi & 0 \\ 0 & \lambda \circ \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial_1\varphi^1)^2 + (\partial_1\varphi^2)^2 & 0 \\ 0 & (\partial_2\varphi^1)^2 + (\partial_2\varphi^2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist  $\tilde{g}$  diagonal und  $\tilde{u}$  konform. □

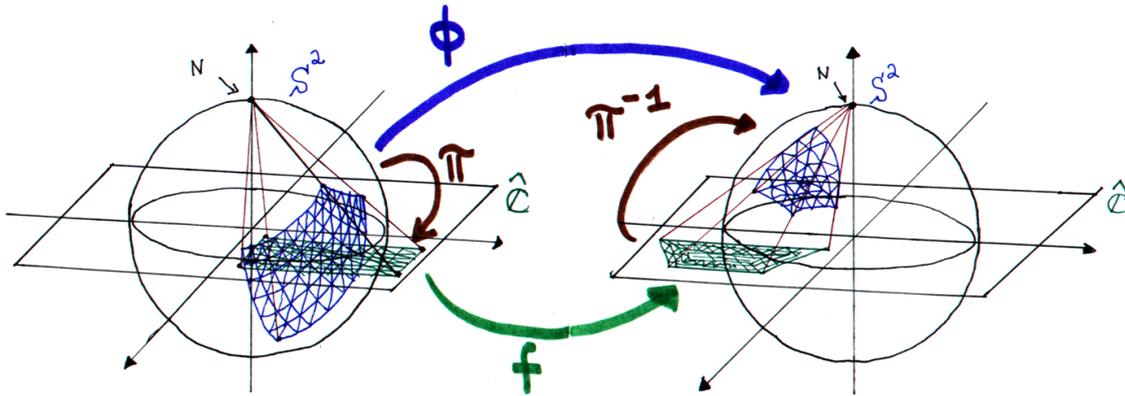
Um  $\text{conf}(\mathcal{S}^2)$  zu charakterisieren, muss man alle (anti-)holomorphen Diffeomorphismen von  $\widehat{\mathbb{C}}$  kennen.

**Definition 2.11 (Holomorph in  $\infty$ .)**

Sei  $\omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$  offen und  $h: \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  sei die Inversion

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{falls } z \neq 0 \text{ und } z \neq \infty, \\ 0 & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

Eine Funktion  $f: \omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist holomorph in  $\infty$ , falls  $f$  holomorph auf  $\omega \setminus \{\infty\}$  und  $f(\frac{1}{z})$  holomorph auf  $h(\omega \setminus \{0\})$ .



**Abbildung 2.1:** Darstellung der konformen Diffeomorphismen der Sphäre mittels stereographischer Projektion,  $\Phi = \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$ .

**Definition 2.12 (Möbiustransformation.)**

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$ . Die bijektive und konforme Abbildung  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , welche definiert ist durch

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad (2.2)$$

heißt gebrochen lineare Funktion, kurz LFT (=linear fractional transformation).

Möbiustransformationen sind holomorph in  $\infty$ , wenn  $c \neq 0$  ist.

Nach [1] (Satz 13 auf Seite 324) gilt

**Satz 2.13** Die einzigen konformen Automorphismen von  $\widehat{\mathbb{C}} \cong \mathcal{S}^2$  sind genau die gebrochenen linearen Transformationen (2.2).

Mit Satz 2.13 erhält man (Abb. 2.1)

$$\text{conf}(\mathcal{S}^2) = \left\{ \Phi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2 \mid \begin{array}{l} \Phi = \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi \quad \text{mit} \\ \Pi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{stereographische Projektion vom Nordpol,} \\ f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{eine Möbiustransformation (2.2) und} \\ \Pi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{S}^2 \quad \text{die Inverse von } \Pi. \end{array} \right\}$$

## Eigenschaften der konformen Automorphismen der Sphäre

Weil für  $c \neq 0$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\mu}{cz + d}, \quad \mu := \frac{bc - ad}{c} \quad (2.3)$$

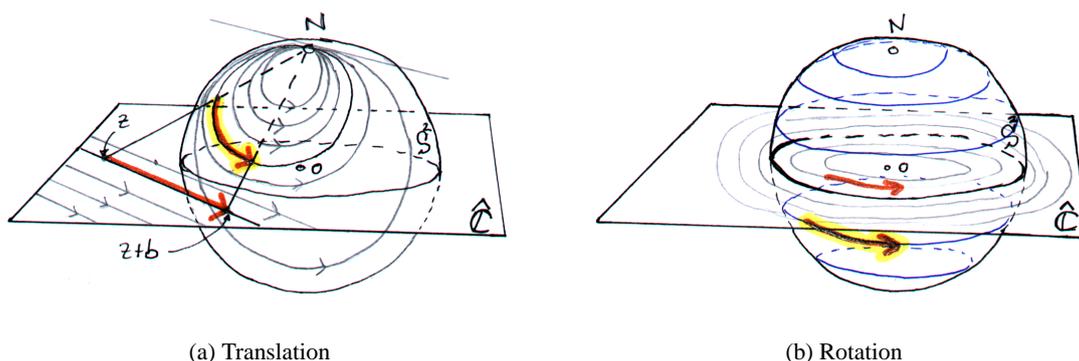
ist, erhält man jede LFT als Komposition folgender elementarer LFTs:

↘ **Translation:**  $f(z) = z + b$ ,  $b \in \mathbb{C}$ .

Das stereographische Bild einer Geraden in  $\widehat{\mathbb{C}}$  ist ein Kreis auf  $\mathcal{S}^2$ , der durch den Nordpol verläuft und dessen Tangente in N parallel zur Geraden in  $\widehat{\mathbb{C}}$  ist. Eine Translation verschiebt die Punkte in  $\widehat{\mathbb{C}}$  entlang der Geraden mit Richtungsvektor  $b$ , was somit auf  $\mathcal{S}^2$  einer Verschiebung entlang eines Kreises entspricht (Abb. 2.2(a)). Die Translation ist ein Beispiel einer parabolischen Möbiustransformation (nur Fixpunkt  $\infty$ ).

○ **Rotation:**  $f(z) = \exp(i\alpha)z$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Mit  $0 < \alpha < 2\pi$  zeigt Abbildung 2.2(b), dass die Drehung in  $\widehat{\mathbb{C}}$  um den Nullpunkt einer Rotation von  $\mathcal{S}^2$  um die vertikale Achse durch ihr Zentrum induziert. Die Längengrade permutieren unter sich selbst. Diese Möbiustransformationen heißen elliptisch.

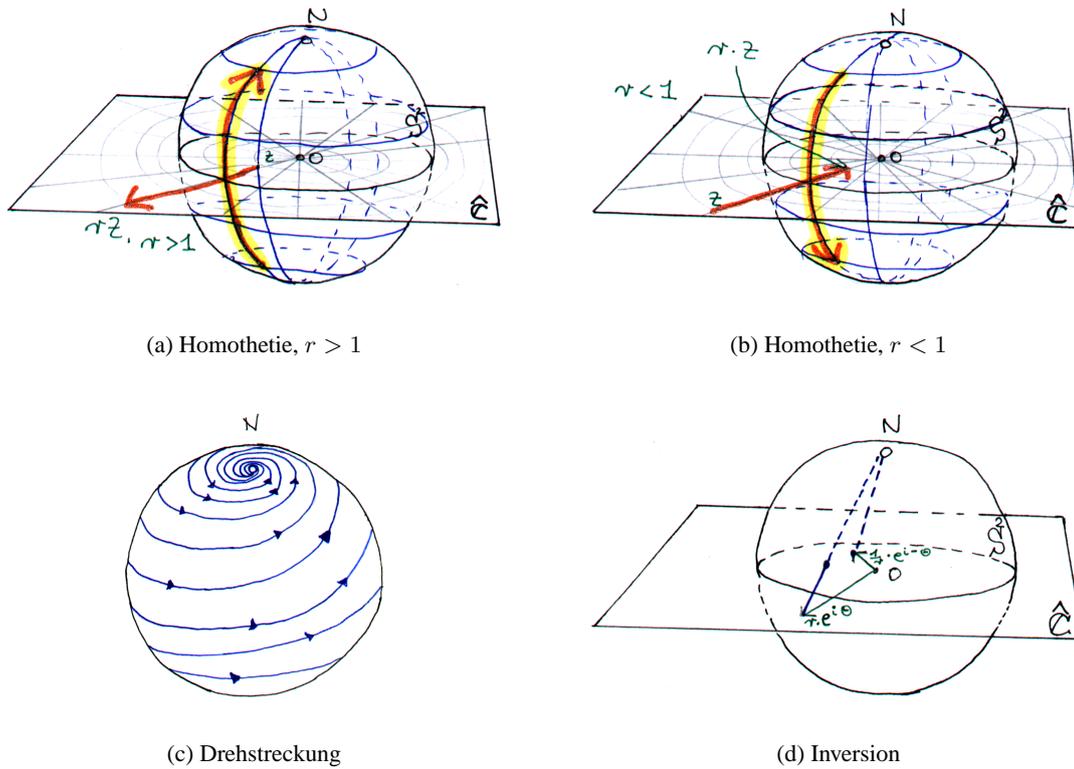


**Abbildung 2.2:** Visualisierung der elementaren LFTs Translation und Rotation.

↓ **Homothetie:**  $f(z) = rz$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ .

In Abbildung 2.3(b) sieht man, dass die Kontraktion von  $\widehat{\mathbb{C}}$  ( $r < 1$ ) in  $\mathcal{S}^2$  einer Verschiebung entlang der Längengrade zum Südpol entspricht. Ist ( $r > 1$ ), so bewegen sich die Punkte auf  $\mathcal{S}^2$  nordwärts und nicht südwärts (Abb. 2.3(a)). Die Breitenkreise werden somit auf Breitenkreise kleineren Umfangs entweder in Richtung Nordpol oder Südpol abgebildet. Homothetien sind hyperbolische Möbiustransformationen.

Als Verkettung von Rotation und Homothetie erhält man die Drehstreckung. Die Wirkung dieser so genannten loxodromischen Möbiustransformation ist in Abbildung 2.3(c) dargestellt.

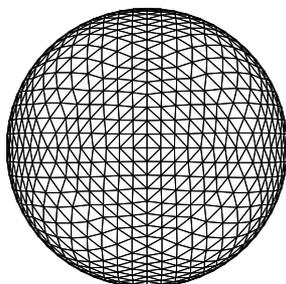
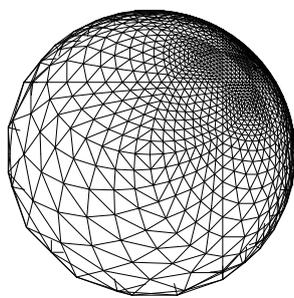
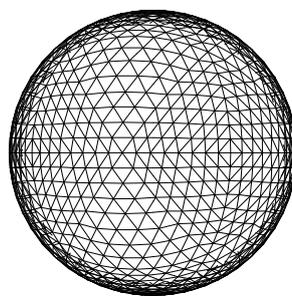
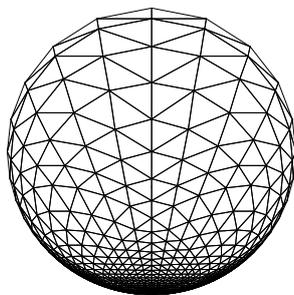
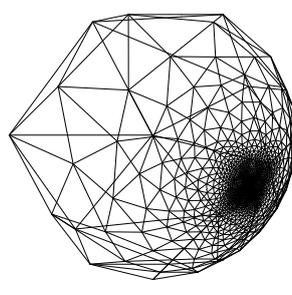


**Abbildung 2.3:** Visualisierung der elementaren LFTs Homothetie, Drehstreckung und Inversion.

↪ **Inversion:**  $f(z) = \frac{1}{z}$

$z = r \exp(i\theta)$  wird unter der komplexen Inversion abgebildet auf  $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \exp(-i\theta)$ . Das Innere des Einheitskreises wird auf das Äußere abgebildet und die Abbildung entspricht einer Spiegelung am Einheitskreis mit anschließender Spiegelung an der reellen Achse. Auf der Sphäre entspricht die Abbildung  $z = r \exp(i\theta) \mapsto \frac{1}{r} \exp(-i\theta) = \frac{1}{z}$  der Spiegelung von  $S^2$  an der Äquatorebene  $\hat{\mathbb{C}}$ . Die Spiegelung an der reellen Achse, die komplexe Konjugation  $\frac{1}{z} \mapsto \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ , induziert auf  $S^2$  eine Spiegelung an der vertikalen Ebene, die durch die reelle Achse geht. Die Komposition beider Abbildungen, also die Inversion, induziert eine Drehung von  $S^2$  um die reelle Achse mit dem Winkel  $\pi$ .

Sei  $\mathcal{S}_h^2$  eine Sphärentriangulierung mit Gitterknoten auf  $S^2$ . Für die Diskretisierung bzw. Triangulierung einer Fläche verweise ich auf Kapitel 4.1. Ein konformer Diffeomorphismus  $\Phi : S^2 \rightarrow S^2$  wirkt nun auf  $\mathcal{S}_h^2$ , indem  $\Phi$  auf die Gitterknoten angewendet wird. Konforme Diffeomorphismen können nach obigen Betrachtungen die Gitterknoten an einem Punkt konzentrieren, bzw. den Abstand der Gitterknoten am gegenüberliegenden Punkt vergrößern. Wie die konformen Automorphismen auf ein regelmäßiges Gitter wirken, ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

(a)  $\mathcal{S}_h^2 =$  Ausgangstriangulierung(b) Translation:  $\Phi = \Pi^{-1} \circ (z + (1 - i)) \circ \Pi$ (c) Rotation:  $\Phi = \Pi^{-1} \circ (\exp(i) z) \circ \Pi$ (d) Homothetie:  $\Phi = \Pi^{-1} \circ (0.25 z) \circ \Pi$ (e)  $\Phi = \Pi^{-1} \circ \left( \frac{1}{0.25 z + (1 - i)} \right) \circ \Pi$ 

**Abbildung 2.4:**  $\mathcal{S}_h^2$  ist eine regelmäßige Sphärentriangulierung mit Gitterknoten auf  $\mathcal{S}^2$ . Ein konformer Diffeomorphismus  $\Phi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  wirkt nun auf  $\mathcal{S}_h^2$ , indem  $\Phi$  auf die Gitterknoten angewendet wird. Das Ergebnis verschiedener konformer Diffeomorphismen ist in den Abbildungen (b)-(e) dargestellt.

### 2.3 Darstellung der konformen Automorphismen der Sphäre

**Satz 2.14** Sei  $\Phi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  ein konformer Diffeomorphismus der Sphäre. Dann ist  $\Phi$  die Einschränkung auf  $\mathcal{S}^2$  von

$$P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{A x + B}{C \cdot x + D}.$$

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $B, C \in \mathbb{R}^3$  und  $D \in \mathbb{R}$ .

Ist  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a = a_1 + i a_2$ ,  $b = b_1 + i b_2$ ,  $c = c_1 + i c_2$ ,  $d = d_1 + i d_2$ , eine Möbiustransformation mit

$$\Phi = \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi,$$

dann haben  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= a_1 d_1 + a_2 d_2 + b_1 c_1 + b_2 c_2 &= \operatorname{Im}(a d) + \operatorname{Im}(b c) \\ A_{1,2} &= a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_2 c_1 - b_1 c_2 &= \operatorname{Im}(\bar{a} d) + \operatorname{Im}(b \bar{c}) \\ A_{1,3} &= a_1 c_1 + a_2 c_2 - b_1 d_1 - b_2 d_2 &= \operatorname{Re}(a \bar{c}) - \operatorname{Re}(b \bar{d}) \\ A_{2,1} &= a_2 d_1 - a_1 d_2 + b_2 c_1 - b_1 c_2 &= \operatorname{Im}(a \bar{d}) + \operatorname{Im}(b \bar{c}) \\ A_{2,2} &= a_1 d_1 + a_2 d_2 - b_2 c_2 - b_1 c_1 &= \operatorname{Re}(a \bar{d}) + \operatorname{Re}(b c) \\ A_{2,3} &= a_2 c_1 - a_1 c_2 - b_2 d_1 + b_1 d_2 &= \operatorname{Im}(a \bar{c}) + \operatorname{Im}(\bar{b} d) \\ A_{3,1} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 - c_1 d_1 - c_2 d_2 &= \operatorname{Re}(\bar{a} b) - \operatorname{Re}(\bar{c} d) \\ A_{3,2} &= a_2 b_1 - a_1 b_2 - c_2 d_1 + c_1 d_2 &= \operatorname{Im}(a \bar{b}) + \operatorname{Im}(\bar{c} d) \\ A_{3,3} &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 - c_1^2 - c_2^2 + d_1^2 + d_2^2) &= \frac{1}{2} (a \bar{a} - b \bar{b} - c \bar{c} + d \bar{d}) \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 + b_1 d_1 + b_2 d_2 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 + b_2 d_1 - b_1 d_2 \\ \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - c_1^2 - c_2^2 - d_1^2 - d_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\bar{a} c) + \operatorname{Re}(\bar{b} d) \\ \operatorname{Im}(a \bar{c}) + \operatorname{Im}(b \bar{d}) \\ \frac{1}{2} (a \bar{a} + b \bar{b} - c \bar{c} - d \bar{d}) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + c_1 d_1 + c_2 d_2 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1 \\ \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - d_1^2 - d_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\bar{a} b) + \operatorname{Re}(\bar{c} d) \\ \operatorname{Im}(\bar{a} b) + \operatorname{Im}(\bar{c} d) \\ \frac{1}{2} (a \bar{a} - b \bar{b} + c \bar{c} - d \bar{d}) \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 + d_1^2 + d_2^2) = \frac{1}{2} (a \bar{a} + b \bar{b} + c \bar{c} + d \bar{d})$$

**Beweis** Sei  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}^2$ . Somit gilt

$$\begin{aligned}
f \circ \Pi(x_1, x_2, x_3) &= \frac{(a_1 + i a_2) \frac{1}{1-x_3} (x_1 + i x_2) + (b_1 + i b_2)}{(c_1 + i c_2) \frac{1}{1-x_3} (x_1 + i x_2) + (d_1 + i d_2)} \\
&= \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2 + b_1(1-x_3) + i(a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_2(1-x_3))}{c_1 x_1 - c_2 x_2 + d_1(1-x_3) + i(c_2 x_1 + c_1 x_2 + d_2(1-x_3))} \\
&= \frac{\underbrace{a_1 x_1 - a_2 x_2 + b_1 - b_1 x_3}_{=: \hat{a}} + i \underbrace{(a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_2 - b_2 x_3)}_{=: \hat{b}}}{\underbrace{c_1 x_1 - c_2 x_2 + d_1 - d_1 x_3}_{=: \hat{c}} + i \underbrace{(c_2 x_1 + c_1 x_2 + d_2 - d_2 x_3)}_{=: \hat{d}}} \\
&= \frac{\hat{a} + i \hat{b}}{\hat{c} + i \hat{d}} \frac{\hat{c} - i \hat{d}}{\hat{c} - i \hat{d}} \\
&= \frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} + i \frac{\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Phi(x) = \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi(x) &= \Pi^{-1} \left( \frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} + i \frac{\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \right) \\
&= \frac{1}{\left( \frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \right)^2 + \left( \frac{\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \right)^2 + 1} \begin{pmatrix} 2 \frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \\ 2 \frac{\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \\ \left( \frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \right)^2 + \left( \frac{\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \right)^2 - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2}{(\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d})^2 + (\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d})^2 + (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \\ 2 \frac{\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \\ \frac{(\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d})^2 + (\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d})^2 - (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2}{(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2(\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d})(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)}{\hat{a}^2 \hat{c}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{b}^2 \hat{d}^2 + \hat{b}^2 \hat{c}^2 - 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{a}^2 \hat{d}^2 + (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \\ \frac{2(\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d})(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)}{\hat{a}^2 \hat{c}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{b}^2 \hat{d}^2 + \hat{b}^2 \hat{c}^2 - 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{a}^2 \hat{d}^2 + (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \\ \frac{\hat{a}^2 \hat{c}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{b}^2 \hat{d}^2 + \hat{b}^2 \hat{c}^2 - 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{a}^2 \hat{d}^2 - (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2}{\hat{a}^2 \hat{c}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{b}^2 \hat{d}^2 + \hat{b}^2 \hat{c}^2 - 2\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{a}^2 \hat{d}^2 + (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{2(\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d})(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)}{\hat{a}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) + \hat{b}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) + (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \\ \frac{2(\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d})(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)}{\hat{a}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) + \hat{b}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) + (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \\ \frac{\hat{a}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) + \hat{b}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) - (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2}{\hat{a}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) + \hat{b}^2(\hat{c}^2 + \hat{d}^2) + (\hat{c}^2 + \hat{d}^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2(\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d})(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)}{(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)(\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 + \hat{d}^2)} \\ \frac{2(\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d})(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)}{(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)(\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 + \hat{d}^2)} \\ \frac{(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)(\hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 - \hat{d}^2)}{(\hat{c}^2 + \hat{d}^2)(\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 + \hat{d}^2)} \end{pmatrix} \\
&= (\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 + \hat{d}^2) \begin{pmatrix} 2(\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}) \\ 2(\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}) \\ \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 - \hat{d}^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 + \hat{d}^2 &= (a_1 x_1 - a_2 x_2 + b_1 - b_1 x_3)^2 + (a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_2 - b_2 x_3)^2 \\
&\quad + (c_1 x_1 - c_2 x_2 + d_1 - d_1 x_3)^2 + (c_2 x_1 + c_1 x_2 + d_2 - d_2 x_3)^2 \\
&= a_1^2 x_1^2 - 2a_1 a_2 x_1 x_2 + 2a_1 b_1 x_1 - 2a_1 b_1 x_1 x_3 + a_2^2 x_2^2 \\
&\quad + 2a_2 b_1 x_2 x_3 - 2a_2 b_1 x_2 + b_1^2 - 2b_1^2 x_3 + b_1^2 x_3^2 \\
&\quad + a_2^2 x_1^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 + 2a_2 b_2 x_1 - 2a_2 b_2 x_1 x_3 + a_1^2 x_2^2 \\
&\quad + 2a_1 b_2 x_2 - 2a_1 b_2 x_2 x_3 + b_2^2 - 2b_2^2 x_3 + b_2^2 x_3^2 \\
&\quad + c_1^2 x_1^2 - 2c_1 c_2 x_1 x_2 + 2c_1 d_1 x_1 - 2c_1 d_1 x_1 x_3 + c_2^2 x_2^2 \\
&\quad - 2c_2 d_1 x_2 + 2c_2 d_1 x_2 x_3 + d_1^2 - 2d_1^2 x_3 + d_1^2 x_3^2 \\
&\quad + c_2^2 x_1^2 + 2c_1 c_2 x_1 x_2 + 2c_2 d_2 x_1 - 2c_2 d_2 x_1 x_3 + c_1^2 x_2^2 \\
&\quad + 2c_1 d_2 x_2 - 2c_1 d_2 x_2 x_3 + d_2^2 - 2d_2^2 x_3 + d_2^2 x_3^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 + c_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \\
&\quad + (b_1^2 + b_2^2 + d_1^2 + d_2^2)(x_3^2 - 2x_3 + 1) \\
&\quad + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + c_1 d_1 + c_2 d_2)(2x_1 - 2x_1 x_3) \\
&\quad + (a_2 b_1 - a_1 b_2 + c_2 d_1 - c_1 d_2)(-2x_2 + 2x_2 x_3) \\
&= (1 - x_3) \{ (a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 + c_2^2)(1 + x_3) \\
&\quad + (b_1^2 + b_2^2 + d_1^2 + d_2^2)(1 - x_3) \\
&\quad + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + c_1 d_1 + c_2 d_2) x_1 \\
&\quad - 2(a_2 b_1 - a_1 b_2 + c_2 d_1 - c_1 d_2) x_2 \}
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Analoge Rechnungen liefern:

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d} &= (1 - x_3) \{ (a_1 c_1 + a_2 c_2)(1 + x_3) + (b_1 d_1 + b_2 d_2)(1 - x_3) \\ &\quad + (a_1 d_1 + b_1 c_1 + a_2 d_2 + b_2 c_2) x_1 \\ &\quad + (a_2 d_1 + b_1 c_2 - a_1 d_2 - b_2 c_1) x_2 \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d} &= (1 - x_3) \{ (a_2 c_1 - a_1 c_2)(1 + x_3) + (b_2 d_1 - b_1 d_2)(1 - x_3) \\ &\quad + (a_2 d_1 + b_2 c_1 - a_1 d_2 - b_1 c_2) x_1 \\ &\quad + (a_1 d_1 - b_2 c_2 - a_2 d_2 - b_1 c_1) x_2 \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 - \hat{d}^2 &= (1 - x_3) \{ (a_1^2 + a_2^2 - c_1^2 - c_2^2)(1 + x_3) \\ &\quad + (b_1^2 + b_2^2 - d_1^2 - d_2^2)(1 - x_3) \\ &\quad + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 - c_1 d_1 - c_2 d_2) x_1 \\ &\quad - 2(a_2 b_1 - a_1 b_2 - c_2 d_1 + c_1 d_2) x_2 \}\end{aligned}$$

□

### 3 Energieformulierung

#### 3.1 Flächen- und Längenerhaltung

**Problem 3.1** Gegeben sei ein konformer Diffeomorphismus  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  von einer glatten topologischen Sphäre  $\mathcal{M}$  nach  $\mathcal{S}^2$ . Finde eine optimale Deformation  $\Phi_{opt} \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$ , so dass  $\mathbf{x}_{opt} = \Phi_{opt} \circ \mathbf{x}$  optimal bzgl. Flächen- und Längenerhaltung ist.

Wie definiert man nun Optimalität einer Parametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi] = \Phi \circ \mathbf{x}$  ?

Sei  $\mathcal{M}$  eine zweidimensionale topologische Sphäre mit Karte  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  und Parametrisierung

$$\mathbf{u} : \omega \rightarrow \mathcal{M}.$$

$\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u} : \omega \rightarrow \mathcal{S}^2$  ist dann eine Parametrisierung der Sphäre. Für die geometrischen Grundlagen verweise ich auf [9, 8].

Sei  $\xi \in \omega$  und  $p := \mathbf{u}(\xi) \in \mathcal{M}$ .  $\left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i}(\xi) \right\}_{i=1,2}$  ist Basis des Tangentialraumes von  $\mathcal{M}$  in  $p$

$$\mathcal{T}_p \mathcal{M} = \text{span} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1}(\xi), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2}(\xi) \right\}.$$

Andererseits ist der  $\mathbb{R}^2$  Tangentialraum mit der Identifikation

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) e_i \cong \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i}.$$

Ich bezeichne ihn mit  $\mathcal{T}_\xi \mathcal{M}$ .

Zur Längenmessung auf  $\mathcal{M}$  benötigt man die Definition einer Metrik  $g$ . In Matrixnotation sei  $g = (g_{ij})_{i,j=1,2}$  mit

$$g_{ij} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j},$$

wobei „ $\cdot$ “ das kanonische Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Die symmetrische und positiv definite Metrik  $g$  induziert auf  $\mathcal{T}_\xi \mathcal{M}$  ein Skalarprodukt  $g(\cdot, \cdot) : \mathcal{T}_\xi \mathcal{M} \times \mathcal{T}_\xi \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$g(v, w) = gv \cdot w,$$

wobei hier „ $\cdot$ “ das kanonische Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^2$  ist.  $g(\cdot, \cdot)$  ist der Pull-Back des Skalarproduktes der Tangentialvektoren  $D \mathbf{u} v$  und  $D \mathbf{u} w$  auf  $\mathcal{T}_p \mathcal{M}$  für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  mit Ableitung der Parametrisierung  $D \mathbf{u} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \in \mathbb{R}^{3,2}$ .

Analog benötigt man zur Längenmessung auf  $\mathcal{S}^2$  eine Metrik  $g^\Phi$ :

$$g^\Phi := D(\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u})^T D(\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u}).$$

Sei  $\alpha : (a, b) \rightarrow \omega$  eine differenzierbare Kurve im Parametergebiet  $\omega$ . Dann kontrolliert  $g$  die Längenmessung der Flächenkurve  $\mathbf{u} \circ \alpha$  auf  $\mathcal{M}$  bzw.  $g^\Phi$  die Längenmessung der Flächenkurve

$(\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u}) \circ \alpha$  auf  $\mathcal{S}^2$ . Sei  $L$  das Längenfunktional, dann erhält man als Länge von  $\mathbf{u} \circ \alpha$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u} \circ \alpha) &= \int_{[a,b]} \|\partial_t(\mathbf{u} \circ \alpha)(t)\| \, dt \\ &= \int_{[a,b]} \sqrt{D\mathbf{u} \dot{\alpha} \cdot D\mathbf{u} \dot{\alpha}} \, dt \\ &= \int_{[a,b]} \sqrt{D\mathbf{u}^T D\mathbf{u} \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha}} \, dt \\ &= \int_{[a,b]} \sqrt{g \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha}} \, dt. \end{aligned}$$

Die Länge von  $(\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u}) \circ \alpha$  auf  $\mathcal{S}^2$  ist gegeben durch

$$L((\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u}) \circ \alpha) = \int_{[a,b]} \sqrt{g^\Phi \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha}} \, dt.$$

Also ist  $L(\mathbf{u} \circ \alpha) = L((\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u}) \circ \alpha)$  genau dann, wenn  $g = g^\Phi$ .  $\mathbf{x}[\Phi]$  ist längenerhaltend, wenn

$$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] = \mathbf{1}.$$

$\mathbf{1}$  bezeichnet die Identität auf  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ .

Der tangentielle Gradient ist die Projektion des Gradienten auf den Tangentialraum. Deshalb ist der Rang von  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] \in \mathbb{R}^{3,3}$  zwei.  $\det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])$  bezeichnet das Produkt dieser beiden positiven Eigenwerte.

Sei  $A \subset \omega$ . Der Flächeninhalt des Flächenstücks  $\mathbf{u}(A) \subset \mathcal{M}$  ist definiert als

$$\text{area}(\mathbf{u}(A)) := \int_A \sqrt{\det(g)} \, d\xi.$$

Analog erhält man als Flächeninhalt von  $(\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u})(A)$

$$\begin{aligned} \text{area}((\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u})(A)) &= \int_A \sqrt{\det(g^\Phi)} \, d\xi \\ &= \int_A \sqrt{\det(D(\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u})^T D(\mathbf{x}[\Phi] \circ \mathbf{u}))} \, d\xi \\ &= \int_A \sqrt{\det(D\mathbf{u}^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] D\mathbf{u})} \, d\xi \\ &= \int_A \sqrt{\det(D\mathbf{u}^T D\mathbf{u}) \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])} \, d\xi \\ &= \int_A \sqrt{\det(g) \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])} \, d\xi \end{aligned}$$

$\mathbf{x}[\Phi]$  ist flächenerhaltend, wenn

$$\det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) = 1.$$

Optimalität der Parametrisierung bedeutet also eine möglichst geringe Abweichung der Determinante  $\det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])$  von 1, bzw.  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  von der Identität.

**Bemerkung 3.2 (Identifikation.)**

Ich identifiziere  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  mit einer  $2 \times 2$  Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ , indem ich die zweidimensionalen Tangentialräume mit dem  $\mathbb{R}^2$  identifiziere:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_p \mathcal{M} & \xrightarrow{\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]} & \mathcal{T}_{\mathbf{x}[\Phi](p)} \mathcal{S}^2 \\ \text{Iso } \Psi \uparrow & & \downarrow \text{Iso } \Upsilon \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Die Isomorphismen  $\Psi$  und  $\Upsilon$  identifizieren die Orthonormalbasen  $\{e_1, e_2\}$  des  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{v_1, v_2\}$  von  $\mathcal{T}_p \mathcal{M}$  und  $\{w_1, w_2\}$  von  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}[\Phi](p)} \mathcal{S}^2$ :

$$\begin{array}{l} \Psi(e_1) = v_1, \\ \Psi(e_2) = v_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \Upsilon(w_1) = e_1, \\ \Upsilon(w_2) = e_2. \end{array}$$

Auch den Endomorphismus  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] : \mathcal{T}_p \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_p \mathcal{M}$  identifiziere ich mit einer  $2 \times 2$  Matrix  $\tilde{A}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_p \mathcal{M} & \xrightarrow{\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]} & \mathcal{T}_p \mathcal{M} \\ \text{Iso } \tilde{\Psi} \uparrow & & \downarrow \text{Iso } \tilde{\Upsilon} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{A}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Nach Lemma 2.5 ist  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] : \mathcal{T}_p \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_p \mathcal{M}$  und somit die mit ihm identifizierte Matrix  $\tilde{A}$  positiv definit und diagonal. Also erhält man

$$\det(\tilde{A}) = \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) > 0 \quad (3.1)$$

und  $\tilde{A}$  ist positiv definit und diagonal.

### 3.2 Tangentiale Ableitung der konformen Diffeomorphismen der Sphäre

Sei  $\Phi$  ein konformer Diffeomorphismus der Sphäre, der sich nach Satz 2.14 darstellen lässt als

$$\Phi(x) = \frac{A x + B}{C \cdot x + D},$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ ,  $B, C \in \mathbb{R}^3$  und  $D \in \mathbb{R}$ . Ich berechne den tangentialen Gradienten von  $\Phi$

$$\underline{\nabla}_{S^2} \Phi(x) = \underline{\nabla} \Phi(x) = \underline{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} \underline{\nabla} \Phi_1 \\ \underline{\nabla} \Phi_2 \\ \underline{\nabla} \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\nabla}_1 \Phi_1 & \underline{\nabla}_2 \Phi_1 & \underline{\nabla}_3 \Phi_1 \\ \underline{\nabla}_1 \Phi_2 & \underline{\nabla}_2 \Phi_2 & \underline{\nabla}_3 \Phi_2 \\ \underline{\nabla}_1 \Phi_3 & \underline{\nabla}_2 \Phi_3 & \underline{\nabla}_3 \Phi_3 \end{pmatrix}.$$

Die  $i$ -te Komponente ( $i = 1, 2, 3$ ) von  $\Phi$  ist gegeben als

$$\Phi_i = \frac{A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + A_{i3} x_3 + B_i}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + D} = \frac{\sum_{k=1}^3 A_{ik} x_k + B_i}{\sum_{k=1}^3 C_k x_k + D},$$

und damit erhält man für die Ableitung nach der  $j$ -ten Variabel ( $j = 1, 2, 3$ )

$$\Phi_{i,j} := \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_i(x) = \frac{A_{ij} \left( \sum_{k=1}^3 C_k x_k + D \right) - \left( \sum_{k=1}^3 A_{ik} x_k + B_i \right) C_j}{\left( \sum_{k=1}^3 C_k x_k + D \right)^2}.$$

Bezeichnet  $n = n(x) = x$  die äußere Normale an die Sphäre, so erhält man als tangentialen Gradienten von  $\Phi_i$

$$\underline{\nabla} \Phi_i = \underline{\nabla}_{S^2} \Phi_i = \nabla_{\mathbb{R}^3} \Phi_i - (\nabla_{\mathbb{R}^3} \Phi_i \cdot n) n$$

mit den Komponenten ( $i, j = 1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_j \Phi_i &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} x_k x_j = \Phi_{i,j} - \sum_{k=1}^3 \Phi_{i,k} x_k x_j \\ &= \frac{A_{ij} \left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right) - \left( \sum_{s=1}^3 A_{is} x_s + B_i \right) C_j}{\left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right)^2} \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{A_{ik} \left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right) - \left( \sum_{s=1}^3 A_{is} x_s + B_i \right) C_k}{\left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right)^2} x_k \right) x_j. \end{aligned}$$

### 3.3 Berechnung der Determinate des Verzerrungstensors

Um die Determinate  $\det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])$  zu berechnen, benötigt man folgendes Lemma:

**Lemma 3.3** Sei  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben als

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

dann ist das Produkt der beiden Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gegeben als

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}(M)^2 - \text{tr}(M^2)). \quad (3.2)$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\text{tr}(M)^2 - \text{tr}(M^2)) &= \frac{1}{2} ((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ &= \lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

□

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) &= \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}}(\Phi \circ \mathbf{x})^T \nabla_{\mathcal{M}}(\Phi \circ \mathbf{x})) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \frac{1}{2} \left[ \text{tr}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}) \right]^2 \\ &\quad - \text{tr}(\{ \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x} \}^2), \end{aligned}$$

wobei die Komponenten von  $\nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi$  nach §3.2 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi)_{ij} &= \sum_{r=1}^3 (\nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi)_{ri} (\nabla_{\mathcal{S}^2} \Phi)_{rj} = \sum_{r=1}^3 \nabla_i \Phi_r \nabla_j \Phi_r \\ &= \sum_{r=1}^3 \left\{ \frac{A_{ri} \left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right) - \left( \sum_{s=1}^3 A_{rs} x_s + B_r \right) C_i}{\left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{A_{rk} \left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right) - \left( \sum_{s=1}^3 A_{rs} x_s + B_r \right) C_k}{\left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right)^2} x_k \right) x_i \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{A_{rj} \left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right) - \left( \sum_{s=1}^3 A_{rs} x_s + B_r \right) C_j}{\left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{A_{rk} \left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right) - \left( \sum_{s=1}^3 A_{rs} x_s + B_r \right) C_k}{\left( \sum_{s=1}^3 C_s x_s + D \right)^2} x_k \right) x_j \right\}. \end{aligned}$$

### 3.4 Darstellung der elastischen Energie

Um lokale Verzerrungen einer Parametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi] = \Phi \circ \mathbf{x}$  zu messen, definiere ich den Verzerrungstensor als den tangentialen Gradient

$$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi].$$

Um diese Definition zu motivieren, betrachte ich Flächenstücke  $\Omega \subset \mathcal{M}$  und  $\mathbf{x}[\Phi](\Omega) = \tilde{\Omega} \subset \mathcal{S}^2$  und ersetze diese durch euklidische Flächenstücke. Verzerrungen, z.B. von Längen und Flächen, ausgelöst in einem elastischen Material durch eine Deformation  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , hängen nur ab vom Verzerrungstensor  $D\varphi$ . Einen Überblick über die Elastizitätstheorie findet man in [4]. Das Messen von Verzerrungen einer Abbildung ist also gekoppelt an die Höhe der elastischen Energie der zugeordneten Deformation. Ich ersetze nun den elastischen Körper  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  durch das zweidimensionale Flächenstück  $\Omega \subset \mathcal{M}$  und interpretiere die Parametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi]$  als elastische Flächendeformation. Ein fundamentales Ergebnis der Elastizitätstheorie ist, dass elastische Spannungen in einem isotropen und elastischen Körper nur von den Invarianten des Cauchy-Green Verzerrungstensors  $C := D\varphi^T D\varphi$  der Deformation  $\varphi$  abhängen ([4], Theorem 3.6-1. Rivlin-Ericksen representation theorem). Im Fall von Deformationen im  $\mathbb{R}^2$  sind dies Determinante  $\det(C)$  und Spur  $\text{tr}(C)$ . Ist eine elastische Deformation Minimierer eines elastischen Energiefunktionals, so hängt auch die Energiedichte nur von diesen Invarianten ab.

Aus den Axiomen der *Elastizität*, *Isotropie* und *Bezugssysteminvarianz* werde ich eine Energie  $E$ , abhängig von der Deformation  $\Phi$ , entwickeln und  $\mathbf{x}_{opt}$  als Minimierer dieser Energie definieren. Nun zu den schon angedeuteten axiomatischen Annahmen an die Energie  $E$ :

- **Elastizität.** Die Energie  $E$  ist elastisch, d.h. sie hängt nur vom Verzerrungstensor  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  ab. Desweiteren nehme ich an, dass eine Energiedichte  $W_{\mathcal{M}} : \mathcal{T}\mathcal{M}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass

$$E[\Phi] = \int_{\mathcal{M}} W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) \, da. \quad (3.3)$$

- **Isotropie.** Die Energie hängt nicht von Richtungen auf  $\mathcal{M}$  ab. Sei  $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  eine glatte Selbstabbildung von  $\mathcal{M}$ , welche in  $p \in \mathcal{M}$  lokal eine Rotation  $Q \in O(2)$  ist (vgl. Abb. 3.1), d.h.

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \theta(\tilde{p}) : \mathcal{T}_{\tilde{p}}\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{T}_{\theta(\tilde{p})}\mathcal{M} && \text{mit } \theta(p) = p, \\ \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \theta(p) : \mathcal{T}_p\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{T}_p\mathcal{M} && \text{sei Rotation } Q \in O(2). \end{aligned}$$

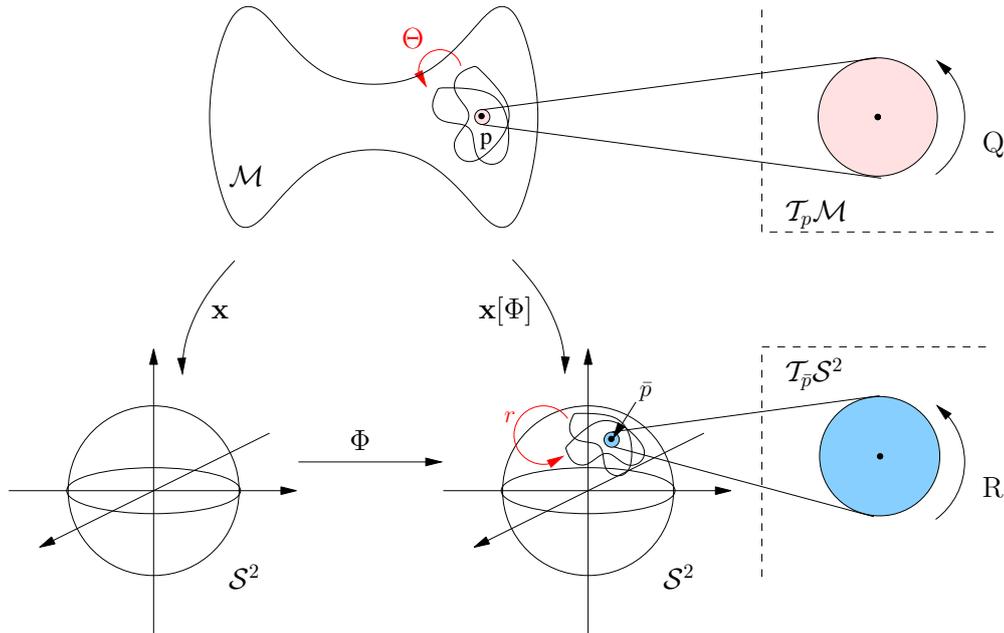
Die Energiedichte wird im Punkt  $p$  von dieser Transformation nicht beeinflusst. Es soll gelten:

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) &= W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}[\Phi] \circ \theta)) \\ \Leftrightarrow W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) &= W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \theta) \\ \Leftrightarrow W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) &= W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] Q). \end{aligned}$$

$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  wird wie in Bemerkung 3.2 mit  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  identifiziert.

Man erhält also für alle orthogonalen Matrizen  $Q \in O(2)$  und für alle Matrizen  $A \in GL(2)$

$$W_{\mathcal{M}}(A) = W_{\mathcal{M}}(A Q). \quad (3.4)$$



**Abbildung 3.1:** Eine glatte Selbstabbildung  $\theta$  von  $\mathcal{M}$ , welche in  $p \in \mathcal{M}$  lokal eine Rotation  $Q$  in  $\mathcal{T}_p \mathcal{M}$  ist und eine glatte Selbstabbildung  $r$  von  $\mathcal{S}^2$ , welche in  $\bar{p} \in \mathcal{S}^2$  lokal eine Rotation  $R$  in  $\mathcal{T}_{\bar{p}} \mathcal{S}^2$  ist.

- **Bezugssysteminvarianz.** Die Energie hängt, wie in Abbildung 3.1 zu sehen, nicht ab von lokalen Rotationen  $r : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  auf der Sphäre :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} r(\bar{p}) : \mathcal{T}_{\bar{p}} \mathcal{S}^2 &\rightarrow \mathcal{T}_{r(\bar{p})} \mathcal{S}^2 && \text{mit } r(\bar{p}) = \bar{p}, \\ \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} r(\bar{p}) : \mathcal{T}_{\bar{p}} \mathcal{S}^2 &\rightarrow \mathcal{T}_{\bar{p}} \mathcal{S}^2 && \text{sei Rotation } R \in O(2). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel (2.1) gilt

$$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} (r \circ x[\Phi]) = \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} r \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} x[\Phi] = R \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} x[\Phi]$$

und man erhält als letztes Axiom an die Energiedichte

$$W_{\mathcal{M}}(\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} x[\Phi]) = W_{\mathcal{M}}(R \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} x[\Phi]).$$

Für alle orthogonalen Matrizen  $R \in O(2)$  und für alle Matrizen  $A \in GL(2)$  findet man

$$W_{\mathcal{M}}(A) = W_{\mathcal{M}}(R A). \quad (3.5)$$

$\iota_A := (\det(A), \text{tr}(A))$  mit  $\iota_{(\cdot)} : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^2$  bezeichne die Invarianten einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ . Aus den obigen drei Axiomen folgt, dass die Energiedichte nur von

$$\iota_{\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} x[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} x[\Phi]}|_{\mathcal{T}_{\mathcal{M}}}$$

abhängt:

**Satz 3.4 (Energie-Darstellung.)**

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  eine zweidimensionale reguläre topologische Sphäre und  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  sei ein konformer Diffeomorphismus (Startparametrisierung). Unter den Voraussetzungen von Elastizität (3.3), Isotropie (3.4) und Bezugssysteminvarianz (3.5) existiert eine Funktion  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $W_{\mathcal{M}}(\mathbf{A}) = W(\iota_{\mathbf{A}^T \mathbf{A}})$  ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$ ) und somit

$$E[\Phi] = \int_{\mathcal{M}} W(\det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]), \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])) \, da. \quad (3.6)$$

**Beweis**

- (i) Sei  $\mathbf{A} \in \text{GL}(2)$  und  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{U}$  mit  $\mathbf{Q} \in \text{O}(2)$ ,  $\mathbf{U}$  symmetrisch und positiv definit die Polarzerlegung von  $\mathbf{A}$ . Nach [4] Theorem 3.2-2 (polar factorization of an invertible matrix) ist

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}} \text{ und } \mathbf{Q} = \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1}. \quad (3.7)$$

Damit man erhält

$$W_{\mathcal{M}}(\mathbf{A}) \stackrel{(3.7)}{=} W_{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}\mathbf{U}) \stackrel{(3.5)}{=} W_{\mathcal{M}}(\mathbf{U}) \stackrel{(3.7)}{=} W_{\mathcal{M}}(\sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}) = \widetilde{W}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}), \quad (3.8)$$

wobei  $\widetilde{W}(\mathbf{B}) := W_{\mathcal{M}}(\sqrt{\mathbf{B}})$  mit  $\mathbf{B}$  positiv definit und symmetrisch.

Für alle  $\mathbf{Q} \in \text{O}(2)$  und alle positiv definiten und symmetrische Matrizen  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$  ist

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q}) &= W_{\mathcal{M}}(\sqrt{\mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q}}) = W_{\mathcal{M}}\left(\sqrt{\mathbf{Q}^T (\sqrt{\mathbf{B}})^T \sqrt{\mathbf{B}} \mathbf{Q}}\right) \\ &= W_{\mathcal{M}}\left(\sqrt{(\sqrt{\mathbf{B}} \mathbf{Q})^T \sqrt{\mathbf{B}} \mathbf{Q}}\right) \stackrel{(3.8)}{=} W_{\mathcal{M}}(\sqrt{\mathbf{B}} \mathbf{Q}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} W_{\mathcal{M}}(\sqrt{\mathbf{B}}) = \widetilde{W}(\mathbf{B}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

- (ii) Ich zeige  $\iota_{\mathbf{A}} = \iota_{\mathbf{B}}$  für  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  pos. def., symm.  $\Rightarrow \widetilde{W}(\mathbf{A}) = \widetilde{W}(\mathbf{B})$ .

Damit folgt sofort, dass eine Funktion  $W$  existiert, so dass  $\widetilde{W}(\mathbf{A}) = W(\iota_{\mathbf{A}})$ , und damit gilt für beliebige invertierbare Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$W_{\mathcal{M}}(\mathbf{A}) = \widetilde{W}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = W(\iota_{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}),$$

was die Behauptung des Satzes ist. Hierzu:

$\iota_{\mathbf{A}} = \iota_{\mathbf{B}} \Rightarrow$  Eigenwerte  $\lambda_i(\mathbf{A})$  und  $\lambda_i(\mathbf{B})$  sind gleich.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$  pos. def., symm.  $\Rightarrow \exists$  orthonormal Basen  $\{v_i(\mathbf{A})\}_{i=1,2}$  und  $\{v_i(\mathbf{B})\}_{i=1,2}$ .

$$\mathbf{A} = \lambda_i v_i(\mathbf{A}) \otimes v_i(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{B} = \lambda_i v_i(\mathbf{B}) \otimes v_i(\mathbf{B}).$$

Außerdem existiert  $\mathbf{Q} \in \text{O}(2)$  mit  $v_i(\mathbf{A}) = \mathbf{Q} v_i(\mathbf{B})$ .

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{Q} v_i(\mathbf{B}) v_i(\mathbf{B})^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^T$$

$$\Rightarrow \widetilde{W}(\mathbf{A}) \stackrel{(3.9)}{=} \widetilde{W}(\mathbf{B}).$$

□

**Bemerkung 3.5 (Verallgemeinerung für zweidimensionale Flächen.)**

Die Darstellung der Energie ist nicht beschränkt auf zweidimensionale Flächen vom topologischen Typ der Sphäre. Die Axiome der Elastizität, Isotropie und Bezugssysteminvarianz kann man leicht auf zweidimensionale glatte Flächenstücke übertragen.

**Bemerkung 3.6 (Geometrische Interpretation.)**

Nach obigem Satz hängt die Energiedichte  $W$  hängt nur von den Invarianten des positiv diagonalen „geometrischen“ Verzerrungstensors  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] \Big|_{\mathcal{T}\mathcal{M}}$  ab.

Seien die beiden Eigenwerte  $\lambda > 0$ . Nun zur geometrischen Interpretation:

- $\text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) \cong$  mittlere Längenänderung unter der Abbildung  $\mathbf{x}[\Phi]$   
(vgl. Abschnitt 3.1)
- $\det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) \cong$  kontrolliert Flächenänderung unter  $\mathbf{x}[\Phi]$   
(auch Abschnitt 3.1)

Jetzt werde ich die tatsächliche Qualität einer Parametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi]$  in Termen des Integranden  $W$  analysieren. Wie schon erwähnt, möchte man minimale Verzerrungen von Längen und Flächen.

Ist  $\text{vol}(\mathcal{M}) = \text{vol}(\mathcal{S}^2)$ , dann werden Längen (global) erhalten, wenn  $\mathbf{x}[\Phi]$  eine Isometrie ist und somit

$$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] = \mathbf{1}.$$

$\mathbf{x}[\Phi]$  ist (global) flächenerhaltend, wenn  $\det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) = 1$ . Deshalb schlage ich folgende konkrete Energiedichte vor:

**Beispiel 3.7 (Energiedichte.)**

$$W(\delta, \tau) = \alpha_a \left( \delta^{\frac{r}{2}} + \beta \delta^{-\frac{s}{2}} \right) + \alpha_l \tau^{\frac{p}{2}} \quad (3.10)$$

mit den Invarianten  $\delta$  und  $\tau$  von  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$ :

$$\delta := \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) = \lambda^2 > 0,$$

$$\tau := \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) = 2\lambda > 0.$$

Die Parameter  $\alpha_a, r, s, \beta, \alpha_l, p \in \mathbb{R}$  werden in Lemma 3.8 näher bestimmt.

Obige Energie kann man als Prototyp für Energiedichten sehen, welche mit Satz 3.4 übereinstimmen.

Die Energiedichte ist ein geeignetes Modell für eine größere Klasse von Funktionalen, für welche ich die Existenz von minimierenden Deformationen zeigen werde.

Der Energieterm

$$W_l(\tau) := \alpha_l \tau^{\frac{p}{2}}$$

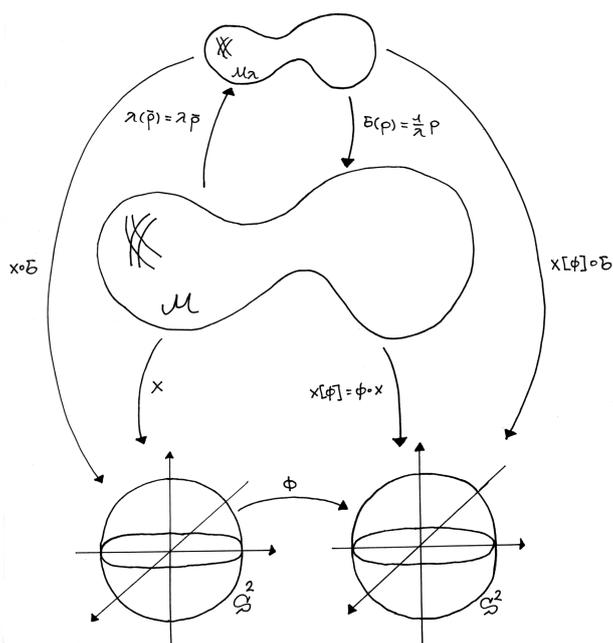
kontrolliert Längenänderung, wohingegen

$$W_a(\delta) := \alpha_a \left( \delta^{\frac{r}{2}} + \beta \delta^{-\frac{s}{2}} \right)$$

Flächenexpansion und -kompression bestraft.

Optimale Flächenparametrisierungen finde ich numerisch z. Bsp. zu den Parametern  $\alpha_a = \alpha_l = 1$ ,  $r = 2$ ,  $s = p = 6$  und  $\beta = \frac{13}{3}$  mit folgender Energiedichte (vgl. § 4.6)

$$W(\delta, \tau) = \delta + \frac{13}{3} \delta^{-3} + \tau^3.$$



**Abbildung 3.2:** Konforme Startparametrisierung  $\mathbf{x} \circ \sigma$  für  $\mathcal{M}_\lambda$  und Reparametrisierung  $(\mathbf{x} \circ \sigma)[\Phi]$ .

Ist die Oberfläche von  $\mathcal{M}$

$$\text{vol}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} da$$

identisch mit der Oberfläche der  $S^2$ , so ist es vernünftig zu verlangen, dass Isometrien optimale Parametrisierungen sind. Im allgemeinen ist jedoch  $\text{vol}(\mathcal{M}) \neq \text{vol}(S^2)$  und man erreicht keine globale Flächenerhaltung. Deshalb formuliere ich die Problemstellung um (vgl. Abb. 3.2):

Ich skaliere die Fläche  $\mathcal{M}$  mit

$$\lambda := \sqrt{\frac{4\pi}{\text{vol}(\mathcal{M})}}$$

und erhalte eine Fläche  $\mathcal{M}_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^3 | \exists y \in \mathcal{M} : x = \lambda y\}$  mit Oberfläche  $4\pi = \text{vol}(S^2)$ . Sei  $\sigma(x) = \frac{1}{\lambda}x$  die Reskalierung.

Ist nun  $\Phi \in \text{conf}(S^2)$  eine Deformation, die  $(\mathbf{x} \circ \sigma)[\Phi] = \mathbf{x}[\Phi] \circ \sigma$  zu einer Isometrie macht, fordert man nun, dass  $\mathbf{x}[\Phi] \circ \sigma$  eine optimale Parametrisierung ist. Für die ursprüngliche Problemstellung bedeutet dies, dass Isometrien bis auf Skalierung optimale Parametrisierungen sind:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{M}_\lambda} (\mathbf{x}[\Phi] \circ \sigma)^T \nabla_{\mathcal{M}_\lambda} (\mathbf{x}[\Phi] \circ \sigma) &= 1 \\ \Rightarrow \nabla_{\mathcal{M}_\lambda} \sigma^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] \nabla_{\mathcal{M}_\lambda} \sigma &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \mathbf{1} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] \frac{1}{\lambda} \mathbf{1} &= 1 \\ \Rightarrow \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] &= \underbrace{\lambda^2}_{=:\mu} \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Das nächste Lemma fasst die daraus resultierenden wahren Freiheitsgrade  $(\alpha_l, r, s, \alpha_a, p)$  nochmal zusammen:

**Lemma 3.8**

Sei  $\mathcal{M}$  eine glatte topologische Sphäre und  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  ein konformer Diffeomorphismus. Ist  $\Phi \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  eine Deformation, die  $\mathbf{x}[\Phi]$  bis auf Skalierung mit  $\mu := \lambda^2 = \frac{4\pi}{\text{vol}(\mathcal{M})} > 0$  zu einer Isometrie macht, so ist  $\Phi$  lokaler Minimierer zur Energie (3.6) mit Energiedichte (3.10), falls mit  $\mu$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \alpha_a &\geq 0, \quad \alpha_l > 0, \quad r, s \geq 0, \quad p \geq 2, \\ \alpha_a (r\mu^r - \beta s\mu^{-s}) + \alpha_l p (2\mu)^{\frac{p}{2}-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Beweis**

Sei  $(\Phi_\varepsilon)$  eine Familie von konformen Diffeomorphismen der Sphäre, d.h.

$$\Phi_\varepsilon : \mathcal{S}^2 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathcal{S}^2, \quad 0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R},$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi(\cdot, 0) = \Phi, \\ \Phi_\varepsilon &= \Phi(\cdot, \varepsilon) \in \text{conf}(\mathcal{S}^2). \end{aligned}$$

Betrachte nun für festes  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^2$  folgende Flächenkurve der Sphäre:

$$c_{\mathbf{x}}(\varepsilon) := \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

Mit  $V : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert als

$$V(\mathbf{x}) := \dot{c}_{\mathbf{x}}(0) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Phi(\mathbf{x}, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}$$

ist  $V(\mathbf{x}) \in \mathcal{T}_{\Phi(\mathbf{x})}\mathcal{S}^2$ .

Als Taylorentwicklung erhält man dann für  $\Phi_\varepsilon : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$ :

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + \varepsilon V(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^2).$$

Damit

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi_\varepsilon^T \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi_\varepsilon &= (\underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi^T + \varepsilon \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} V^T + O(\varepsilon^2)^T) (\underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi + \varepsilon \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} V + O(\varepsilon^2)) \\ &= \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi + \varepsilon (\underline{\nabla} V^T \underline{\nabla} \Phi + \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} V) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Variationen der symmetrischen und positiv definiten Metrik  $g$ ,

$$g := g[\Phi] := \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi],$$

haben damit folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} g[\Phi_\varepsilon] &= \underline{\nabla}_{\mathcal{M}}(\Phi_\varepsilon \circ \mathbf{x})^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}}(\Phi_\varepsilon \circ \mathbf{x}) \\ &= \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}^T \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi_\varepsilon^T \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi_\varepsilon \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x} \\ &= \underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x} + \varepsilon \underline{\nabla} \mathbf{x}^T (\underline{\nabla} V^T \underline{\nabla} \Phi + \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} V) \underline{\nabla} \mathbf{x} + O(\varepsilon^2) \\ &= g[\Phi] + \varepsilon \underline{\nabla} \mathbf{x}^T (\underline{\nabla} V^T \underline{\nabla} \Phi + \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} V) \underline{\nabla} \mathbf{x} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g[\Phi_\varepsilon] = q + \varepsilon C + O(\varepsilon^2)$$

mit symmetrischer Matrix

$$C := \underline{\nabla} \mathbf{x}^T (\underline{\nabla} V^T \underline{\nabla} \Phi + \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} V) \underline{\nabla} \mathbf{x}.$$

Es genügt also Ableitungen der Energiedichte  $W$  in Bezug auf  $q$  in Richtung einer beliebigen symmetrischen Matrix  $C \in \mathbb{R}^{2,2}$  zu betrachten.

Die Ableitungen, die ich benötige um die erste und zweite Variation auszurechnen, fasse ich vorher nochmal zusammen:

$$\begin{aligned} \partial_q \det(q)(C) &:= \frac{d}{d\varepsilon} \det(q + \varepsilon C) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \det(q) \left( \frac{d}{d\varepsilon} \det(\mathbf{1} + \varepsilon q^{-1}C) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \det(q) \operatorname{tr}(q^{-1}C). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \det(\mathbf{1} + \varepsilon q^{-1}C) &= \varepsilon^2 \underbrace{\det\left(q^{-1}C + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}\right)}_{\text{charakt. Polynom}} \\ &= \varepsilon^2 \left( \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 + \operatorname{tr}(q^{-1}C) \frac{1}{\varepsilon} + \det(q^{-1}C) \right) \\ &= 1 + \operatorname{tr}(q^{-1}C) \varepsilon + \det(q^{-1}C) \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Spur erhält man

$$\partial_q \operatorname{tr}(q)(C) := \frac{d}{d\varepsilon} \operatorname{tr}(q + \varepsilon C) \Big|_{\varepsilon=0} = \operatorname{tr}(C) \tag{3.14}$$

$$\partial_q \operatorname{tr}(q^{-1}C)(C) := \frac{d}{d\varepsilon} \operatorname{tr}((q + \varepsilon C)^{-1}C) \Big|_{\varepsilon=0} = -\operatorname{tr}(q^{-1}C q^{-1}C). \tag{3.15}$$

Die letzte Spurableitung erhält man aus der Neumannschen Reihe:

$$\begin{aligned} (q + \varepsilon C)^{-1} &= (q(\mathbf{1} + \varepsilon q^{-1}C))^{-1} \\ &= (\mathbf{1} - (-\varepsilon) q^{-1}C)^{-1} q^{-1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k (q^{-1}C)^k \right) q^{-1} \\ &= \mathbf{1} q^{-1} - \varepsilon q^{-1}C q^{-1} + \varepsilon^2 \dots - \varepsilon^3 \dots + \dots \\ \Rightarrow \partial_q (q^{-1})(C) &:= \frac{d}{d\varepsilon} (q + \varepsilon C)^{-1} \Big|_{\varepsilon=0} = -q^{-1}C q^{-1}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen der Energiedichte  $W$  in Bezug auf  $q$  in Richtung einer beliebigen symmetrischen Matrix  $C \in \mathbb{R}^{2,2}$  lauten:

$$\begin{aligned}
\partial_q W(\iota_q)(C) &:= \frac{d}{d\varepsilon} W_a(\det(q + \varepsilon C)) + W_l(\operatorname{tr}(q + \varepsilon C)) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&\stackrel{(3.13)}{=} \alpha_a \left( \frac{r}{2} \det(q)^{\frac{r}{2}-1} - \beta \frac{s}{2} \det(q)^{-\frac{s}{2}-1} \right) \det(q) \operatorname{tr}(q^{-1}C) \\
&\stackrel{(3.14)}{=} + \alpha_l \frac{p}{2} \operatorname{tr}(q)^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tr}(C) \\
&= \alpha_a \left( \frac{r}{2} \det(q)^{\frac{r}{2}} - \beta \frac{s}{2} \det(q)^{-\frac{s}{2}} \right) \operatorname{tr}(q^{-1}C) + \alpha_l \frac{p}{2} \operatorname{tr}(q)^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tr}(C) \\
&=: \bar{W}(q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_q^2 W(\iota_q)(C, C) &:= \frac{d}{d\varepsilon} \bar{W}(q + \varepsilon C) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&\stackrel{(3.13)}{=} \alpha_a \left( \left( \frac{r}{2} \right)^2 \det(q)^{\frac{r}{2}-1} + \beta \left( \frac{s}{2} \right)^2 \det(q)^{-\frac{s}{2}-1} \right) \det(q) \operatorname{tr}(q^{-1}C)^2 \\
&\stackrel{(3.15)}{=} - \alpha_a \left( \frac{r}{2} \det(q)^{\frac{r}{2}} - \beta \frac{s}{2} \det(q)^{-\frac{s}{2}} \right) \operatorname{tr}(q^{-1}C q^{-1}C) \\
&\quad + \alpha_l \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \operatorname{tr}(q)^{\frac{p}{2}-2} \operatorname{tr}(C)^2 \\
&= \alpha_a \left( \frac{r^2}{4} \det(q)^{\frac{r}{2}} + \beta \frac{s^2}{4} \det(q)^{-\frac{s}{2}} \right) \operatorname{tr}(q^{-1}C)^2 \\
&\quad - \alpha_a \left( \frac{r}{2} \det(q)^{\frac{r}{2}} - \beta \frac{s}{2} \det(q)^{-\frac{s}{2}} \right) \operatorname{tr}(q^{-1}C q^{-1}C) \\
&\quad + \alpha_l \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \operatorname{tr}(q)^{\frac{p}{2}-2} \operatorname{tr}(C)^2.
\end{aligned}$$

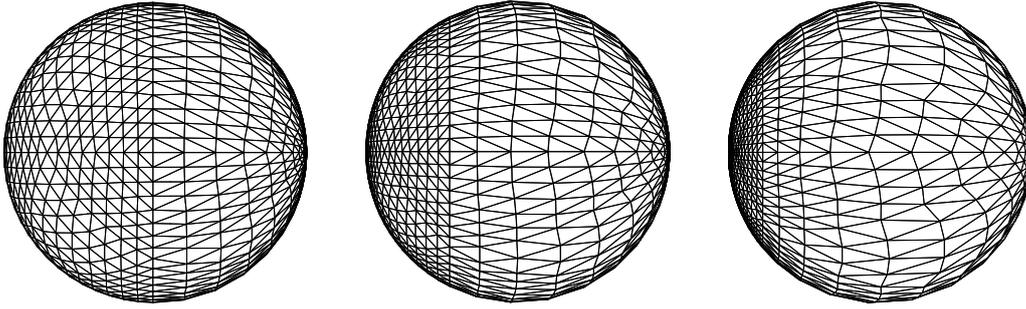
$q = \mu \mathbf{1}$  (vgl. Gleichung (3.11)) ist lokaler Minimierer von  $W(\iota_q)$ , wenn  $\partial_q W(\iota_{\mu \mathbf{1}}) = 0$  und  $\partial_q^2 W(\iota_{\mu \mathbf{1}})$  positive definit ist. Man erhält mit  $\det(\mu \mathbf{1}) = \mu^2$  und  $\operatorname{tr}(\mu \mathbf{1}) = 2\mu$

$$\begin{aligned}
\partial_q W(\iota_{\mu \mathbf{1}})(C) &= \alpha_a \left( \frac{r}{2} \mu^r - \beta \frac{s}{2} \mu^{-s} \right) \operatorname{tr}(\mu C) + \alpha_l \frac{p}{2} (2\mu)^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tr}(C) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(C) \left( \alpha_a (r\mu^r - \beta s \mu^{-s}) + \alpha_l p (2\mu)^{\frac{p}{2}-1} \right) \stackrel{(3.12)}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_q^2 W(\iota_{\mu \mathbf{1}})(C, C) &= \underbrace{\alpha_l \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) (2\mu)^{\frac{p}{2}-2} \operatorname{tr}(C)^2}_{\geq 0, \text{ wenn } p \geq 2} \\
&\quad + \underbrace{\alpha_a \left( \frac{r^2}{4} \mu^r + \beta \frac{s^2}{4} \mu^{-s} \right) \mu^2 \operatorname{tr}(C)^2}_{\geq 0} \\
&\quad - \underbrace{\alpha_a (r\mu^r - \beta s \mu^{-s})}_{= \alpha_l p (2\mu)^{\frac{p}{2}-1} > 0, \text{ wenn } p \geq 2} \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2} \underbrace{\operatorname{tr}(C^2)}_{= \operatorname{tr}(C^T C) > 0} > 0,
\end{aligned}$$

für alle symmetrische Matrizen  $C \neq 0$ . Ich habe benutzt, dass für alle Matrizen  $C \neq 0$  die Matrixnorm  $\sqrt{\operatorname{tr}(C^T C)} > 0$  ist.

□



**Abbildung 3.3:** Startparametrisierung zur Ei-Fläche  $\mathcal{M}_\lambda$  (links) und optimale Parametrisierungen zur Energie  $\int_{\mathcal{M}_\lambda} W(\delta_\lambda, \tau_\lambda)$  da mit Energiedichte  $W(\delta_\lambda, \tau_\lambda) = \delta_\lambda^3 + 15 \delta_\lambda^{-1} + \tau_\lambda^3$  und  $\lambda = 0.7$  (Mitte), bzw.  $\lambda = 1.0$  (rechts).

Die linearen Parameter  $\alpha_l$  und  $\alpha_a$  kontrollieren die relative Bedeutung von Längen- und Flächenverzerrung, während die Exponenten  $r$ ,  $s$  und  $p$  hohe Verzerrungen, gemessen in den zugehörigen Energien, verhindern. Den abhängigen Parameter berechnet man mit Lemma 3.8 wie in Gleichung (3.16).

Wenn man Isometrien ohne Skalierung als lokale Minimierer verlangt, werden, wie nachfolgende Beispiele zeigen, im allgemeinen nicht die gewünschten Minima gefunden.

Dazu sei  $\mathcal{M}$  eine glatte topologische Sphäre mit  $\text{vol}(\mathcal{M}) = \text{vol}(\mathcal{S}^2) = 4\pi$  und  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  ein konformer Diffeomorphismus. Somit ist  $\mu = 1$  aus Lemma 3.8. Ich betrachte die Energiedichte aus Beispiel 3.7 zu den Parametern  $\alpha_a = \alpha_l = 1$ ,  $r = p = 6$  und  $s = 2$ . Mit

$$\beta = \frac{\mu^s}{s} \left( \frac{\alpha_l}{\alpha_a} p (2\mu)^{\frac{p}{2}-1} + r\mu^r \right) = \frac{1}{2} (6 \cdot 2^2 + 6) = 15 \quad (3.16)$$

genügt die Energiedichte

$$W(\delta, \tau) = \delta^3 + 15 \delta^{-1} + \tau^3$$

der Gleichung (3.12). Sei  $\Phi_1 \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  Minimierer zur Energie

$$E[\Phi] = \int_{\mathcal{M}} W(\delta, \tau) \, da.$$

Ich skaliere nun die Fläche  $\mathcal{M}$  mit  $\lambda > 0$  und erhalte eine Fläche  $\mathcal{M}_\lambda$  mit  $\text{vol}(\mathcal{M}_\lambda) = \lambda^2 \text{vol}(\mathcal{M})$ . Sei  $\Phi_\lambda \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  Minimierer zur Energie

$$E_\lambda[\Phi] := \int_{\mathcal{M}_\lambda} W(\delta_\lambda, \tau_\lambda) \, da.$$

Dabei ist mit  $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}$

$$\delta = \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])$$

$$\tau = \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi])$$

und

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda &= \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}_\lambda} (\nabla_{\mathcal{M}_\lambda}(\mathbf{x} \circ \sigma)[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}}(\mathbf{x} \circ \sigma)[\Phi]) \\
&= \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} \left( \frac{1}{\lambda^2} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi] \right) \\
&= \frac{1}{\lambda^4} \delta \\
\tau_\lambda &= \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}_\lambda} (\nabla_{\mathcal{M}}(\mathbf{x} \circ \sigma)[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}}(\mathbf{x} \circ \sigma)[\Phi]) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \tau.
\end{aligned}$$

Für fixiertes  $\Phi$  ist  $\delta_\lambda > \delta$ , wenn  $\lambda < 1$ , und  $\delta_\lambda < \delta$ , wenn  $\lambda > 1$  ist. Um  $\Phi_1$  mit  $\Phi_\lambda$  zu vergleichen, nehme ich an, dass  $\Phi := \Phi_1 \equiv \Phi_\lambda$  ist.

Als erstes Beispiel betrachte ich die Ei-Fläche aus Abbildung 4.3 (§ 4.6). Die diskrete topologische Sphäre

$$\mathcal{M}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

sei eine Approximation von  $\mathcal{M}$  und

$$\mathcal{S}_h^2 = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^*} T$$

sei eine Sphärentriangulierung mit Gitterknoten auf  $\mathcal{S}^2$ .

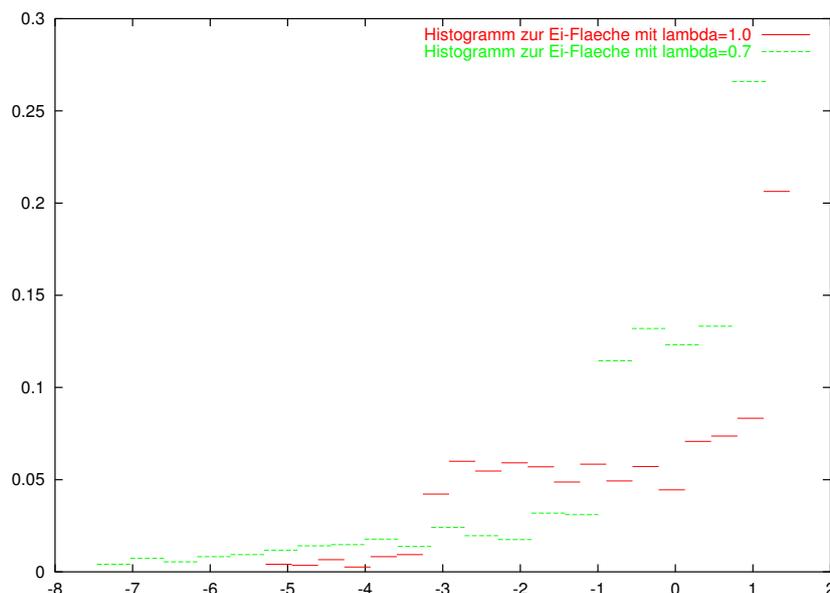
$$\mathcal{M}_{\lambda,h} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T_\lambda \quad \text{mit} \quad T_\lambda := \lambda T$$

ist dann eine Approximation von  $\mathcal{M}_\lambda$ . Für die Diskretisierung bzw. für die Definition der Triangulierung einer Fläche verweise ich auf Kapitel 4.1 und [2, 3]. Der Einfachheit lasse ich den Index  $h$  weg. Es gilt

$$\begin{aligned}
E[\Phi] &= \int_{\mathcal{M}} W(\delta, \tau) \, da \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| (\delta_T^3 + 15 \delta_T^{-1} + \tau_T^3)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E_\lambda[\Phi] &= \int_{\mathcal{M}_\lambda} W(\delta_\lambda, \tau_\lambda) \, da \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \lambda^2 |T| \left( \frac{1}{\lambda^{12}} \delta_T^3 + 15 \lambda^4 \delta_T^{-1} + \frac{1}{\lambda^6} \tau_T^3 \right) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \left( \frac{1}{\lambda^{10}} \delta_T^3 + 15 \lambda^6 \delta_T^{-1} + \frac{1}{\lambda^4} \tau_T^3 \right),
\end{aligned}$$



**Abbildung 3.4:** Histogramme zur Ei-Fläche (vgl. Abb. 4.3) für  $\lambda = 1.0$  (rot) und  $\lambda = 0.7$  (grün). Auf der x-Achse sind Intervalle der Volumenkontrolle  $\ln(\delta)$  aufgetragen. Die mit  $\text{vol}(\mathcal{M}_\lambda)$  normierten Histogrammwerte sind gegeben als die Summe der Oberfläche der Dreiecke, die im jeweiligen Intervall liegen. Zum Vergleich wird das Histogramm zu  $\lambda = 0.7$  mit  $-\ln\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$  transliert.

wobei die Determinantenfunktion wie in §4.1 mit stückweise konstanten Funktionen

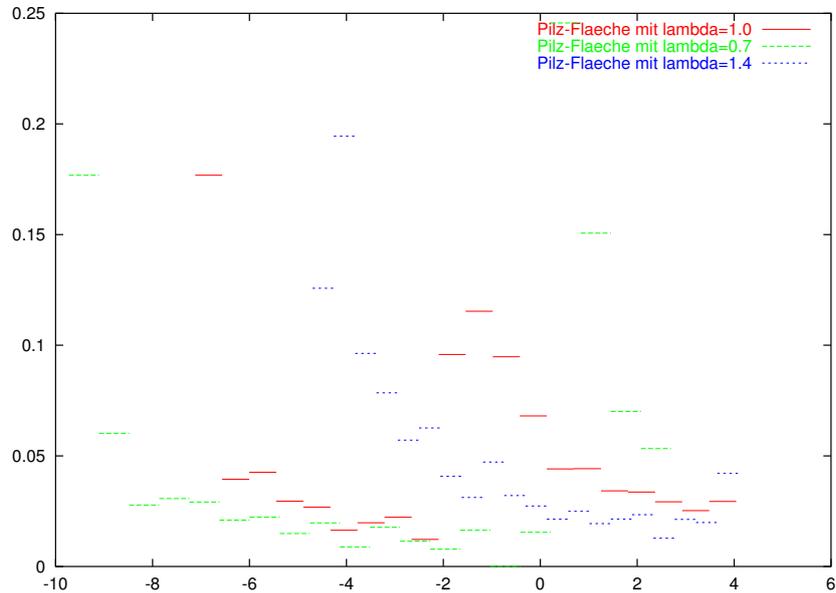
$$\delta_T := \delta_{h,T} = \delta_h|_T$$

diskretisiert wird.

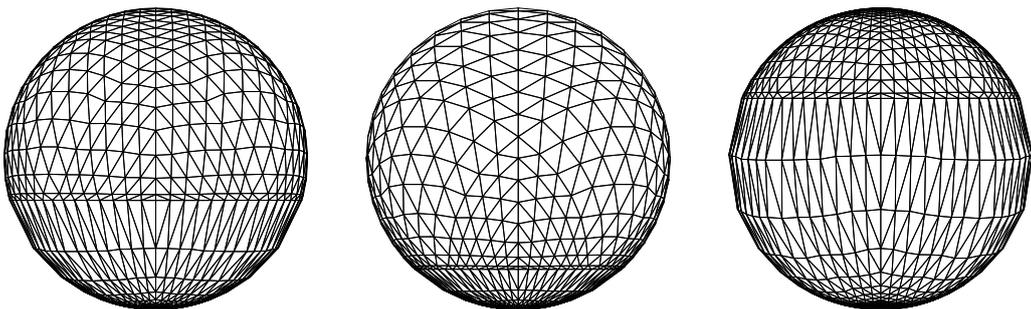
Ist  $\lambda < 1$ , so ist  $15\lambda^6 < 15$  und die Energie  $E_\lambda$  bestraft Flächenkompression weniger als die Energie  $E$ . Dies kann man auch an den Histogrammen zu  $\delta$  bzw.  $\delta_{0.7}$  zur Ei-Fläche in Abbildung 3.4 ablesen.

Dabei wird die x-Achse in endlich viele aneinander grenzende Intervalle  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  zerlegt. Dann wird für jedes Dreieck  $T$   $\ln(\delta_T)$  berechnet. Zum Histogrammwert zu  $\Delta_j$  mit  $\ln(\delta_T) \in \Delta_j$  wird der Flächeninhalt von  $T$ , also  $|T|$ , hinzuaddiert. Anschließend werden die Histogrammwerte mit der Oberfläche der Fläche normiert. Zum Vergleich wird das Histogramm zu  $\lambda = 0.7$  mit  $-\ln\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$  transliert. Ist  $\lambda = 0.7$ , so bestraft  $E_{0.7}$  Kompression weniger, was man auch an der Linksverschiebung des Histogrammes zu  $\lambda = 0.7$  erkennt (Abb. 3.4). Zum Vergleich sind in Abbildung 3.3 das Parametergebiet zur Startparametrisierung und die Parametergebiete zu den optimalen Parametrisierungen dargestellt.

Als weiteres Beispiel habe ich die Pilz-Fläche aus Abbildung 4.5 (§ 4.6) gewählt. Zu  $\lambda = 0.7$  ist das Histogramm (Abb. 3.5) nach links verschoben, während es zu  $\lambda = 1.4$  nach rechts verschoben ist. Zum Vergleich sind in Abbildung 3.6 die Parametergebiete zu den optimalen Parametrisierungen dargestellt.



**Abbildung 3.5:** Histogramme zur Pilz-Fläche (vgl. Abb. 4.5) für  $\lambda = 1.0$  (rot),  $\lambda = 0.7$  (grün) und  $\lambda = 1.4$  (blau). Auf der x-Achse sind Intervalle der Volumenkontrolle  $\ln(\delta)$  aufgetragen. Die mit  $\text{vol}(\mathcal{M}_\lambda)$  normierten Histogrammwerte sind gegeben als die Summe der Oberfläche der Dreiecke, die im jeweiligen Intervall liegen. Zum Vergleich sind die Histogramme zu  $\lambda = 0.7$ , bzw.  $\lambda = 1.4$ , mit  $-\ln\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$  transliert worden.



**Abbildung 3.6:** Optimale Parametrisierungen für die Pilz-Fläche zur Energie  $\int_{\mathcal{M}_\lambda} W(\delta_\lambda, \tau_\lambda)$  da mit Energiedichte  $W(\delta_\lambda, \tau_\lambda) = \delta_\lambda^3 + 15 \delta_\lambda^{-1} + \tau_\lambda^3$  und  $\lambda = 1.0$  (rechts), bzw.  $\lambda = 0.7$  (Mitte) und  $\lambda = 1.4$  (links).

Mittelwerte zur Ei-Fläche			Mittelwerte zur Pilz-Fläche			
$\lambda$	1.0	0.7	$\lambda$	1.0	0.7	1.4
$\bar{m}_\lambda$	1.397	5.306	$\bar{m}_\lambda$	3.242	8.184	1.063
$\frac{1}{\lambda^4} \bar{m}$		5.818	$\frac{1}{\lambda^4} \bar{m}$		5.818	0.844

**Tabelle 3.1:** Mittelwerte  $\bar{m}_\lambda$  und theoretische Mittelwerte  $\frac{1}{\lambda^4} \bar{m}$  zur Ei- bzw. Pilz-Fläche.

Varianzwerte zur Ei-Fläche			Varianzwerte zur Pilz-Fläche			
$\lambda$	1.0	0.7	$\lambda$	1.0	0.7	1.4
$v_\lambda$	0.0004	0.0007	$v_\lambda$	0.0037	0.0258	0.0002
$\frac{1}{\lambda^8} v$		0.0069	$\frac{1}{\lambda^8} v$		0.0642	0.0003

**Tabelle 3.2:** Berechnete Varianz  $v_\lambda$  und theoretische Varianz  $\frac{1}{\lambda^8} v$  zur Ei- bzw. Pilz-Fläche.

Außerdem habe ich die Mittelwerte bzw. die Varianzwerte der Determinantenfunktion verglichen. Es sei

$$\bar{m} := \bar{m}_1 := \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M})} \int_{\mathcal{M}} \delta \, da = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M})} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \delta_T \right)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{m}_\lambda &:= \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M}_\lambda)} \int_{\mathcal{M}_\lambda} \delta_\lambda \, da = \frac{1}{\lambda^2 \text{vol}(\mathcal{M})} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \lambda^2 |T| \frac{1}{\lambda^4} \delta_T \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^4} \bar{m}. \end{aligned}$$

Wie man an Tabelle 3.1 ablesen kann, liegt der berechnete Mittelwert zu  $\bar{m}_\lambda$  immer unter dem theoretischen Wert  $\frac{1}{\lambda^4} \bar{m}$ .

Die Varianz ist definiert als

$$v := v_1 := \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M})} \int_{\mathcal{M}} (\delta - \bar{m})^2 \, da = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M})} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| (\delta_T - \bar{m})^2 \right)$$

und

$$\begin{aligned} v_\lambda &:= \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M}_\lambda)} \int_{\mathcal{M}_\lambda} (\delta_\lambda - \bar{m})^2 \, da = \frac{1}{\lambda^2 \text{vol}(\mathcal{M})} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \lambda^2 |T| \left( \frac{1}{\lambda^4} (\delta_T - \bar{m}) \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^8} v. \end{aligned}$$

Wie man an Tabelle 3.2 ablesen kann, liegt die berechnete Varianz zu  $v_\lambda$  auch immer unter dem theoretischen Wert  $\frac{1}{\lambda^8} v$ .

### 3.5 Existenzresultat

Identifiziert man wie in Abschnitt 2.2 die Sphäre mit der Riemannschen Sphäre, so lässt sich jeder konforme Diffeomorphismus der Sphäre darstellen als  $\Phi = \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi$ , wobei  $\Pi$  die stereographische Projektion vom Nordpol und  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \widehat{\mathbb{C}}$ , eine Möbiustransformation ist. Somit lässt sich jedes  $\Phi \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  durch acht reelle Parameter charakterisieren.

Umgekehrt definiert jedes  $\nu := (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_8) \in \mathbb{R}^8$  wie folgt ein  $\Phi \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$ :

$$\Phi := \Phi_\nu := \Pi^{-1} \circ f_\nu \circ \Pi$$

mit

$$f_\nu(z) := \frac{(\nu_1 + i\nu_2)z + (\nu_3 + i\nu_4)}{(\nu_5 + i\nu_6)z + (\nu_7 + i\nu_8)}.$$

Sei  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  eine konforme Startparametrisierung einer zweidimensionalen topologischen Sphäre  $\mathcal{M}$ . Die Determinante und die Spur des Verzerrungstensors hängen von  $\Phi_\nu$  und somit nur von  $\nu \in \mathbb{R}^8$  ab, also

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(\nu) = \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi_\nu]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi_\nu]), \\ \tau &= \tau(\nu) = \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi_\nu]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi_\nu]). \end{aligned}$$

Zur Energiedichte  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aus Satz 3.4 existiert also eine Funktion  $\widehat{W} : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\widehat{W}(\nu) = W(\delta(\nu), \tau(\nu)).$$

Somit hängt auch die Energie, welche ich wieder mit  $E$  bezeichne, nur von den Parametern  $\nu$  ab:

$$E[\nu] = \int_{\mathcal{M}} \widehat{W}(\nu) \, da.$$

Die Energie ist jedoch invariant bezüglich komplexer Skalierung der Parameter  $\nu$ . Denn die Koeffizienten einer beliebigen LFT  $f(z) = \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}$  sind wegen

$$\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} = \frac{\lambda \tilde{a}z + \lambda \tilde{b}}{\lambda \tilde{c}z + \lambda \tilde{d}}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

nicht eindeutig. Unterschiedliche Koeffizienten können dieselbe Möbiustransformation beschreiben, und deswegen müssen Minimalfolgen  $(\nu_k)_k \in \mathbb{R}^8$  der Energie nicht beschränkt sein. Um dies zu verhindern, normiert man die Möbiustransformationen. Es existieren bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte Koeffizienten

$$(a, b, c, d) := \left( \lambda \tilde{a}, \lambda \tilde{b}, \lambda \tilde{c}, \lambda \tilde{d} \right), \quad \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{C}, \quad \lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c}}}$$

mit  $a d - b c = 1$ .

Die komplexe Gleichung  $(\nu_1 + i\nu_2)(\nu_7 + i\nu_8) - (\nu_3 + i\nu_4)(\nu_5 + i\nu_6) - 1 = 0$  entspricht den beiden reellen Gleichungen

$$\varphi_1(\nu) := \nu_1\nu_7 - \nu_2\nu_8 - \nu_3\nu_5 + \nu_4\nu_6 - 1 = 0, \quad (3.17)$$

$$\varphi_2(\nu) := \nu_1\nu_8 + \nu_2\nu_7 - \nu_3\nu_6 - \nu_4\nu_5 = 0, \quad (3.18)$$

wobei  $\varphi_j : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ .

Das Problem 3.1 wird somit zu

### Problem 3.9

Gegeben sei ein konformer Diffeomorphismus  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  von einer glatten topologischen Sphäre  $\mathcal{M}$  nach  $\mathcal{S}^2$ . Gesucht ist eine Deformation  $\Phi_{opt} := \Phi(\nu_{opt})$  als Minimierer der Energie  $E$ :

$$\nu_{opt} = \arg \min_{\substack{\nu \in \mathbb{R}^8 \\ \varphi_1(\nu) = 0 \\ \varphi_2(\nu) = 0}} \int_{\mathcal{M}} \widehat{W}(\nu) \, da.$$

Basierend auf diese Vorbetrachtungen formuliere ich den folgenden Existenzsatz:

### Satz 3.10 (Existenz einer optimalen Parametrisierung.)

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  eine zweidimensionale reguläre topologische Sphäre und  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$  ein konformer Diffeomorphismus. Jedes  $\nu = (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \in \mathbb{R}^8$  definiert nach Satz 2.14 eine Deformation  $\Phi \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  und damit eine konforme Umparametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi] = \Phi \circ \mathbf{x}$ .

Die Energie sei gegeben als

$$E[\nu] = \int_{\mathcal{M}} \widehat{W}(\nu) \, da = \int_{\mathcal{M}} W(\delta, \tau) \, da$$

mit

$$\begin{aligned} \delta &= \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) > 0, \\ \tau &= \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}}(\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) > 0. \end{aligned}$$

Die Energiedichte genüge der Wachstumsbedingung

$$W(\delta, \tau) \geq \alpha_a \left( \delta^{\frac{r}{2}} + \beta \delta^{-\frac{s}{2}} \right) + \alpha_l \tau^{\frac{p}{2}} \quad \text{mit } \alpha_a, \beta > 0, \alpha_l \geq 0, \quad p, r \geq 0, s > 0.$$

Dann existiert eine minimierende Deformation  $\Phi_\nu \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  mit  $\nu \in \mathcal{A}$  aus der zulässigen Menge

$$\mathcal{A} := \{ \nu \in \mathbb{R}^8 \mid \varphi(\nu) = 0 \},$$

wobei  $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  wie in (3.17) bzw. (3.18).

### Beweis

Angenommen es gilt für die stetige Energie  $E : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \in C^0(\mathbb{R}^8)$

$$E[\nu] \xrightarrow{\|\nu\|_{\mathbb{R}^8} \rightarrow \infty} \infty. \quad (3.19)$$

Dann gibt es eine Minimalstelle  $\nu \in \mathcal{A}$  mit  $E[\nu] \leq E[\tilde{\nu}] \quad \forall \tilde{\nu} \in \mathcal{A}$ :

Sei  $\underline{E} := \inf_{\nu \in \mathcal{A}} E[\nu]$ . Aus der Wachstumsbedingung folgt

$$\underline{E} \geq \inf_{\nu \in \mathbb{R}^8} \int_{\mathcal{M}} \alpha_a \left( \delta^{\frac{r}{2}} + \beta \delta^{-\frac{s}{2}} \right) + \alpha_l \tau^{\frac{p}{2}} \, da \geq 0 > -\infty.$$

Ferner existiert z.B.  $\nu_{id} := (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \in \mathcal{A}$  und somit

$$\underline{E} \leq E[\nu_{id}] < \infty.$$

Also ist  $\underline{E} \in \mathbb{R}$ .

Betrachte nun eine Minimalfolge  $(\nu_k)_k$  mit

$$E[\nu_k] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \underline{E}.$$

$(\nu_k)_k$  ist beschränkt. Denn gäbe es eine Teilfolge  $(\nu_{k_i})_i$  von  $(\nu_k)_k$  mit  $\|\nu_{k_i}\|_{\mathbb{R}^8} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ , dann folgt mit (3.19), dass

$$E[\nu_{k_i}] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty.$$

$(\nu_{k_i})_i$  ist Minimalfolge mit  $E[\nu_{k_i}] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \underline{E} < \infty$ .

Damit gibt es eine konvergente Teilfolge, welche ich wieder mit  $(\nu_k)_k$  bezeichne.

Wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  liegt das Grenzelement  $\nu$  wieder in  $\mathcal{A}$ .

$$\Rightarrow E[\nu] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[\nu_k] = \underline{E}.$$

### Nun zum Beweis von Annahme (3.19):

Jedes  $\nu := (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \in \mathcal{A}$  definiert einen konformen Diffeomorphismus der Sphäre

$$\Phi_\nu = \Pi^{-1} \circ f_\nu \circ \Pi : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2,$$

welche man als Komposition der vier elementaren Möbiustransformationen aus § 2.2 erhält:

Sei  $a = a_1 + i a_2$ ,  $b = b_1 + i b_2$ ,  $c = c_1 + i c_2$ ,  $d = d_1 + i d_2$  und

$$f(z) = f_\nu(z) = \frac{a z + b}{c z + d}$$

mit

$$a d - b c = 1. \tag{3.20}$$

#### 1.Fall: $c=0$

Wegen (3.20) ist dann  $d = \frac{1}{a}$  und man erhält

$$f(z) = a^2 z + a b = (f_2 \circ f_1)(z),$$

wobei

$$f_1(z) = a^2 z =: r \exp(i \alpha) z \quad \text{Homothetie und Rotation (Drehstreckung) und}$$

$$f_2(z) = z + a b =: z + s \exp(i \beta) \quad \text{Translation.}$$

Angenommen  $f$  ist Rotation, d.h.  $b = 0$ ,  $\mathbb{R} \ni r = 1$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann ist

$$f(z) = \exp(i \alpha) z = \frac{a z}{d} = \frac{\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) z}{\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Man erhält für die Norm der zu  $f$  gehörenden Parametern

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + \|d\|^2 = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$

Sei  $(\nu_k)_k$  eine Folge von Elementen aus  $\mathcal{A}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \infty. \quad (3.21)$$

Die zu den einzelnen Folgengliedern  $\nu_k$  korrespondierenden Möbiustransformationen  $\Phi_{\nu_k}$  können nicht ausschließlich aus Rotationen bestehen. Sie müssen ab  $k \geq k^*$  eine Translationen und bzw. oder eine Homothetie enthalten.

Sei  $\nu_k = (a_k, b_k, c_k, d_k) \in \mathcal{A}$  mit  $c_k = 0$  und  $r_k, \alpha_k, s_k$  und  $\beta_k$  so gewählt, dass

$$a_k^2 = r_k \exp(i \alpha_k)$$

und

$$a_k b_k = s_k \exp(i \beta_k).$$

Dann ist

$$a_k = \sqrt{r_k} \exp\left(i \frac{\alpha_k}{2}\right),$$

$$b_k = \frac{s_k}{\sqrt{r_k}} \exp\left(i \left(\beta_k - \frac{\alpha_k}{2}\right)\right),$$

$$c_k = 0,$$

$$d_k = \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\sqrt{r_k}} \exp\left(i \left(-\frac{\alpha_k}{2}\right)\right).$$

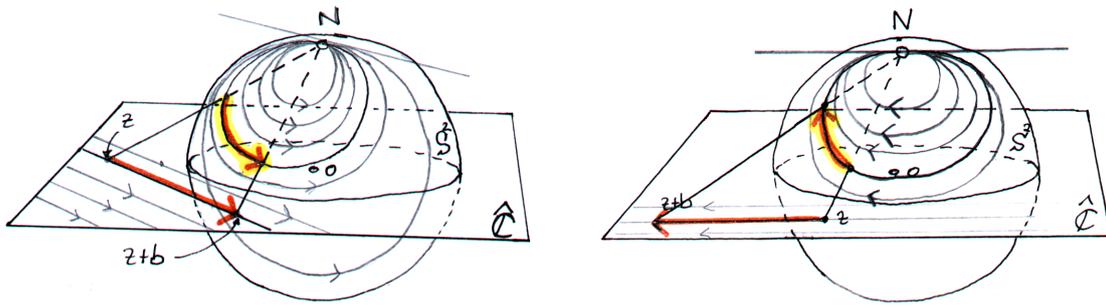
Die Norm von  $\nu_k$  ist gegeben als

$$\|\nu_k\|^2 = \|a_k\|^2 + \|b_k\|^2 + \|c_k\|^2 + \|d_k\|^2 = r_k + \frac{s_k^2}{r_k} + \frac{1}{r_k}.$$

Damit wird (3.21) zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( r_k + \frac{s_k^2}{r_k} + \frac{1}{r_k} \right) = \infty. \quad (3.22)$$

Ich werde von nun an alle Teilfolgen von  $(r_k)_k$  bzw.  $(s_k)_k$  wieder mit  $(r_k)_k$  bzw.  $(s_k)_k$  bezeichnen. Ich unterscheide nun 3 Fälle: Teilfolgen von  $(r_k)_k$ , die gegen  $\infty$ , gegen eine Konstante  $C \neq 0$  oder gegen 0 konvergieren.



**Abbildung 3.7:** Wirkung der Translation  $f(z) = z + b$  auf  $S^2$  für unterschiedliche Vektoren  $b$ .

- (i) Angenommen eine Teilfolge von  $(r_k)_k$  konvergiere gegen  $\infty$ . Dann werden die Breitenkreise der  $S^2$  durch die zur Homothetie korrespondierende Möbiustransformation

$$f_1^k(z) := r_k \exp(i \alpha_k) z$$

für  $k \rightarrow \infty$  auf Breitenkreise immer kleineren Umfangs in Richtung Nordpol abgebildet, denn weil  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ , ist  $r_k > 1$  für  $k$  groß genug (vgl. Abb. 2.3(a) aus §2.2).

Sei  $\omega \subset \mathcal{S}^2$  eine zusammenhängende Menge mit  $p \in \omega$ . Gilt für jedes beliebige Gebiet  $\tilde{\omega} \subset \omega$ , dass

$$\max_{x \in \tilde{\omega}} \|\Phi^k(\tilde{\omega}) - p\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

und

$$\text{area}(\Phi^k(\tilde{\omega})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

mit  $\Phi^k = \Pi^{-1} \circ f^k \circ \Pi \in \text{conf}(S^2)$ , so bezeichne ich diesen Effekt als **Konzentration am Punkt  $p$**  in  $\omega$  bewirkt durch die Möbiustransformation  $f^k$ .

Es kommt also zur Konzentration am Nordpol in  $\omega$ , einer Sphärenkappe um den Nordpol, durch  $f_1^k$ .

Der Winkel  $\alpha_k$  bewirkt lediglich eine Rotation der Sphäre um die vertikale Achse durch ihr Zentrum, und hat somit keinen Einfluss auf den Konzentrationseffekt am Nordpol in  $\omega$  von  $f_1^k$ . Die Translation

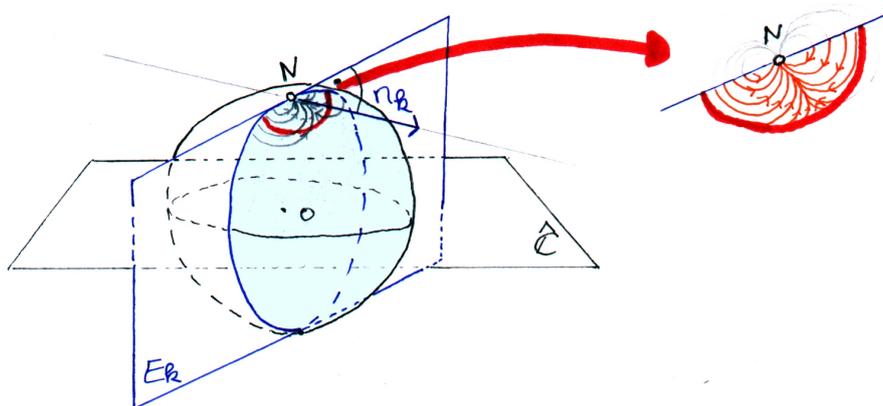
$$f_2^k(z) := z + s_k \exp(i \beta_k)$$

verschiebt die Punkte entlang Kreise auf  $S^2$ , die durch den Nordpol verlaufen, und deren Tangente im Nordpol parallel zur Geraden in  $\hat{\mathbb{C}}$  mit Richtungsvektor  $(s_k \exp(i \beta_k))$  ist (Abb. 2.2(a) aus §2.2 und Abb. 3.7).

Die Folge  $(s_k)_k$  kann nun Häufungspunkte  $\infty$  und  $C \geq 0$  mit einer Konstanten  $C$  besitzen.

Die Komposition

$$f^k(z) := f_2^k \circ f_1^k(z)$$



**Abbildung 3.8:** Die Sphäre wird mit der Ebene  $E_k$  mit Normalenvektor  $n_k$  geschnitten. Man betrachtet die Halbkugel, welche in Richtung  $n_k$  liegt. Im linken Bild ist dies die rechte Halbkugel. Rechts ist die halbe Sphärenkappe um den Nordpol vergrößert dargestellt. Entlang der orangenen Pfeile werden die Punkte durch  $(f_2^k)_k$  verschoben und so der Konzentrationseffekt von  $(f_1^k)_k$  verstärkt.

konzentriert in allen Fällen die Punkte am Nordpol. Dazu schneidet man die Sphäre mit der Ebene

$$E_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(s_k \exp(i \beta_k)) \\ \operatorname{Im}(s_k \exp(i \beta_k)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}$$

und betrachtet die Halbkugel, welche auf der Hälfte in Richtung

$$n_k := \frac{1}{\| (\operatorname{Re}(s_k \exp(i \beta_k)), \operatorname{Im}(s_k \exp(i \beta_k)), 0)^T \|} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(s_k \exp(i \beta_k)) \\ \operatorname{Im}(s_k \exp(i \beta_k)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

der Normalen der Ebene  $E_k$ , liegt. Ich betrachte nun den Schnitt von  $\omega$  mit der betrachteten Halbkugel, und bezeichne diese halbe Sphärenkappe wieder mit  $\omega$ . Konvergiert eine Teilfolge von  $(s_k)_k$  gegen  $C$ , bzw.  $\infty$ , so wird der Konzentrationseffekt von  $f_1^k$  durch  $f_2^k$  am Nordpol in  $\omega$  noch verstärkt (Abb. 3.8). Man beachte, dass Punkte nicht über den Nordpol hinaus verschoben werden. Der Winkel  $\beta_k$  rotiert lediglich die halbe Sphärenkappe, wo Konzentration stattfindet, da er die Richtung, entlang welcher die Punkte zum Nordpol konzentriert werden, ändert (Abb. 3.7).

(ii) Konvergiert eine Teilfolge von  $(r_k)_k$  gegen eine Konstante  $C \neq 0$ , so muss wegen (3.22)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$$

sein.  $(f_1^k)_k$  konvergiert dann bis auf Permutation der Längengrade gegen eine fixierte Homothetie. Die Translation  $(f_2^k)_k$  konzentriert die Punkte wie oben auf der halben Sphärenkappe um den Nordpol, so dass es unter der Komposition  $(f^k)_k$  zur Konzentration am Nordpol kommt.

(iii) Als letzten zu untersuchenden Fall bleiben Teilfolgen von  $(r_k)_k$ , welche gegen 0 konvergieren.

Die Homothetie  $(f_1^k)_k$  bildet dann die Breitenkreise der  $S^2$  für  $k \rightarrow \infty$  auf Breitenkreise immer kleineren Umfangs in Richtung Südpol ab, denn weil  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ , ist  $r_k < 1$  für  $k$  groß genug (Abb. 2.3(b)). Es kommt zum Konzentrationseffekt am Südpol durch  $(f_1^k)_k \cdot (s_k)_k$  kann dann wieder Häufungspunkte  $\infty$  und  $C \geq 0$  besitzen.  $(f_2^k)_k$  verschiebt das Gebiet am Südpol, wo Konzentration statt findet, entlang Kreisen auf der Sphäre in Richtung Nordpol, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = C \geq 0$  ist, und zum Nordpol, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$  ist.

## 2.Fall: $c \neq 0$

Sei  $f(z) = f_\nu(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $ad - bc = 1$ , d.h. es gilt (3.20).

Dann ist in Formel (2.3)  $\mu := \frac{bc-ad}{c} = -\frac{1}{c}$  und

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{1}{(-c^2)z + (-c)d} = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z),$$

wobei

$$f_1(z) = (-c^2)z =: r \exp(i\alpha)z \quad \text{Homothetie und Rotation (Drehstreckung),}$$

$$f_2(z) = z + (-c)d =: z + s \exp(i\beta) \quad \text{Translation,}$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z} \quad \text{Inversion und}$$

$$f_4(z) = z + \frac{a}{c} =: z + t \exp(i\gamma) \quad \text{Translation.}$$

Angenommen  $f$  ist Rotation mit anschließender Inversion, d.h.  $a = d = 0$ ,  $\mathbb{R} \ni r = 1$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann ist

$$f(z) = (f_3 \circ f_1)(z) = \frac{1}{\exp(i\alpha)z} = \frac{b}{cz} = \frac{\cos\left(-\frac{\alpha+3\Pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\alpha+3\Pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\Pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha+\Pi}{2}\right)} z.$$

Man erhält für die Norm der zu  $f$  gehörenden Parameter

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + \|d\|^2 = 0 + 1 + 1 + 0 = 2.$$

Analog zeigt man, dass die Norm der Parameter zu  $f$  zwei ist, wenn  $f$  eine Inversion ist.

Sei  $(\nu_k)_k$  wieder eine Folge von Elementen aus  $\mathcal{A}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \infty.$$

Die zu den einzelnen Folgengliedern  $\nu_k$  korrespondierenden Möbiustransformationen  $\Phi_{\nu_k}$  können wieder nicht ausschließlich aus Inversionen bzw. Rotationen bestehen. Sie müssen ab  $k \geq k^*$  eine bzw. zwei Translationen und bzw. oder eine Homothetie enthalten.

Sei  $\nu_k = (a_k, b_k, c_k, d_k) \in \mathcal{A}$  mit  $c_k \neq 0$  und  $r_k, \alpha_k, s_k, \beta_k, t_k$  und  $\gamma_k$  so gewählt, dass

$$-c_k^2 = r_k \exp(i\alpha_k),$$

$$-c_k d_k = s_k \exp(i\beta_k)$$

und

$$\frac{a_k}{c_k} = t_k \exp(i \gamma_k).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} c_k &= \sqrt{r_k} \exp\left(i \frac{\alpha_k + \pi}{2}\right), \\ d_k &= \frac{s_k}{\sqrt{r_k}} \exp\left(i \left(\beta_k - \frac{\alpha_k + 3\pi}{2}\right)\right), \\ a_k &= \frac{t_k}{\sqrt{r_k}} \exp\left(i \left(\gamma_k - \frac{\alpha_k + \pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Mit (3.20) erhält man

$$b_k = \frac{a_k d_k - 1}{c_k}.$$

Dabei ist

$$a_k d_k = \frac{s_k t_k}{r_k} \exp(i \underbrace{(\beta_k + \gamma_k - \alpha_k)}_{=: \delta_k})$$

und damit

$$a_k d_k - 1 = \frac{s_k t_k}{r_k} \cos(\delta_k) - 1 + i \frac{s_k t_k}{r_k} \sin(\delta_k).$$

Insgesamt erhält man für die Norm von  $b_k$

$$\begin{aligned} \|b_k\|^2 &= \|a_k d_k - 1\|^2 \frac{1}{\|c_k\|^2} \\ &= \left\{ \left( \frac{s_k t_k}{r_k} \cos(\delta_k) - 1 \right)^2 + \frac{s_k^2 t_k^2}{r_k^2} \sin^2(\delta_k) \right\} \frac{1}{r_k} \\ &= \frac{s_k^2 t_k^2}{r_k^3} - 2 \frac{s_k t_k}{r_k^2} \cos(\delta_k) + \frac{1}{r_k}. \end{aligned}$$

Die Norm von  $\nu_k$  ist damit gegeben als

$$\|\nu_k\|^2 = r_k + \frac{s_k^2}{r_k} + \frac{1}{r_k} + \frac{t_k^2}{r_k} + \frac{s_k^2 t_k^2}{r_k^3} - 2 \frac{s_k t_k}{r_k^2} \cos(\delta_k).$$

Konvergiert die Norm der Parameter gegen  $\infty$ , also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( r_k + \frac{s_k^2}{r_k} + \frac{1}{r_k} + \frac{t_k^2}{r_k} + \frac{s_k^2 t_k^2}{r_k^3} - 2 \frac{s_k t_k}{r_k^2} \cos(\delta_k) \right) = \infty, \quad (3.23)$$

so kann  $(r_k)_k$  Häufungspunkte 0 und  $\infty$  besitzen. Teilfolgen von  $(s_k)_k$  können dann gegen  $\infty$  und  $C \geq 0$  konvergieren. In allen 6 Fällen konzentriert die Komposition der Drehstreckung

$$f_1^k(z) := r_k \exp(i \alpha_k) z$$

mit der Translation

$$f_2^k(z) := z + s_k \exp(i \beta_k),$$

also  $(f_2^k \circ f_1^k)$ , wie im ersten Fall ( $c = 0$ ) die Punkte der  $\mathcal{S}^2$  in einem Gebiet  $\omega_0 \subset \mathcal{S}^2$ . Da die Inversion eine Drehung der Sphäre um die reelle Achse mit dem Winkel  $\pi$  induziert, rotiert die Möbiustransformation  $f_3$  lediglich  $\omega_0$ . Die Translation

$$f_4^k(z) := z + t_k \exp(i \gamma_k)$$

verschiebt  $\omega_0$  entlang Kreisen auf der Sphäre, die durch den Nordpol verlaufen, wie oben. Die Komposition

$$f^k(z) := f_4^k \circ f_3 \circ f_2^k \circ f_1^k(z)$$

konzentriert die Punkte der Sphäre in allen Fällen in einem Gebiet  $\omega$ , welches dabei wie oben je nach Wahl von  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  und  $\gamma_k$  auf der Sphäre rotieren kann.

Konvergiert eine Teilfolge von  $(r_k)_k$  gegen  $C \neq 0$ , so muss wegen (3.23) entweder  $(s_k)_k$  oder  $(t_k)_k$  den Häufungspunkt  $\infty$  besitzen.

Ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$ , so konzentriert  $(f_3 \circ f_2^k \circ f_1^k)$  die Punkte der Sphäre in einem Gebiet am Südpol, welches durch  $(f_4^k)_k$  wie oben lediglich verschoben wird.

Hat  $(s_k)_k$  den Häufungspunkt  $C \geq 0$ , so muss  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$  sein.  $(f^k)_k$  konzentriert dann die Punkte auf der halben Sphärenkappe am Nordpol, welche man wie im Fall  $c = 0$  für  $(f_4^k)_k$  konstruiert.

Somit kommt es auch im zweiten Fall zur Konzentration in einem Gebiet  $\omega$ , das auf der Sphäre rotieren kann, bewirkt durch  $(f^k)_k$ .

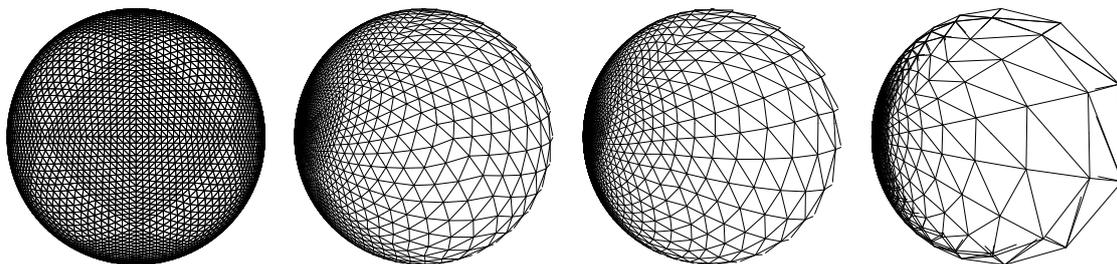
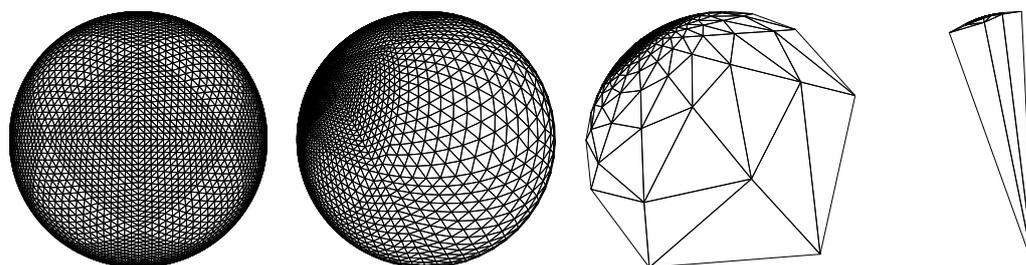
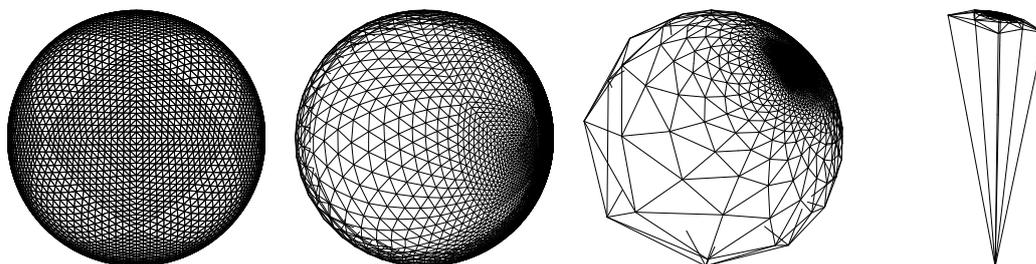
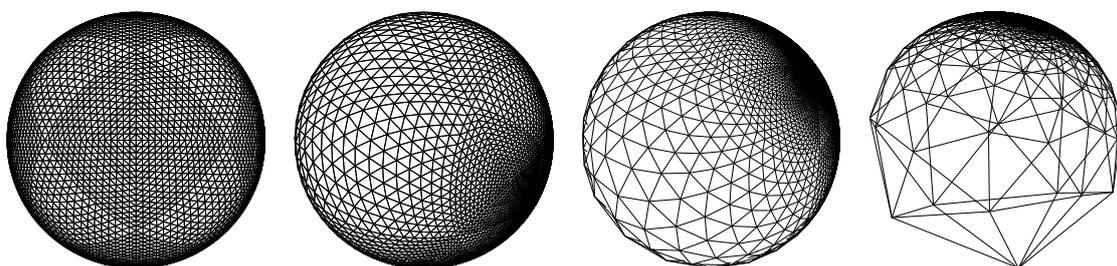
Zu jeder beliebigen Folge von Parametern  $(\nu_k)_k$  in  $\mathcal{A}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \infty$  konzentriert sowohl die Teilfolge von  $(f^k)_k$  mit  $c_k = 0$ , als auch mit  $c_k \neq 0$ , die Punkte der Sphäre. Es gibt also ein Gebiet  $\Omega \subset \mathcal{M}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi_{\nu_k}]^T(p) \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi_{\nu_k}](p)) = 0$$

für  $p \in \Omega$ . Man beachte, dass das Gebiet  $\omega \subset \mathcal{S}^2$ , in dem Konzentration auf der Sphäre statt findet, rotieren kann, und  $\Omega$  immer das Gebiet auf  $\mathcal{M}$  bezeichnet, welches unter  $\mathbf{x}[\Phi_{\nu_k}]$  in  $\omega$  abgebildet wird. Damit erhält man

$$\begin{aligned} E[\nu_k] &\geq \int_{\mathcal{M}} \alpha_a \left( \delta(\nu_k)^{\frac{\tau}{2}} + \beta \delta(\nu_k)^{-\frac{s}{2}} \right) + \alpha_l \tau(\nu_k)^{\frac{p}{2}} \, da \\ &\geq \int_{\Omega} \alpha_a \beta \underbrace{\delta(\nu_k)^{-\frac{s}{2}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty} \, da \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \end{aligned}$$

Damit ist Annahme (3.19) bewiesen. □

(a)  $k = 2, 3, 8$  mit  $f_{\nu_k}(z) = \frac{1}{k} z - \exp(-6.3 i)$ .(b)  $k = 1, 3, 6$  mit  $f_{\nu_k}(z) = \frac{1}{k} z - k$ .(c)  $k = 1, 5, 20$  mit  $f_{\nu_k}(z) = \frac{1}{k+z} + \frac{k}{4}$ .(d)  $k = 0, 1, 5$  mit  $f_{\nu_k}(z) = \frac{1}{z+1} + k$ .

**Abbildung 3.9:** Sphärentriangulierung  $\mathcal{S}_h^2$  mit 4098 Gitterknoten auf  $\mathcal{S}^2$  (linkes Gitter) und das Bild der Gitterknoten unter der Möbiustransformation  $\Phi_{\nu_k} = \Pi^{-1} \circ f_{\nu_k} \circ \Pi$ .

## 4 Diskretisierung und Implementierung

### 4.1 Diskretisierung der Energie

Problem 3.9 wird mit stückweise linearen finiten Elementen diskretisiert, was in [10] von Dziuk entwickelt worden ist. Ich approximiere die zweidimensionale topologische Sphäre  $\mathcal{M}$  durch eine stetige diskrete Fläche

$$\mathcal{M}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T,$$

welche aus Dreiecken  $T$  einer zulässigen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  besteht. Der finite Element-Raum von stückweise linear finiten Elementen auf  $\mathcal{M}_h$  ist definiert als

$$V_h = V_h(\mathcal{M}_h) = \{ \mathbf{x}_h \in C^0(\mathcal{M}_h) \mid \mathbf{x}_h|_T \in \mathcal{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_h \}.$$

Analog ist

$$\mathcal{S}_h^2 = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^*} T$$

eine diskrete Sphäre, welche aus Dreiecken der Triangulierung  $\mathcal{T}_h^*$  mit Knoten auf der  $\mathcal{S}^2$  besteht. Der korrespondierende Raum der stückweise linearen finiten Elemente auf  $\mathcal{S}_h^2$  ist dann

$$V_h^* = V_h(\mathcal{S}_h^2) = \{ \Phi_h \in C^0(\mathcal{S}_h^2) \mid \Phi_h|_T \in \mathcal{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_h^* \}.$$

Für beide Triangulierungen fordere ich, dass sie zulässig im üblichen Sinn sind, d.h der Durchschnitt von zwei (abgeschlossenen) unterschiedlichen Dreiecken ist leer oder besteht aus einer gemeinsamen Ecke oder gemeinsamen Kante. Die Innenwinkel aller Dreiecke sei von unten durch eine gemeinsame Konstante beschränkt. Mit  $h$  bezeichne ich den maximalen Durchmesser eines Dreieckes der Triangulierung. Für mehr Details verweise ich auf [2], Kapitel II.5 und [3], Kapitel 3.

Der finite Element-Raum  $V_h(\mathcal{M}_h)$  wird aufgespannt von den nodalen Basisfunktionen  $\phi_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) für eine Indexmenge, welche zu den Knoten  $a_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) von  $\mathcal{T}_h$ , den Ecken der Dreiecke von  $\mathcal{M}_h$ , korrespondiert. Damit bilden  $\{\phi_{ij}\}_{i=1,2,3; j=1,\dots,N}$  mit  $\phi_{ij} := \phi_j e_i$  eine Basis des diskreten Raumes  $V_h^3$ . Auf jedem Dreieck  $T$  von  $\mathcal{M}_h$  ist der Gradient von  $\phi_{ij}$  und damit auch die diskrete Metrik zur Längen- und Flächenmessung auf  $\mathcal{M}_h$  konstant.

Sei  $T \in \mathcal{T}_h$  ein beliebiges Dreieck mit Ecken  $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^3$ . Mit  $T_{ref} \subset \mathbb{R}^2$  bezeichne ich das Referenzdreieck im  $\mathbb{R}^2$  mit den Ecken  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  und  $(1,0)$ . Dann ist  $\mathbf{X}_{h,T} : T_{ref} \rightarrow T$  mit

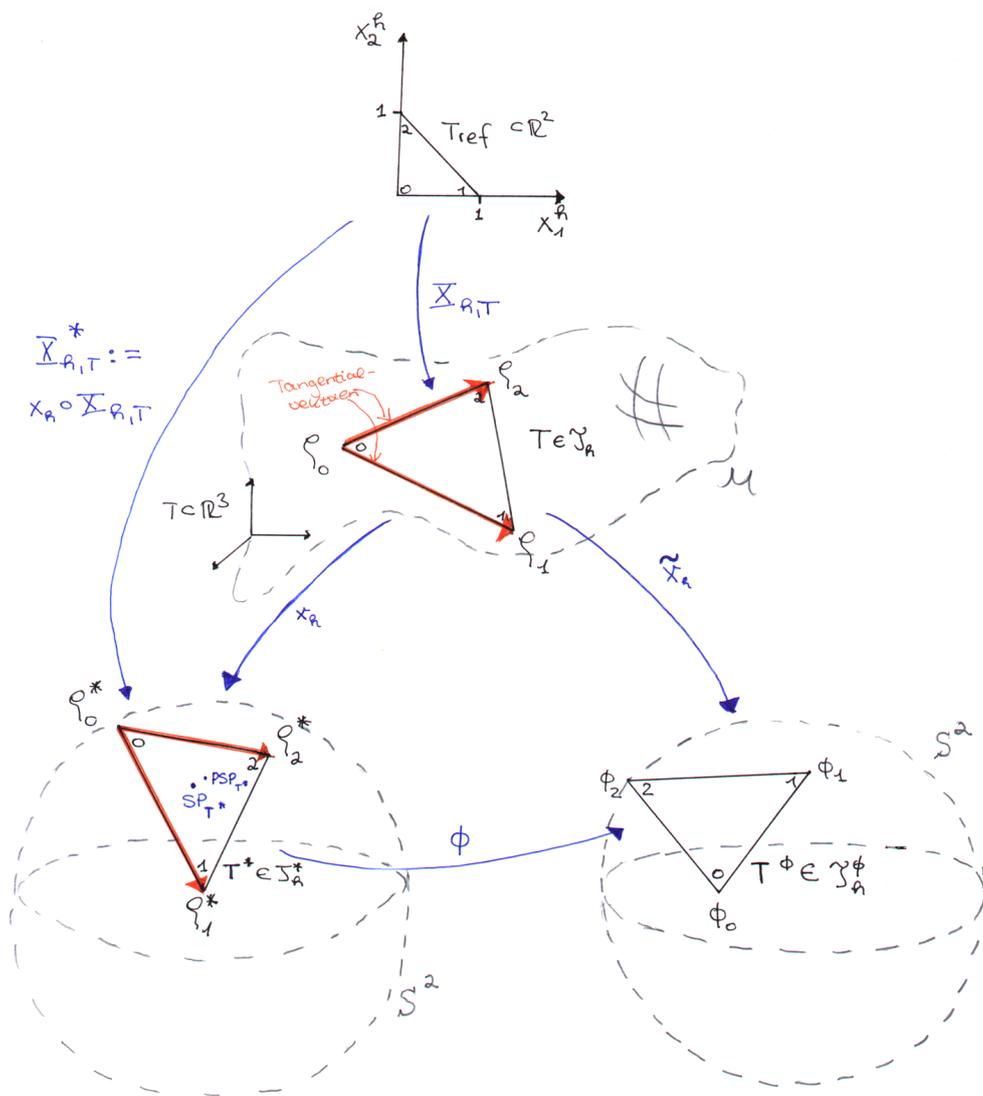
$$\mathbf{X}_{h,T}(x_1^h, x_2^h) = \xi_0 + x_1^h(\xi_1 - \xi_0) + x_2^h(\xi_2 - \xi_0)$$

eine Parametrisierung von  $T$  mit Karte  $T_{ref}$  (vgl. Abb 4.1).

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_i^h} \right\}_{i=1,2} = \{(\xi_1 - \xi_0), (\xi_2 - \xi_0)\}$$

ist eine Basis des Tangentialraumes von  $\mathcal{M}_h$  in  $p \in T$ . Als diskrete Metrik  $g_{h,T}$  von  $\mathcal{M}_h$  definiere ich für  $p \in T$

$$g_{h,T} = D \mathbf{X}_{h,T}^T D \mathbf{X}_{h,T} = (\xi_1 - \xi_0, \xi_2 - \xi_0)^T (\xi_1 - \xi_0, \xi_2 - \xi_0).$$



**Abbildung 4.1:** Beispiel für das diskrete Setting eines Dreiecks.

Sei  $\mathbf{x}_h : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{S}_h^2$  eine diskret konforme Startparametrisierung von  $\mathcal{M}_h$ , welche nach nach [5] als Minimierer des Dirichlet-Integrals im Raum  $V_h^3$  mit Schwerpunkt im Ursprung definiert sind (vgl. Abschnitt 4.3).  $\mathbf{x}_h$  ist in jeder Komponente eine affin lineare Abbildung auf den Dreiecken von  $\mathcal{M}_h$  und global stetig, d.h.  $\mathbf{x}_h \in C^0(\mathcal{M}_h, \mathcal{S}_h^2)$ .

Sei  $T^* \in \mathbb{R}^3$  das Bilddreieck von  $T$  unter der Abbildung  $\mathbf{x}_h$ , d.h.  $\mathbf{x}_h(T) = T^* \in \mathcal{T}_h^*$ . Die Ecken von  $T^*$  bezeichne ich mit  $\xi_i^* = \mathbf{x}_h(\xi_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Es ist  $|\xi_i^*| = 1$ .

Dann ist  $\mathbf{X}_{h,T}^* := \mathbf{x}_h \circ \mathbf{X}_{h,T} : T_{ref} \rightarrow T^*$  gegeben als

$$\mathbf{X}_{h,T}^*(x_1^h, x_2^h) = \xi_0^* + x_1^h(\xi_1^* - \xi_0^*) + x_2^h(\xi_2^* - \xi_0^*)$$

eine Karte von  $T^*$ .

Der tangentielle Gradient von  $\mathbf{x}_h$  besitzt in  $p \in T$  eine Basisdarstellung im Tangentialraum, somit

$$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h = \sum_{j=1,2} v_j \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_j^h}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_h \circ \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_i^h} &= d \mathbf{x}_h \left( \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_i^h} \right) \\ &= \nabla_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x}_h \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_i^h} \\ &= \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_i^h} \\ &= \sum_{j=1,2} v_j \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_j^h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_i^h} \\ &= \sum_{j=1,2} v_j (g_{h,T})_{ji}. \end{aligned}$$

Sei

$$\left( g_{h,T}^{ij} \right)_{ij} = (g_{h,T})^{-1}$$

die Inverse von  $g_{h,T}$ . Dann erhält man

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h &= \sum_{i,j=1,2} g_{h,T}^{ji} \frac{\partial \mathbf{x}_h \circ \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_i^h} \frac{\partial \mathbf{X}_{h,T}}{\partial x_j^h} \\ &= \sum_{i,j=1,2} g_{h,T}^{ji} (\xi_i^* - \xi_0^*) (\xi_j - \xi_0). \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h$  konstant auf  $T$  ist.

Sei  $\Phi = \Phi(\nu)$  ein konformer Diffeomorphismus der Sphäre zu den Parametern  $\nu$  wie in §3.5. Den Endomorphismus  $\underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi$  diskretisiere ich mit einer stückweisen konstanten Funktion  $f_h$  auf  $\mathcal{S}_h^2$  mit

$$f_h|_{T^*} = f_{h,T^*} \in \mathcal{P}_0(T^*), \quad T^* \in \mathcal{T}_h^*,$$

indem ich  $\underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi$  am auf die Sphäre projizierten Schwerpunkt

$$PSP_{T^*} = \frac{\frac{1}{3} (\xi_0^* + \xi_1^* + \xi_2^*)}{\left\| \frac{1}{3} (\xi_0^* + \xi_1^* + \xi_2^*) \right\|}$$

von  $T^*$  auswerte:

$$f_{h,T^*} = (\underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi) (PSP_{T^*}).$$

$\underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi^T \underline{\nabla}_{\mathcal{S}^2} \Phi$  berechne ich wie in den Abschnitten 3.2 und 3.3.

Sowohl die Determinante  $\delta$  als auch die Spur  $\tau$  von  $\underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  werden mit stückweise konstanten Funktionen  $\delta_h$  bzw.  $\tau_h$  auf  $\mathcal{M}_h$  diskretisiert. Mit Lemma 3.3 aus §3.3 erhält man

$$\begin{aligned} \delta_{h,T} &= \delta_h|_T \\ &= \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}_h} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left\{ \text{tr} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h) \right\}^2 - \text{tr} \left( \left\{ \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h \right\}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

und

$$\begin{aligned} \tau_{h,T} &= \tau_h|_T \\ &= \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}_h} (\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Man erhält als diskrete Energie  $E_h$  zur Energiedichte  $W$  wie z.Bsp. in Beispiel 3.7

$$\begin{aligned} E_h[\nu] &= \int_{\mathcal{M}_h} W(\delta_h, \tau_h) \, da_h \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T W(\delta_{h,T}, \tau_{h,T}) \, da_h \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| W(\delta_{h,T}, \tau_{h,T}) \end{aligned}$$

mit

$$|T| = \frac{1}{2} \sqrt{\det(g_{h,T})}.$$

## 4.2 Gradient und Hesse-Matrix der diskreten Energie

### Gradient der Energie

Den Gradient der Energie

$$E[\nu] = \int_{\mathcal{M}} W(\delta, \tau) \, da$$

mit Energiedichte

$$W(\delta, \tau) = W_a(\delta) + W_l(\tau) = \alpha_a \left( \delta^{\frac{r}{2}} + \beta \delta^{-\frac{s}{2}} \right) + \alpha_l \tau^{\frac{p}{2}}$$

wie in Beispiel 3.7 berechnet sich wie folgt:

$$\mathbf{grad} E[\nu] = \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} E[\nu] \right)_{s=1..8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_s} E[\nu] &= \frac{\partial}{\partial \nu_s} \int_{\mathcal{M}} W_a(\delta(\nu)) + W_l(\tau(\nu)) \, da \\ &= \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \{W_a(\delta(\nu))\} + \frac{\partial}{\partial \nu_s} \{W_l(\tau(\nu))\} \, da \\ &= \int_{\mathcal{M}} W'_a(\delta(\nu)) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) \right) + W'_l(\tau(\nu)) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \tau(\nu) \right) \, da \end{aligned}$$

mit

$$W'_a(\delta(\nu)) = \alpha_a \left\{ \frac{r}{2} (\delta(\nu))^{\frac{r}{2}-1} - \beta \frac{s}{2} (\delta(\nu))^{-\frac{s}{2}-1} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) &= \frac{\partial}{\partial \nu_s} \{ \det_{\tau\mathcal{M}} (\underline{\nabla} \mathbf{x}[\Phi]^T \underline{\nabla} \mathbf{x}[\Phi]) \} \\ &\stackrel{\S 3.3}{=} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \{ \text{tr} (\underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x}) \}^2 - \text{tr} (\{ \underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x} \}^2) \right] \right\} \\ &= \text{tr} (\underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \nu_s} \text{tr} (\underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \text{tr} (\{ \underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x} \}^2) \end{aligned}$$

$$W'_l(\tau(\nu)) = \alpha_l \frac{p}{2} \tau(\nu)^{\frac{p}{2}-1}$$

Da  $\nabla \mathbf{x}^T$  und  $\nabla \mathbf{x}$  nicht von  $\nu$  abhängen, gilt für die Ableitungen von  $\tau(\nu)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \tau(\nu) &= \frac{\partial}{\partial \nu_s} \operatorname{tr} \left( \nabla \mathbf{x}^T \nabla \Phi^T \nabla \Phi \nabla \mathbf{x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu_s} \left\{ \sum_{i,k,j} (\nabla \mathbf{x}^T)_{ik} (\nabla \Phi^T \nabla \Phi)_{kj} (\nabla \mathbf{x})_{ji} \right\} \\ &= \sum_{i,k,j} (\nabla \mathbf{x}^T)_{ik} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \left( (\nabla \Phi^T \nabla \Phi)_{kj} \right) (\nabla \mathbf{x})_{ji} \\ &= \operatorname{tr} \left( \nabla \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\nabla \Phi^T \nabla \Phi)_{ij} \right)_{ij} \nabla \mathbf{x} \right) \end{aligned}$$

Für die Ableitung von  $\frac{\partial}{\partial \nu_s} \operatorname{tr} \left( \left\{ \nabla \mathbf{x}^T \nabla \Phi^T \nabla \Phi \nabla \mathbf{x} \right\}^2 \right)$  benötigt man nachfolgendes Lemma:

**Lemma 4.1** Sei  $M = (M_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{d,d}$  mit  $M_{ij} = M_{ij}(\nu_s)$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_s} \operatorname{tr} (M^2) = \operatorname{tr} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} M_{ij} \right)_{ij} M \right) + \operatorname{tr} \left( M \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} M_{ij} \right)_{ij} \right)$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \operatorname{tr} (M^2) &= \frac{\partial}{\partial \nu_s} \operatorname{tr} \left( \left( \sum_k M_{ik} M_{kj} \right)_{ij} \right) = \frac{\partial}{\partial \nu_s} \left( \sum_i \sum_k M_{ik} M_{ki} \right) \\ &= \sum_i \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_s} (M_{ik}) M_{ki} + M_{ik} \frac{\partial}{\partial \nu_s} (M_{ki}) \right\} \\ &= \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial \nu_s} (M_{ik}) M_{ki} + \sum_i \sum_k M_{ik} \frac{\partial}{\partial \nu_s} (M_{ki}) \\ &= \operatorname{tr} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} M_{ij} \right)_{ij} M \right) + \operatorname{tr} \left( M \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} M_{ij} \right)_{ij} \right) \end{aligned}$$

□

Nach Lemma 4.1 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \operatorname{tr} \left( \left\{ \nabla \mathbf{x}^T \nabla \Phi^T \nabla \Phi \nabla \mathbf{x} \right\}^2 \right) &= \\ &\operatorname{tr} \left( \left( \nabla \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\nabla \Phi^T \nabla \Phi)_{ij} \right)_{ij} \nabla \mathbf{x} \right) (\nabla \mathbf{x}^T \nabla \Phi^T \nabla \Phi \nabla \mathbf{x}) \right) \\ &\quad + \operatorname{tr} \left( (\nabla \mathbf{x}^T \nabla \Phi^T \nabla \Phi \nabla \mathbf{x}) \left( \nabla \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\nabla \Phi^T \nabla \Phi)_{ij} \right)_{ij} \nabla \mathbf{x} \right) \right) \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man als Gradient der Energie

$$\mathbf{grad} E[\nu] = \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} E[\nu] \right)_{s=1..8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_s} E[\nu] = \int_{\mathcal{M}} \alpha_a \left\{ \frac{r}{2} (\delta(\nu))^{\frac{r}{2}-1} - \beta \frac{s}{2} (\delta(\nu))^{-\frac{s}{2}-1} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) \right\} + \alpha_l \frac{p}{2} \tau(\nu)^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tr} \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \underline{\nabla} \mathbf{x} \right) \quad \text{da} \quad (4.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) = & \left\{ \operatorname{tr} (\underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x}) \operatorname{tr} \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \underline{\nabla} \mathbf{x} \right) \right. \\ & - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \underline{\nabla} \mathbf{x} \right) (\underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x}) \right) \\ & \left. - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( (\underline{\nabla} \mathbf{x}^T \underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi \underline{\nabla} \mathbf{x}) \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \underline{\nabla} \mathbf{x} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

### Hesse-Matrix der Energie

Die Hesse-Matrix der Energie hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Hess} E[\nu] &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} E[\nu] \right)_{r,s=1..8} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \nu_1 \partial \nu_1} E[\nu] & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \nu_1 \partial \nu_8} E[\nu] \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \nu_8 \partial \nu_1} E[\nu] & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \nu_8 \partial \nu_8} E[\nu] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} E[\nu] &= \frac{\partial}{\partial \nu_r} (\mathbf{grad} E[\nu])_s, r, s = 1..8 \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu_r} \int_{\mathcal{M}} W'_a(\delta(\nu)) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) \right) + W'_l(\tau(\nu)) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \tau(\nu) \right) \text{ da} \\ &= \int_{\mathcal{M}} W''_a(\delta(\nu)) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_r} \delta(\nu) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) \right) + W'_a(\delta(\nu)) \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \delta(\nu) \right) \\ &\quad + W''_l(\tau(\nu)) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_r} \tau(\nu) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \tau(\nu) \right) + W'_l(\tau(\nu)) \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \tau(\nu) \right) \text{ da} \end{aligned}$$

mit

$$W''_a(\delta(\nu)) = \alpha_a \left\{ \frac{r}{2} \left( \frac{r}{2} - 1 \right) \delta(\nu)^{\frac{r}{2}-2} + \beta \frac{s}{2} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \delta(\nu)^{-\frac{s}{2}-2} \right\}$$

$$W''_l(\tau(\nu)) = \alpha_l \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \tau(\nu)^{\frac{p}{2}-2}$$

$W'_a(\delta(\nu))$ ,  $\frac{\partial}{\partial \nu_r} \delta(\nu)$  und  $W'_l(\tau(\nu))$ ,  $\frac{\partial}{\partial \nu_r} \tau(\nu)$  wie oben.

### Diskretisierung des Gradienten und der Hesse-Matrix der Energie

Den Gradient bzw. die Hesse-Matrix diskretisiere ich wie schon in Abschnitt 4.1 beschreiben. Die Ableitungen von  $\underline{\nabla}_{S^2} \Phi^T \underline{\nabla}_{S^2} \Phi$  approximiere ich durch stückweise konstante Funktionen, indem ich sie elementweise an  $PSP_{T^*}$ , dem am auf die Sphäre projizierten Schwerpunkt des jeweiligen Dreiecks  $T^* \in \mathcal{T}_h^*$  auswerte.

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_h E[\nu] &= \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \nu_s} E[\nu] \right]_h \right)_{s=1..8} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \nu_s} E[\nu] \right]_h &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \left\{ W'_a(\delta_{h,T}) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) \right)_{h,T} + W'_l(\tau_{h,T}) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \tau(\nu) \right)_{h,T} \right\} \end{aligned}$$

Wobei die obigen diskreten Größen wie folgt gewählt werden:

$$\delta_{h,T} = \frac{1}{2} \left[ \left\{ \text{tr} \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right) \right\}^2 - \text{tr} \left( \left\{ \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right\}^2 \right) \right],$$

$$\tau_{h,T} = \text{tr} \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right),$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) \right)_{h,T} &= \\ &\left\{ \text{tr} \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right) \text{tr} \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \right]_{h,T} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left( \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \right]_{h,T} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right) \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right) \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \text{tr} \left( \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T f_{h,T^*} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right) \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \right]_{h,T} \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \tau(\nu) \right)_h = \text{tr} \left( \underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \right]_h \underline{\nabla} \mathbf{x}_h \right),$$

$$f_{h,T^*} = (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi) (PSP_{T^*})$$

und

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \right]_h = \left( \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_{ij} \right)_{ij} \right) (PSP_{T^*})$$

Die Hesse-Matrix wird analog diskretisiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{Hess}_h E[\nu] &= \left( \left[ \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} E[\nu] \right]_h \right)_{r,s=1..8} \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} E[\nu] \right]_h &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \left\{ W_a''(\delta_{h,T}) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_r} \delta(\nu) \right)_{h,T} \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta(\nu) \right)_{h,T} \right. \\ &\quad + W_a'(\delta_{h,T}) \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \delta(\nu) \right)_{h,T} \\ &\quad + W_l''(\tau_{h,T}) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_r} \tau(\nu) \right)_{h,T} \left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \tau(\nu) \right)_{h,T} \\ &\quad \left. + W_l'(\tau_{h,T}) \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \tau(\nu) \right)_{h,T} \right\} \text{ da} \end{aligned}$$

Analog zu oben werden  $\left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \delta(\nu) \right)$ ,  $\left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \tau(\nu) \right)$  diskretisiert.

### 4.3 Diskret konforme Startparametrisierung

Sei  $\mathcal{M}$  eine zweidimensionale topologische Sphäre. Gesucht ist ein harmonischer Diffeomorphismus  $\mathbf{x} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$ , d.h. ein Minimierer des Dirichlet-Integrals (vgl. Definition 2.7 aus Abschnitt 2.1)

$$D[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}} \varphi|^2 \, da$$

in  $V$ , wobei  $V = H^1(\mathcal{M}, \mathcal{S}^2) = \{v \in H^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^3) \mid |v| = 1 \text{ f.ü.}\}$ :

$$D[\mathbf{x}] = \min_{\varphi \in V} D[\varphi].$$

Die Lösungen des obigen Problems sind jedoch nicht eindeutig bestimmt, da sie sich um einen konformen Automorphismus der Sphäre unterscheiden können. Die konforme Gruppe  $\text{conf}(\mathcal{S}^2)$  ist determiniert durch 6 reelle Parameter und so erhält man mit Fixierung von drei Punkten die gewünschte Eindeutigkeit (vgl. [8], Seite 233). Ein alternativer und numerisch besser geeigneter Zugang ist eine  $L^2$ -Normalisierung der konformen Gruppe der Sphäre, welche man in [5] findet:

**Satz 4.2** *Sei  $\varphi \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  ein konformer Automorphismus. Dann ist  $\varphi$  die Identität oder eine Rotation um  $\pi$  genau dann, wenn  $M_k(\varphi) = 0$ , ( $k = 0, \dots, 3$ ), wobei*

$$M_0(\varphi) = \int_{\mathcal{S}^2} \varphi(x) \, da,$$

$$M_k(\varphi) = \int_{\mathcal{S}^2} \varphi(x) \cdot Z_k x \, da$$

und  $Z_1, Z_2, Z_3$  ist die kanonische Basis der schief-symmetrischen Matrizen des  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Mit Hilfe dieses Satzes kann man nun das Finden einer eindeutigen harmonischen Abbildung von  $\mathcal{M}$  nach  $\mathcal{S}^2$  so formulieren, dass sich das Problem numerisch lösen lässt:

**Problem 4.3** *Sei  $\mathcal{M}$  eine zweidimensionale Sphäre. Finde einen Minimierer  $\mathbf{x}$  des Dirichle-Integrals in  $X$ , wobei  $X = V / \text{conf}(\mathcal{S}^2) = \{\varphi \in V \mid M_k(\varphi) = 0, k = 0, 1, 2, 3\}$ :*

$$D[\mathbf{x}] = \min_{\varphi \in X} D[\varphi].$$

Problem 4.3 wird wie in § 4.1 mit stückweise linearen finiten Elementen diskretisiert. Um mit den in  $X$  enthaltenen Nebenbedingungen umzugehen, werden Lagrange-Parameter eingeführt (vgl. Satz 4.4). Der von Clarenz und Dziuk [5] entwickelte Algorithmus generiert zur diskreten Fläche  $\mathcal{M}_h$  eine Sphärentriangulierung  $\mathcal{S}_h^2$ , welche konform auf  $\mathcal{M}_h$  bezogen ist.  $\mathbf{x}_h : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{S}_h^2$  ist dann die diskrete Startparametrisierung. Die Sphärentriangulierung bezeichne ich als Parametergebiet.

#### 4.4 Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung

Das Minimierungsproblem 3.9 mit Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \min_{\nu \in \mathbb{R}^8} \quad & E[\nu] \quad \text{mit } E[\nu] = \int_{\mathcal{M}} \widehat{W}(\nu) \, da \\ & \varphi_1(\nu) = 0 \\ & \varphi_2(\nu) = 0 \end{aligned}$$

ist äquivalent zur Minimierung der Lagrange-Energie ohne Nebenbedingung. Dazu benötigt man den nachfolgenden Satz:

**Satz 4.4 (Lagrange-Multiplikatoren.)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offene Menge und  $\varphi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$  seinen Funktionen der Klasse  $C^1(\Omega)$ . Sei  $\nu$  ein Punkt der Menge  $U = \{\nu \in \Omega \mid \varphi_i(\nu) = 0, 1 \leq i \leq m\}$  und  $\{\nabla \varphi_i(\nu), 1 \leq i \leq m\}$  sei linear unabhängig.

Falls  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion ist und in  $\nu$  ein relatives Extremum bezüglich  $U$  besitzt, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen, die Lagrange-Multiplikatoren,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  mit:

$$\nabla E[\nu] + \lambda_1 \nabla \varphi_1(\nu) + \dots + \lambda_m \nabla \varphi_m(\nu) = 0.$$

Den Beweis findet man in [22] Kapitel 43.2.

Die Lagrange-Energie zu  $E$  lautet

$$L[\nu, \lambda] := E[\nu] + \lambda_1 \varphi_1(\nu) + \lambda_2 \varphi_2(\nu) \quad \text{mit } (\nu, \lambda) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^2$$

und gesucht ist nun das Minimum

$$\min_{(\nu, \lambda) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^2} L[\nu, \lambda].$$

Als notwendige Bedingung erhält man

$$\nabla_{(\nu, \lambda)} L[\nu, \lambda] = \begin{pmatrix} \mathbf{grad} E[\nu] + \lambda_1 \nabla \varphi_1(\nu) + \lambda_2 \nabla \varphi_2 \\ \varphi_1(\nu) \\ \varphi_2(\nu) \end{pmatrix} = 0$$

mit  $\mathbf{grad} E[\nu]$  wie in Abschnitt 4.2 und

$$\varphi_1(\nu) = \nu_1 \nu_7 - \nu_2 \nu_8 - \nu_3 \nu_5 + \nu_4 \nu_6 - 1,$$

$$\varphi_2(\nu) = \nu_1 \nu_8 + \nu_2 \nu_7 - \nu_3 \nu_6 - \nu_4 \nu_5,$$

$$\nabla \varphi_1(\nu) = (\nu_7, -\nu_8, -\nu_5, \nu_6, -\nu_3, \nu_4, \nu_1, -\nu_2)^T \text{ und}$$

$$\nabla \varphi_2(\nu) = (\nu_8, \nu_7, -\nu_6, -\nu_5, -\nu_4, -\nu_3, \nu_2, \nu_1)^T$$

Die Hesse-Matrix von  $L$  sieht wie folgt aus:

$$\nabla_{(\nu, \lambda)}^2 L[\nu, \lambda] = \begin{pmatrix} \mathbf{Hess} E[\nu] + \lambda_1 \nabla^2 \varphi_1 + \lambda_2 \nabla^2 \varphi_2 & \nabla \varphi_1 & \nabla \varphi_2 \\ \nabla \varphi_1^T & 0 & 0 \\ \nabla \varphi_2^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\mathbf{Hess} E[\nu]$  wie in Abschnitt 4.2.

Diskret ersetze ich  $\mathbf{grad} E[\nu]$  durch  $\mathbf{grad}_h E[\nu]$  und  $\mathbf{Hess} E[\nu]$  durch  $\mathbf{Hess}_h E[\nu]$  (§ 4.2). Nun habe ich alle Bausteine für ein voll diskretes Newton-Verfahren zusammen. Der Pseudocode lautet:

```

Newton( $\nu, \lambda, \epsilon$ ) {
  do {
     $H = \nabla^2 L[\nu, \lambda], G = \nabla L[\nu, \lambda];$ 
    find  $(w, \mu) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^2$  such that
       $H \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} = -G;$ 
     $\nu = \nu + w;$ 
     $\lambda = \lambda + \mu;$ 
  } while( $\|(w, \mu)\|_{\mathbb{R}^{10}} > \epsilon$ );
}

```

Das Gleichungssystem löse ich mit LU-Zerlegung. Das Newton-Verfahren

$$\begin{pmatrix} \nu_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \nu_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} - (\nabla^2 L[\nu_k, \lambda_k])^{-1} \nabla L[\nu_k, \lambda_k]$$

kann man als verallgemeinertes Gradientenverfahren mit Abstiegsrichtung

$$d_k = (\nabla^2 L[\nu_k, \lambda_k])^{-1} \nabla L[\nu_k, \lambda_k]$$

interpretieren.

Wenn  $L : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und die Hesse-Matrix positiv definit ist, dann gilt

$$d_k^T \nabla L[\nu_k, \lambda_k] = (\nabla L[\nu_k, \lambda_k])^T (\nabla^2 L[\nu_k, \lambda_k])^{-1} \nabla L[\nu_k, \lambda_k] > 0.$$

Somit besitzt  $L$  in  $(\nu_k, \lambda_k)$  eine positive Richtungsableitung in Richtung  $d_k$ . Sei  $x_k := (\nu_k, \lambda_k)$ .

Um die Konvergenz zu verbessern, kann man eine Schrittweitensteuerung einbauen. Man erhält als Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$$

für  $d_k \neq 0$  mit einer Schrittweite  $\alpha_k$ .

#### Lemma 4.5

Für  $d_k \neq 0$  mit  $d_k^T \nabla L[\nu_k, \lambda_k] > 0$  existiert ein  $r > 0$ , so dass für alle  $\alpha \in (0, r]$  gilt:

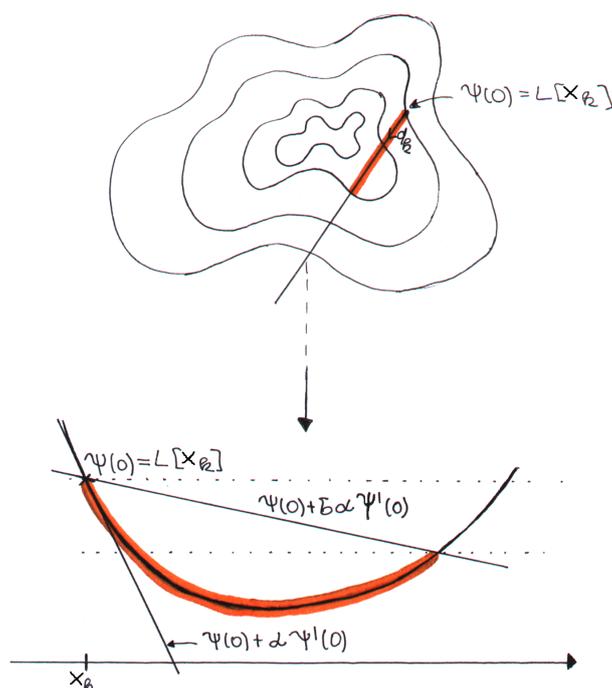
$$L[x_k - \alpha d_k] < L[x_k].$$

#### Beweis

$$0 > -d_k^T \nabla L[\nu_k, \lambda_k] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[x_k - \alpha d_k] - L[x_k]}{\alpha}$$

□

Die Schrittweite  $\alpha_k$  wird mit der Armijoregel mit Aufweitung (ARA) berechnet (vgl. [18] § 4.2.5).



**Abbildung 4.2:** Niveauflächen von  $L$  (oben) und Schnittbild des Graphen  $L$  an der Stelle  $x_k$  in Richtung  $d_k$  (unten).

### Armijoregel

Seien  $\beta, \sigma \in (0, 1)$ . Sei  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi(\alpha) := L[x_k - \alpha d_k]$ .

Gesucht ist  $\alpha > 0$ , so dass für das Verhältnis der Steigung der Sekante von  $\psi$  durch 0 und  $\alpha$  und der Tangentensteigung von  $\psi$  in 0 gilt (Abb. 4.2)

$$\frac{\text{Sekantensteigung}}{\text{Tangentensteigung}} \geq \sigma. \quad (4.4)$$

Die Armijoregel bestimmt die kleinste ganze Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  für die (4.4) gilt:

$$\frac{\psi(0) - \psi(\beta^m)}{\beta^m \psi'(0)} \geq \sigma. \quad (4.5)$$

Wähle  $\alpha_k := \beta^{m_k}$ , wobei  $m_k$  die kleinste ganze Zahl ist für die

$$\begin{aligned} \psi(\beta^{m_k}) &\leq \psi(0) + \sigma \beta^{m_k} \psi'(0) \\ \Leftrightarrow L[x_k - \beta^{m_k} d_k] &\leq L[x_k] - \sigma \beta^{m_k} \langle \nabla L[x_k], d_k \rangle \end{aligned}$$

erfüllt ist, aber für ihren Vorgänger nicht.

Der Algorithmus sieht wie folgt aus:

Ist für 0, d.h. für  $\alpha = \beta^0 = 1$ , die Bedingung erfüllt, so werden solange negative Potenzen getestet bis die Bedingung zum ersten Mal nicht mehr gilt. Der Vorgänger bestimmt dann die Schrittweite. Analoges Vorgehen, wenn die Bedingung für 0 nicht erfüllt ist.

**Satz 4.6 (Realisierbarkeit.)**

Obige Armijoregel ist realisierbar, wenn  $L$  zweimal stetig differenzierbar und die Hesse-Matrix positiv definit ist.

**Beweis**

Seien  $x \in \mathbb{R}^{10}$  und  $d = (\nabla^2 L[x])^{-1} \nabla L[x] \neq 0$  mit  $d^T \nabla L[x] > 0$  und  $\psi(\alpha) := L[x - \alpha d]$ .  
 $\Psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibe das Verhältnis von Sekanten- und Tangentensteigung von  $\psi$  in 0. Nach (4.5) gilt:

$$\Psi(\alpha) := \begin{cases} \frac{L[x] - L[x - \alpha d]}{\alpha \langle \nabla L[x], d \rangle} & \text{für } \alpha > 0, \\ 1 & \text{für } \alpha = 0 \end{cases}$$

$\Psi$  ist stetig in 0, denn  $L$  ist stetig differenzierbar und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Psi(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[x] - L[x - \alpha d]}{\alpha \langle \nabla L[x], d \rangle} = \frac{d^T \nabla L[x]}{\langle \nabla L[x], d \rangle} = 1.$$

Seien  $\sigma, \beta \in (0, 1)$ .

Da  $\Psi$  stetig in 0 und  $\Psi(0) = 1 > \sigma$ , existiert ein  $c > 0$  mit  $\Psi(\alpha) > \sigma$  für alle  $\alpha \in (0, c]$ .

Da  $\beta \in (0, 1)$  ist, existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\beta^m \in (0, c]$ .

**1. Fall** Für die Zahl 0 (d.h.  $\alpha = \beta^0 = 1$ ) ist Bedingung (4.5) nicht erfüllt.

Nach obiger Betrachtung gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  welches (4.5) erfüllt.

**2. Fall** Für die Zahl 0 (d.h.  $\alpha = \beta^0 = 1$ ) ist Bedingung (4.5) erfüllt.

Es werden solange negative Potenzen getestet bis die Bedingung zum ersten Mal nicht mehr gilt.

Angenommen Bedingung (4.5) ist für alle negativen Potenzen erfüllt.

Dann gibt es eine Folge  $\alpha_m := \beta^{-m}$  mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \infty$  und für alle  $m \in \mathbb{N}$  ist

$$\Psi(\alpha_m) = \frac{\psi(0) - \psi(\alpha_m)}{\alpha_m \psi'(0)} \geq \sigma > 0.$$

Sei  $M \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $L[x] \geq M$  für alle  $x \in \mathbb{R}^{10}$ . Dann folgt

$$0 > \Psi(\alpha_m) = \frac{L[x] - L[x - \alpha_m d]}{\alpha_m \langle \nabla L[x], d \rangle} \leq \frac{L[x] - M}{\alpha_m \langle \nabla L[x], d \rangle} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Somit gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi(\alpha_m) = 0 \quad \zeta$$

□

Sei  $x_h : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{S}_h^2$  die Startparametrisierung. Hat man nun mit dem Newtonverfahren optimale Parameter  $\nu \in \mathbb{R}^8$  gefunden, so deformiert man  $\mathcal{S}_h^2$  in eine diskrete Sphäre  $\mathcal{S}_{h, \Phi_\nu}^2$ . Sei  $\Phi_\nu : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  der zu  $\nu$  korrespondierende konforme Diffeomorphismus. Sind  $a_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) die Knoten der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  von  $\mathcal{S}_h^2$ , so besteht die Triangulierung  $\mathcal{T}_h^{\Phi_\nu}$  von  $\mathcal{S}_{h, \Phi_\nu}^2$  aus den Knoten  $\Phi(a_j)$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Die Nachbarschaftsrelationen von  $\mathcal{T}_h^{\Phi_\nu}$  sind die von  $\mathcal{T}_h$ .

## 4.5 Implementationsdetails

Das diskrete nicht-lineare Minimierungsproblem habe ich in c++ mit dem Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung aus Abschnitt 4.4 implementiert. Dabei habe ich die für den diskreten Gradient und für die diskrete Hesse-Matrix benötigten Ableitungen der Determinante und Spur des Verzerrungstensors  $\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  mit Maple 8 berechnen lassen. Maple hat dann aus den Ergebnissen einen c++-Code generiert. Zum Beispiel ist der c++-Code zur Berechnung der diskreten Hesse-Matrix der Determinante auf einem Dreieck  $T$  der Triangulierung von  $\mathcal{M}_h$  aus §4.2

$$\left( \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \delta(\nu) \right)_{h,T} \right)_{r,s=1..8}$$

ungefähr 5500 Zeilen lang und berechnet 4508 lokale Variablen. Dies belegt die Komplexität der Ableitungen von Spur und Determinante.

Wie in Abschnitt 4.1 werden sowohl die Determinante  $\delta$  als auch die Spur  $\tau$  von  $\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]$  mit auf jedem Dreieck  $T$  konstanten Funktionen  $\delta_{h,T}$  bzw.  $\tau_{h,T}$  diskretisiert. Diese habe ich in Maple wie in (4.1) und (4.2) programmiert. Anschließend hat Maple die Ableitungen nach den Parametern  $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$  der Möbiustransformation  $\Phi(x) = \frac{Ax+B}{C \cdot x+D}$ , mit A, B, C und D wie in Satz 2.14, berechnet und den c++-Code generiert:

```
> det:=1/2*(spur)^2-(sum(Verzerrungstensor[k,k],k=1..3));
>
> gradDet:=vector(8);
> gradDet[1]:=diff(det,a1):
> gradDet[2]:=diff(det,a2):
> gradDet[3]:=diff(det,b1):
> gradDet[4]:=diff(det,b2):
> gradDet[5]:=diff(det,c1):
> gradDet[6]:=diff(det,c2):
> gradDet[7]:=diff(det,d1):
> gradDet[8]:=diff(det,d2):
>
> HessDet:=matrix(8,8);
> for i in [1,2,3,4,5,6,7,8] do
> HessDet[1,i]:=diff(gradDet[i],a1):
> HessDet[2,i]:=diff(gradDet[i],a2):
> HessDet[3,i]:=diff(gradDet[i],b1):
> HessDet[4,i]:=diff(gradDet[i],b2):
> HessDet[5,i]:=diff(gradDet[i],c1):
> HessDet[6,i]:=diff(gradDet[i],c2):
> HessDet[7,i]:=diff(gradDet[i],d1):
> HessDet[8,i]:=diff(gradDet[i],d2):
> od:
>
> writeto("HessDetForOneEl.cpp");
> codegen[C](HessDet,'optimized');
> writeto(terminal);
```

Den vollständigen Maple-Quellcode für die Berechnung der Determinante von  $\delta_{h,T}$  findet man im Anschluss. Ein Ausschnitt des c++-Codes ist unten abgedruckt. Das Verhältnis des Beispielcodes

zur Berechnung der einzelnen Variablen aus ein- bis fünfzeiligen Summen und Produkten stimmt mit dem nicht abgedruckten Code überein. Dies belegt, dass die Ableitungen der Determinante und Spur nicht mehr von Hand zu berechnen sind.

Dabei bekommt die nachfolgende Funktion folgende Parameter übergeben:

nu	$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_8) = (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ sind die Parameter der Möbiustransformation $\Phi$ .
x, y, z	Koordinaten des auf die Sphäre projizierten Schwerpunkt des Dreiecks T.
xikdomj	j-te Koordinate des i-ten Knoten $\xi_i$ des Dreiecks $T = [\xi_0, \xi_1, \xi_2]$ .
xikimagej	j-te Koordinate von $\Phi(\xi_i)$ .
HessDet	In HessDet speichert die Funktion die berechnete Hesse-Matrix der Determinante.
DataType	Template-Parameter für double oder float.

```
template <class DataType>
void OptimalReparaSphereType<DataType>::computeHessDetForOneEl
( const aol::Vector<DataType> & nu,
  aol::MultiVector<DataType> & HessDet,
  DataType x, DataType y, DataType z,
  DataType xi0dom1, DataType xi0dom2, DataType xi0dom3,
  DataType xildom1, DataType xildom2, DataType xildom3,
  DataType xi2dom1, DataType xi2dom2, DataType xi2dom3,
  DataType xi0image1, DataType xi0image2, DataType xi0image3,
  DataType xilimage1, DataType xilimage2, DataType xilimage3,
  DataType xi2image1, DataType xi2image2, DataType xi2image3) const{

  DataType t1 = xi2dom1*xi2dom1;
  DataType t2 = xi2dom1*xi0dom1;
  DataType t4 = xi0dom1*xi0dom1;
  DataType t5 = xi2dom2*xi2dom2;
  DataType t6 = xi2dom2*xi0dom2;
  DataType t8 = xi0dom2*xi0dom2;
  ...

  DataType t10692 = t448*t10691;
  DataType t10700 = t6112+t10591-t6109+t6111+t6106-t10594-t10595
    +t6119+t233-t10667*z-t10588*z-t10596*t524;
  DataType t10708 = t7671+t10618-t6156+t7670+t7667-t10620-t10621
    +t6164+t307-t10676*z-t10615*z-t10622*t524;
  DataType t10716 = t215-t7137+t10650-t6206-t7421+t10652+t10653
    -t10655-t10656+t6215+t365-t10685*z-t10647*z
    -t10657*t524;
  DataType t10718 = t10599*t526+2.0*t3434*t3513+t248*t10700+t10625
    *t536+2.0*t3457*t3519+t321*t10708+t10660*t546
    +2.0*t3481*t3525+t379*t10716;
  DataType t10719 = t521*t10718;
  DataType t10721 = t3490*t3490;
  DataType t10723 = t3497*t3497;
  DataType t10725 = t3504*t3504;
  DataType t10727 = t10721+t454*t10671+t10723+t466*t10680+t10725
```

```

+t478*t10689;
DataType t10728 = 2.0*t559*t10727;
DataType t10741 = t10671*t526+2.0*t3490*t3513+t454*t10700+t10680
*t536+2.0*t3497*t3519+t466*t10708+t10689*t546
+2.0*t3504*t3525+t478*t10716;
DataType t10742 = t568*t10741;
DataType t10744 = t3513*t3513;
DataType t10746 = t3519*t3519;
DataType t10748 = t3525*t3525;
DataType t10750 = t10744+t526*t10700+t10746+t536*t10708
+t10748+t546*t10716;
DataType t10751 = 2.0*t581*t10750;
DataType t10754 = t3783*t3783;
DataType t10781 = t3827*t3827;
DataType t10796 = t3851*t3851;
DataType t10799 = t10571+t622*(t10663+2.0*t10692+2.0*t10719+t10728
+2.0*t10742+t10751)-t10754-t920*(t10663+t10692+t10719)-(t178
*t10691+2.0*t448*t10727+t521*t10741)*t930-2.0*t3800*t3795
-t945*(2.0*t448*t10662+t559*t10691+t568*t10718)-(t178*t10718
+t448*t10741+2.0*t521*t10750)*t958-2.0*t3820*t3815-t973*(2.0
*t521*t10662+t568*t10691+t581*t10718)-t10781-t981*(t10692
+t10728+t10742)-(t448*t10718+t559*t10741+2.0*t568*t10750)*t991
-2.0*t3844*t3839-t1006*(t521*t10691+2.0*t568*t10727+t581*t10741)
-t10796-t1014*(t10719+t10742+t10751);
DataType t10802 = -t1496*t1526;
DataType t10804 = 2.0*t627*t10802;
DataType t10805 = -t3413*t1526;
DataType t10807 = 6.0*t640*t10805;
...
DataType t11226 = t4221*t4221;
DataType t11253 = t4265*t4265;
DataType t11268 = t4289*t4289;
DataType t11271 = t11033+t622*(t11135+2.0*t11164+2.0*t11191
+t11200+2.0*t11214+t11223)-t11226-t920*(t11135+t11164+t11191)
-(t178*t11163+2.0*t448*t11199+t521*t11213)*t930-2.0*t4238
*t4233-t945*(2.0*t448*t11134+t559*t11163+t568*t11190)
-(t178*t11190+t448*t11213+2.0*t521*t11222)*t958-2.0*t4258
*t4253-t973*(2.0*t521*t11134+t568*t11163+t581*t11190)-t11253
-t981*(t11164+t11200+t11214)-(t448*t11190+t559*t11213+2.0*t568
*t11222)*t991-2.0*t4282*t4277-t1006*(t521*t11163+2.0*t568
*t11199+t581*t11213)-t11268-t1014*(t11191+t11214+t11223);
HessDet[0][0] = t1017;
HessDet[0][1] = t1487;
HessDet[0][2] = t1990;
HessDet[0][3] = t2468;
...
HessDet[7][3] = t8813;
HessDet[7][4] = t9839;
HessDet[7][5] = t10570;
HessDet[7][6] = t11032;
HessDet[7][7] = t11271;
}

```

**Maple-Quellcode für die Berechnung der Hesse-Matrix von  $\delta_{h,T}$** 

Zuvor noch die Bedeutung der einzelnen Variablen:

A, B, C, D	$\Phi(x) = \frac{Ax+B}{C \cdot x+D}$ zu den Parametern $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ (Satz 2.14)
phi	Möbiustransformation $\Phi$
gradPhi	$\nabla\Phi$ , Gradient von $\Phi$
tgPhi	$\underline{\nabla}_{S^2} \Phi$ , tangentialer Gradient von $\Phi$
quadPhi	$\underline{\nabla}_{S^2} \Phi^T \underline{\nabla}_{S^2} \Phi$
xikdomj	j-te Koordinate des i-ten Konten $\xi_i$ des Dreiecks $T = [\xi_0, \xi_1, \xi_2]$
xikimagej	j-te Koordinate von $\Phi(\xi_i)$
gh	diskrete Metrik $g_{h,T}$ von $\mathcal{M}_h$
ghinv	Inverse von $g_{h,T}$
tgX	$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h$ , tangentialer Gradient von $\mathbf{x}_h$
quadX	$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h$
quadXschlange	$\underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h^T \underline{\nabla}_{\mathcal{M}_h} \mathbf{x}_h \underline{\nabla}_{S^2} \Phi^T \underline{\nabla}_{S^2} \Phi$
energieTerm[1]	$\tau_{h,T}$
energieTerm[2]	$\delta_{h,T}$
gradDet[s]	$\left( \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta \right)_{h,T} = \frac{\partial}{\partial \nu_s} \delta_{h,T}$
HessDet[r][s]	$\left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \delta \right)_{h,T} = \frac{\partial^2}{\partial \nu_r \partial \nu_s} \delta_{h,T}$

```

> restart:
> with(linalg):
>
> A:=matrix(3,3);
> A[1,1]:=a1*d1+b1*c1+a2*d2+b2*c2;
> A[1,2]:=a1*d2+b2*c1-a2*d1-b1*c2;
> A[1,3]:=a1*c1+a2*c2-b1*d1-b2*d2;
> A[2,1]:=a2*d1+b2*c1-a1*d2-b1*c2;
> A[2,2]:=a1*d1-b2*c2+a2*d2-b1*c1;
> A[2,3]:=a2*c1-a1*c2-b2*d1+b1*d2;
> A[3,1]:=a1*b1+a2*b2-c1*d1-c2*d2;
> A[3,2]:=a2*b1-a1*b2-c2*d1+c1*d2;
> A[3,3]:=1/2*(a1*a1+a2*a2-b1*b1-b2*b2-c1*c1-c2*c2+d1*d1+d2*d2);
>
> B:=vector(3);
> B[1]:=a1*c1+a2*c2+b1*d1+b2*d2;
> B[2]:=a2*c1-a1*c2+b2*d1-b1*d2;
> B[3]:=1/2*(a1*a1+a2*a2+b1*b1+b2*b2-c1*c1-c2*c2-d1*d1-d2*d2);
>
> C:=vector(3);
> C[1]:=a1*b1+a2*b2+c1*d1+c2*d2;
> C[2]:=a1*b2-a2*b1+c1*d2-c2*d1;
> C[3]:=1/2*(a1*a1+a2*a2-b1*b1-b2*b2+c1*c1+c2*c2-d1*d1-d2*d2);
>
> D:=1/2*(a1*a1+a2*a2+b1*b1+b2*b2+c1*c1+c2*c2+d1*d1+d2*d2);
>
> x:=vector(3);
> x[1]:=x;x[2]:=y;x[3]:=z;
>
> phi:=vector(3);
> for i in [1,2,3] do
> phi[i]:=(sum(A[i,k]*x[k],k=1..3)+B[i])/(sum(C[k]*x[k],k=1..3)+D):
> od;
>
> gradPhi:=matrix(3,3);
> gradPhi:=jacobian([phi[1],phi[2],phi[3]],[x,y,z]);
>
> tgPhi:=matrix(3,3);
> for i in [1,2,3] do
> for j in [1,2,3] do
> tgPhi[i,j]:=gradPhi[i,j]-(sum(gradPhi[i,k]*x[k]*x[j],k=1..3)):
> od:
> od;
>
> quadPhi:=matrix(3,3);
> for i in [1,2,3] do
> for j in [1,2,3] do
> quadPhi[i,j]:= sum(tgPhi[k,i]*tgPhi[k,j],k=1..3):
> od:
> od;
>
> xi0dom:=vector(3);

```

```

> xi1dom:=vector(3);
> xi2dom:=vector(3);
> xi0image:=vector(3);
> xi1image:=vector(3);
> xi2image:=vector(3);
> xi0dom[1]:=xi0dom1;xi0dom[2]:=xi0dom2;xi0dom[3]:=xi0dom3;
> xi1dom[1]:=xi1dom1;xi1dom[2]:=xi1dom2;xi1dom[3]:=xi1dom3;
> xi2dom[1]:=xi2dom1;xi2dom[2]:=xi2dom2;xi2dom[3]:=xi2dom3;
> xi0image[1]:=xi0image1;xi0image[2]:=xi0image2;xi0image[3]:=xi0image3;
> xi1image[1]:=xi1image1;xi1image[2]:=xi1image2;xi1image[3]:=xi1image3;
> xi2image[1]:=xi2image1;xi2image[2]:=xi2image2;xi2image[3]:=xi2image3;
>
> gh:=matrix(2,2);
> gh[1,1]:=sum((xi1dom[k]-xi0dom[k])*(xi1dom[k]-xi0dom[k]),k=1..3);
> gh[1,2]:=sum((xi1dom[k]-xi0dom[k])*(xi2dom[k]-xi0dom[k]),k=1..3);
> gh[2,1]:=gh[1,2];
> gh[2,2]:=sum((xi2dom[k]-xi0dom[k])*(xi2dom[k]-xi0dom[k]),k=1..3);
> ghinv:=inverse(gh);
>
> tgX:=matrix(3,3);
> for i in [1,2,3] do
> for j in [1,2,3] do
> tgX[i,j]:=ghinv[1,1]*(xi1image[i]-xi0image[i])*(xi1dom[j]-xi0dom[j])+
      ghinv[1,2]*(xi2image[i]-xi0image[i])*(xi1dom[j]-xi0dom[j])+
      ghinv[2,1]*(xi1image[i]-xi0image[i])*(xi2dom[j]-xi0dom[j])+
      ghinv[2,2]*(xi2image[i]-xi0image[i])*(xi2dom[j]-xi0dom[j]):
> od:
> od;
>
> quadX:=matrix(3,3);
> for i in [1,2,3] do
> for j in [1,2,3] do
> quadX[i,j]:= sum(tgX[i,k]*tgX[j,k],k=1..3):
> od:
> od;
>
> quadXschlange:=matrix(3,3);
> for i in [1,2,3] do
> for j in [1,2,3] do
> quadXschlange[i,j]:= sum(quadX[i,k]*quadPhi[k,j],k=1..3):
> od:
> od;
>
> quadXschlangeQuad:=matrix(3,3);
> for i in [1,2,3] do
> for j in [1,2,3] do
> quadXschlangeQuad[i,j]:= sum(quadXschlange[i,k]*quadXschlange[k,j],
      k=1..3):
> od:
> od;
>
> energieTerm:=vector(2);

```

```
> energieTerm[1]:=sum(quadXschlange[k,k],k=1..3);
> energieTerm[2]:=1/2*((energieTerm[1])^2-(sum(quadXschlangeQuad[k,k],
      k=1..3)));
>
> gradDet:=vector(8);
> gradDet[1]:=diff(energieTerm[2],a1):
> gradDet[2]:=diff(energieTerm[2],a2):
> gradDet[3]:=diff(energieTerm[2],b1):
> gradDet[4]:=diff(energieTerm[2],b2):
> gradDet[5]:=diff(energieTerm[2],c1):
> gradDet[6]:=diff(energieTerm[2],c2):
> gradDet[7]:=diff(energieTerm[2],d1):
> gradDet[8]:=diff(energieTerm[2],d2):
>
> HessDet:=matrix(8,8);
> for i in [1,2,3,4,5,6,7,8] do
> HessDet[1,i]:=diff(gradDet[i],a1):
> HessDet[2,i]:=diff(gradDet[i],a2):
> HessDet[3,i]:=diff(gradDet[i],b1):
> HessDet[4,i]:=diff(gradDet[i],b2):
> HessDet[5,i]:=diff(gradDet[i],c1):
> HessDet[6,i]:=diff(gradDet[i],c2):
> HessDet[7,i]:=diff(gradDet[i],d1):
> HessDet[8,i]:=diff(gradDet[i],d2):
> od:
>
> writeto("HessDetForOneEl.cpp");
> codegen[C](HessDet,'optimized');
> writeto(terminal);
>
>
```

EOC zur Ei-Fläche (Abb. 4.3)						EOC zur Pilz-Fläche (Abb. 4.5)						
$k$	1	2	3	4	5	$k$	3	4	5	6	7	8
EOC	1.3	1.43	1.66	2.13	2.55	EOC	1.39	1.59	2.01	2.62	2.39	2.72
$k^{\max}$	10					$k^{\max}$	13					

EOC zur Hantel-Fläche (Abb. 4.9)								
$k$	5	6	7	8	9	10	11	12
EOC	1.0	1.0	1.01	1.06	1.35	2.27	2.89	2.46
$k^{\max}$	16							

**Tabelle 4.1:** Experimentelle Konvergenzraten zu verschiedenen Flächen

$k$	$\alpha_k$	$E[\nu_k]$
0		2214785829652
1	1	814337819701
3	1	110481930364
5	1	15027940408
7	1	2311901071
9	1	1315165932
11	0.25	1311456098
13	2.27e-13	1308389753

**Tabelle 4.2:** Energie und Schrittweiten zur unsymmetrischen Pilz-Fläche (vgl. Abb. 4.7)

## 4.6 Numerische Ergebnisse

Wie in den Abbildungen 4.3, 4.5, 4.7 und 4.9 dargestellt, optimiere ich Flächenparametrisierungen mit dem Newton-Verfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung zu den Parametern  $\sigma = \beta = 0.25$ . Dabei skaliere ich numerisch die Fläche  $\mathcal{M}_h$  zunächst, so dass  $\text{vol}(\mathcal{M}_h) = \text{vol}(\mathcal{S}_h^2)$ , und wähle als Energiedichte

$$W(\delta_h, \tau_h) = \delta_h + \frac{13}{3}\delta_h^{-3} + \tau_h^3.$$

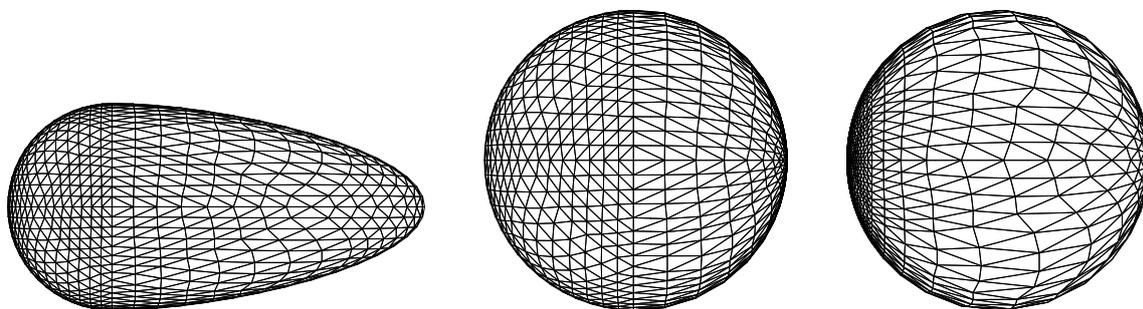
Die Konvergenzordnung habe ich experimentell wie folgt ermittelt:

Sei  $\mathbf{x}_k := (\nu_k, \lambda_k)$  die  $k$ -te Iterierte und  $\mathbf{x}^* := \mathbf{x}_{k^{\max}}$  die Lösung des Newtonverfahren ( $k^{\max}$  = Anzahl der benötigten Iterationen). Der experimentelle Konvergenzexponent EOC (= experimental order of convergence) ist definiert als

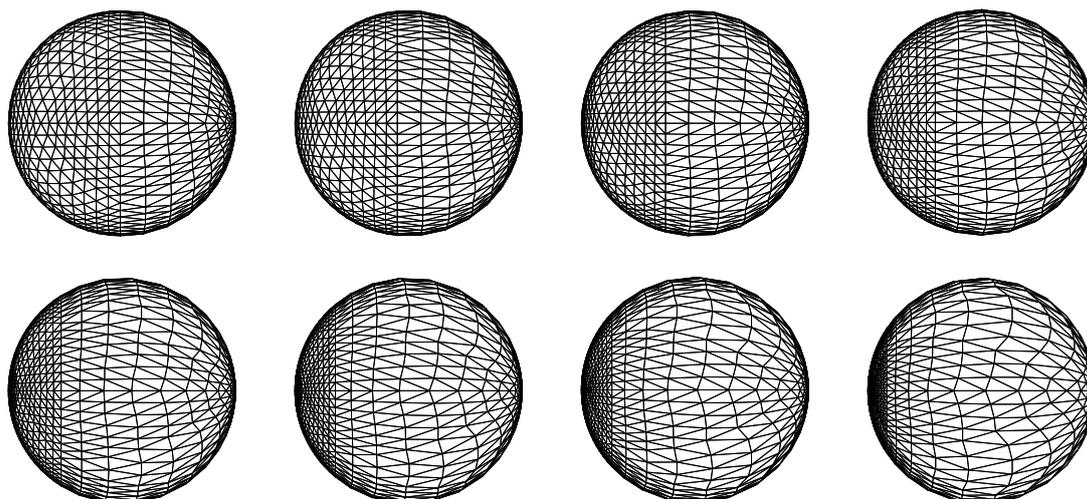
$$\text{EOC} := \frac{\ln(\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|) - \ln(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|)}{\ln(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|) - \ln(\|\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}^*\|)}.$$

Die in Tabelle 4.1 zusammengefassten experimentellen Ergebnisse belegen die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahren.

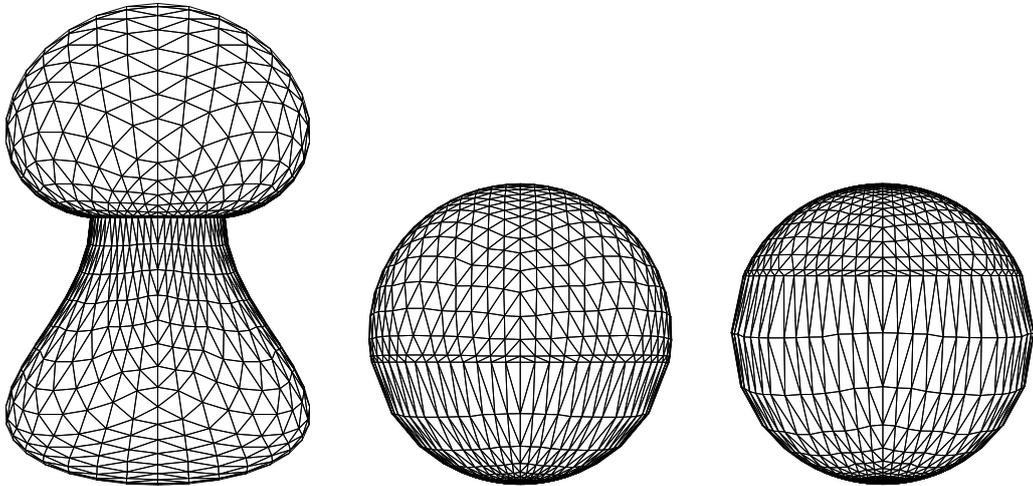
### Ei-Fläche



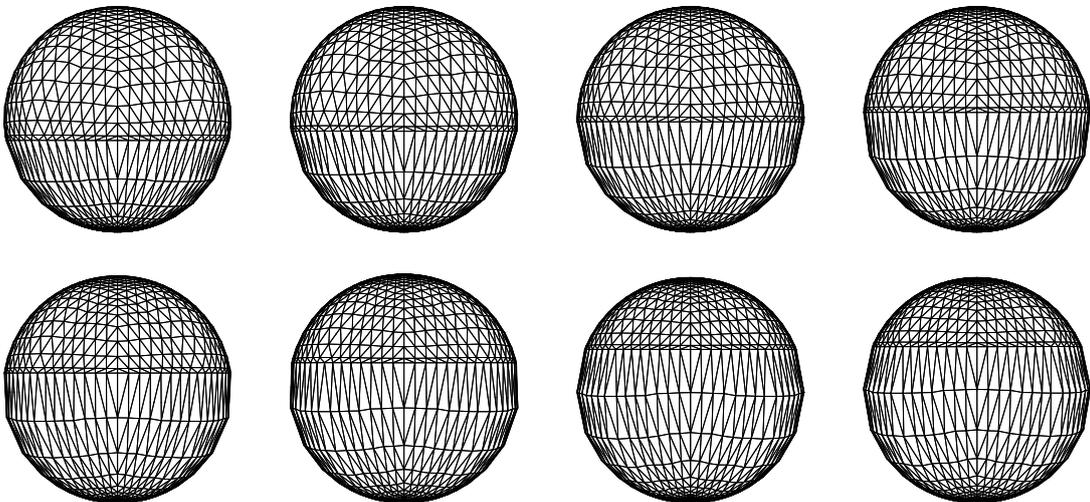
**Abbildung 4.3:** Ei-Fläche (links) mit Startparametrisierung und Ergebnis des Newtonverfahrens (rechts) mit Armijo-Schrittweitensteuerung ( $\sigma = \beta = 0.25$ ).  
Energiedichte  $W(\delta, \tau) = \delta + \frac{13}{3}\delta^3 + \tau^3$ . Anzahl der Dreiecke 2048.



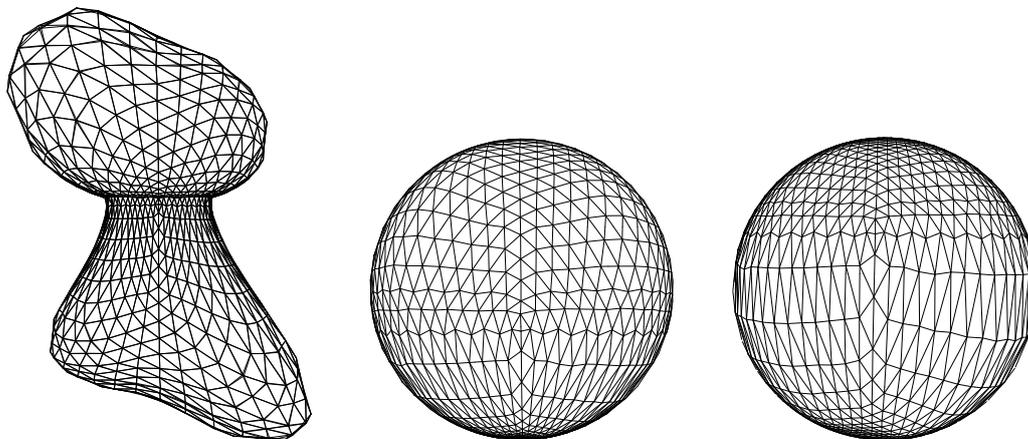
**Abbildung 4.4:** Familie der Iterierten (von oben links nach unten rechts) zur Ei-Fläche für die Zeitschritte  $k=0,1,3,5,7,8,9,10$ . Der Algorithmus optimiert die Parametrisierung durch Vergrößerung der Dreiecke im Parametergebiet, welche durch die Startparametrisierung auf die Eispitze abgebildet werden. Es kommt jedoch gleichzeitig zur Kompression der Dreiecke am gegenüberliegenden Pol. Die Parametergebiete zur Startparametrisierung und zur optimalen Parametrisierung sind in Abbildung 6.1 nochmal aus verschiedenen Perspektiven dargestellt.

**Pilz-Fläche**

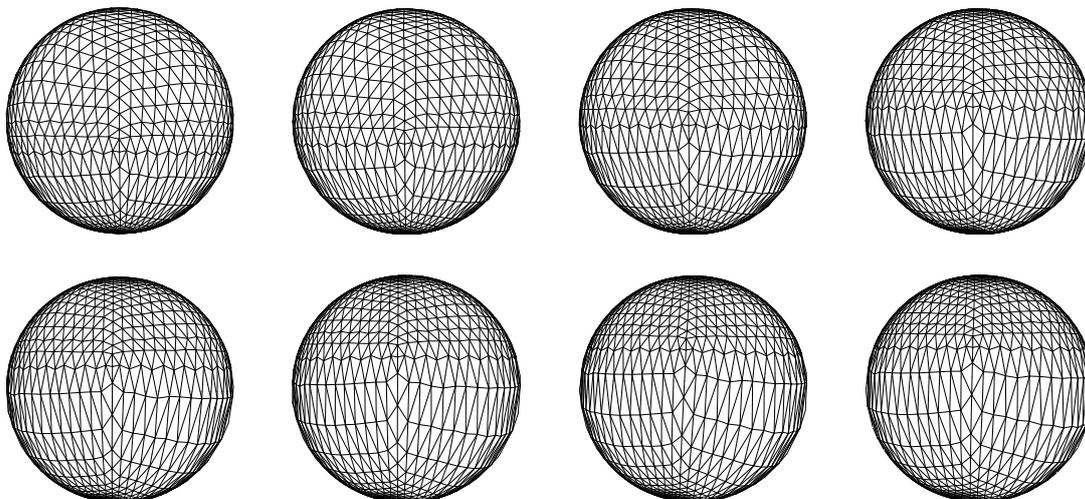
**Abbildung 4.5:** Pilz-Fläche (links) mit Startparametrisierung und Ergebnis des Newtonverfahren (rechts) mit Armijo-Schrittweitensteuerung ( $\sigma = \beta = 0.25$ ).  
Energiedichte  $W(\delta, \tau) = \delta + \frac{13}{3}\delta^3 + \tau^3$ . Anzahl der Dreiecke 2048.



**Abbildung 4.6:** Familie der Iterierten (von oben links nach unten rechts) zur Pilz-Fläche für die Zeitschritte  $k=0,1,3,5,7,9,11,13$ .

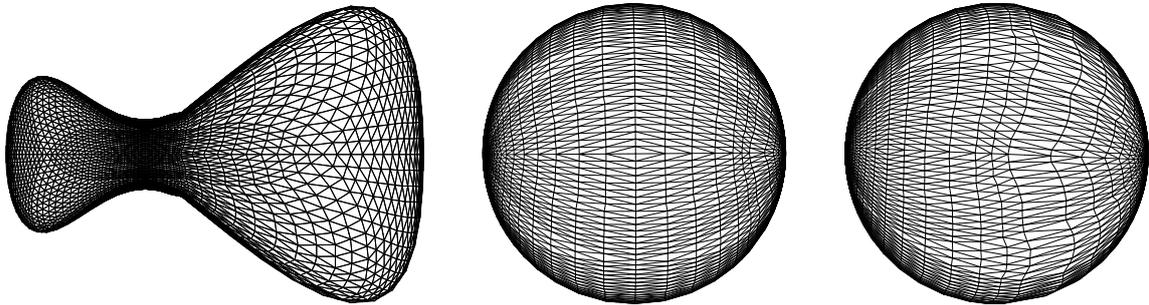
**Unsymmetrische Pilz-Fläche**

**Abbildung 4.7:** Pilz-Fläche (links) mit Startparametrisierung und Ergebnis des Newtonverfahren (rechts) mit Armijo-Schrittweitensteuerung ( $\sigma = \beta = 0.25$ ).  
Energiedichte  $W(\delta, \tau) = \delta + \frac{13}{3}\delta^3 + \tau^3$ . Anzahl der Dreiecke 2048.

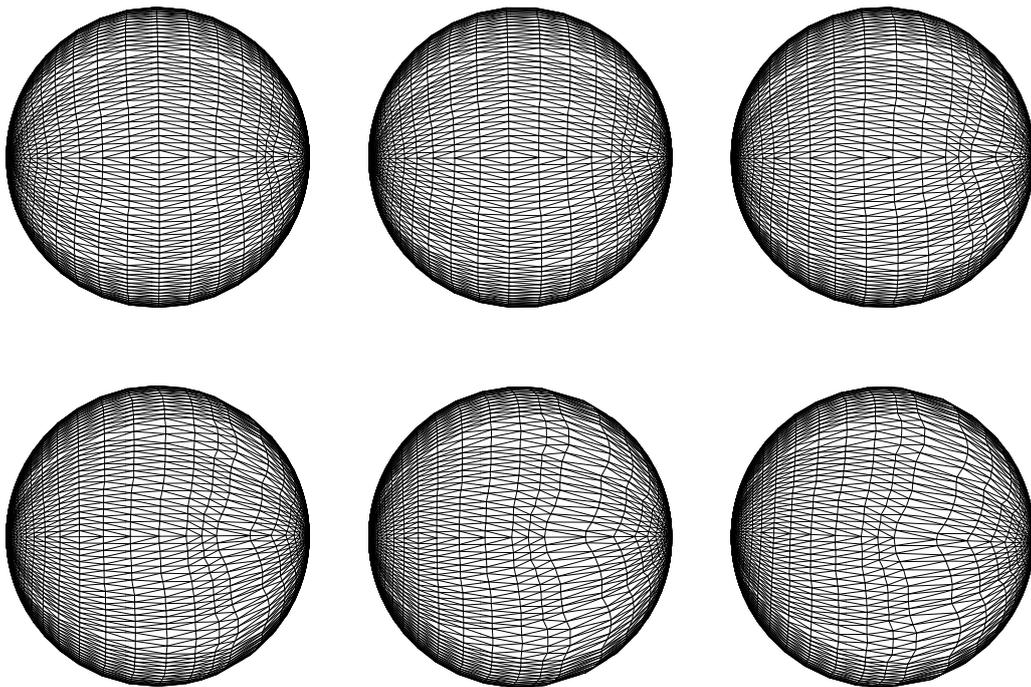


**Abbildung 4.8:** Familie der Iterierten (von oben links nach unten rechts) zur unsymmetrischen Pilz-Fläche für die Zeitschritte  $k=0,1,3,5,7,9,11,13$ .

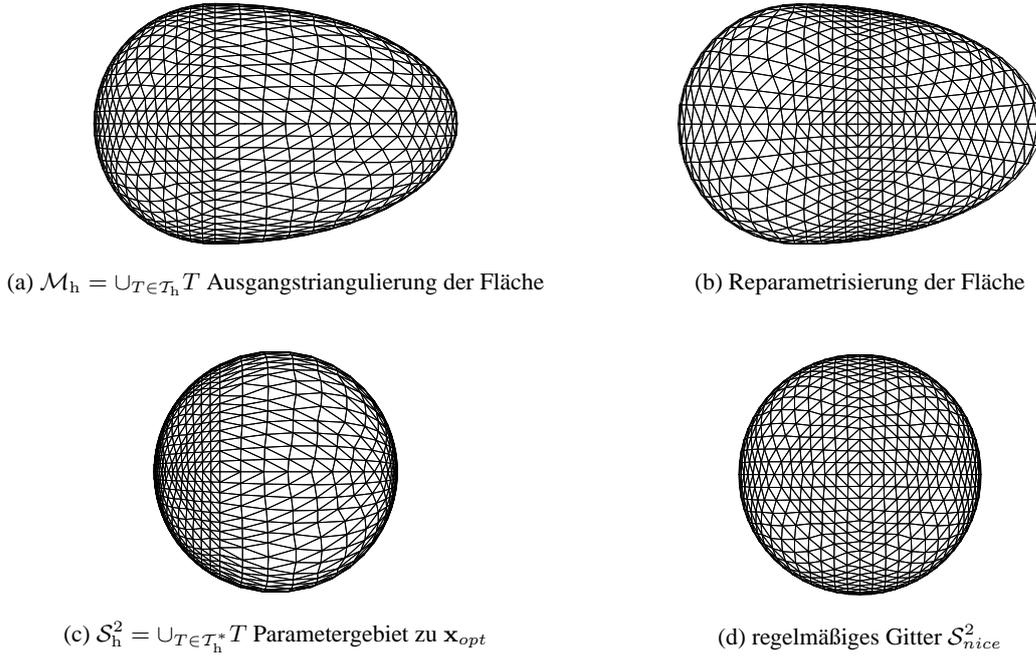
### Hantel-Fläche



**Abbildung 4.9:** Hantel-Fläche (links) mit Startparametrisierung und Ergebnis des Newtonverfahren (rechts) mit Armijo-Schrittweitensteuerung ( $\sigma = \beta = 0.25$ ).  
Energiedichte  $W(\delta, \tau) = \delta + \frac{13}{3}\delta^3 + \tau^3$ . Anzahl der Dreiecke 8192.



**Abbildung 4.10:** Familie der Iterierten (von oben links nach unten rechts) zur Hantel-Fläche für die Zeitschritte  $k=0,1,4,7,10,16$ .



**Abbildung 5.1:** Das regelmäßige Gitter (d) wird mittels der konform auf die Fläche  $\mathcal{M}_h$  bezogene Sphäre (c) auf  $\mathcal{M}_h$  projiziert. Abbildung (b) zeigt das Ergebnis.

## 5 Gitteroptimierung via optimaler konformer Parametrisierung

Man möchte die Qualität der Triangulierung einer Fläche

$$\mathcal{M}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

verbessern (Abb. 5.1(a)). Dazu berechnet man eine konforme Parametrisierung  $\mathbf{x}_{opt} = \mathbf{x}_h \circ \Phi_{opt}$ , wobei  $\Phi_{opt} \in \text{conf}(\mathcal{S}^2)$  Minimierer der Energie  $E$  aus den vorigen Kapiteln ist. Die so erhaltene konform auf die Fläche  $\mathcal{M}_h$  bezogene Sphäre

$$\mathcal{S}_h^2 = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^*} T$$

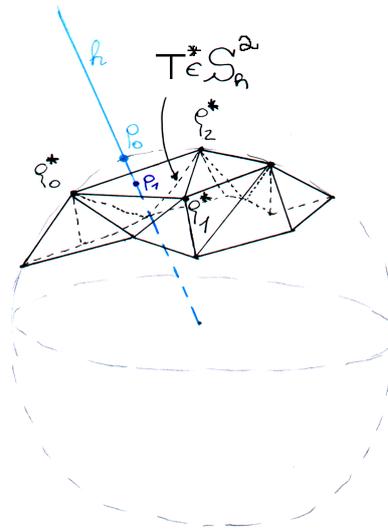
(Parametergebiet zur Parametrisierung  $\mathbf{x}_{opt}$ , Abb. 5.1(c)) benutzt man, um eine regelmäßige Sphärentriangulierung  $\mathcal{S}_{nice}^2$  (Abb. 5.1(d)) auf die Fläche  $\mathcal{M}_h$  zu projizieren. Abbildung 5.1(b) zeigt das Ergebnis einer Reparametrisierung.

Jeder Knoten  $p_0$  der Sphärentriangulierung  $\mathcal{S}_{nice}^2$  wird wie folgt auf  $\mathcal{M}_h$  projiziert:

Man sucht das Dreieck  $T^* \in \mathcal{T}_h^*$  der Sphäre  $\mathcal{S}_h^2$ , welches den Halbstrahl

$$h = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mu > 0, \mu \in \mathbb{R} : x = \mu p_0\}$$

schneidet (Abb. 5.2). Seien  $\xi_0^*$ ,  $\xi_1^*$  und  $\xi_2^*$  die Knoten des Dreiecks  $T^*$  und  $p_1$  der Schnittpunkt von



**Abbildung 5.2:**  $p_1 =$  Projektion von  $p_0$  auf  $S_h^2$

$h$  mit der Ebene

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \nu \cdot x = \xi_0^* \cdot \nu\},$$

in welcher das Dreieck  $T^*$  liegt.

$$\nu = \frac{(\xi_1^* - \xi_0^*) \times (\xi_2^* - \xi_0^*)}{\|(\xi_1^* - \xi_0^*) \times (\xi_2^* - \xi_0^*)\|}$$

bezeichnet die Flächennormale an das Dreieck  $T^*$ . Es ist

$$p_1 = \frac{\nu \cdot \xi_0^*}{\nu \cdot p_0} p_0.$$

Sind die baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  von  $p_1$  positiv und kleiner oder gleich 1, so liegt  $p_1$  im Dreieck  $T^*$ . Dabei ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = g_{h,T^*}^{-1}(p_1 - \xi_0^*)$$

mit der diskreten Metrik

$$g_{h,T^*} := (\xi_1^* - \xi_0^*, \xi_2^* - \xi_0^*)^T (\xi_1^* - \xi_0^*, \xi_2^* - \xi_0^*)$$

und

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

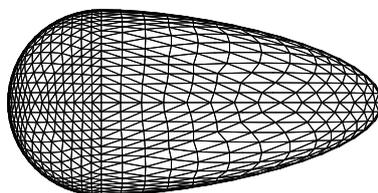
Zu  $T^* \in \mathcal{T}_h^*$  korrespondiert nun mittels der Parametrisierung  $x_{opt}$  ein Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$  der Triangulierung von  $\mathcal{M}_h$ . Seien  $\xi_0$ ,  $\xi_1$  und  $\xi_2$  die Knoten von  $T$ . Man berechnet die Projektion von  $p_1$  auf  $\mathcal{M}_h$ , indem man die baryzentrischen Koordinaten  $\lambda$  benutzt:

$$p_2 := \lambda_0 \xi_0 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2$$

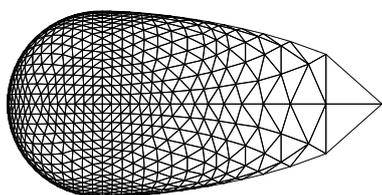
Die neue Triangulierung besteht aus allen auf  $\mathcal{M}_h$  projizierten Knoten des regelmäßigen Gitters  $\mathcal{S}_{nice}^2$ . Die Nachbarschaftsrelationen der Dreiecke der neuen Triangulierung sind die von  $\mathcal{S}_{nice}^2$ .

## 5.1 Beispiele von Reparametrisierungen

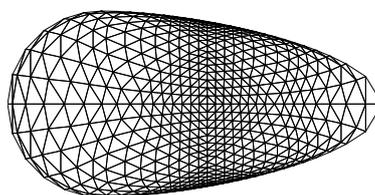
### Ei-Fläche



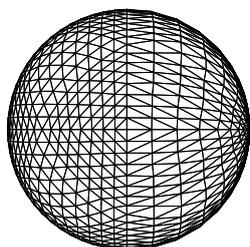
(a)  $\mathcal{M}_h$  = Ausgangstriangulierung der Ei-Fläche aus § 4.6, entstanden durch Streckung der x-Koordinate der Kugel in Abb. 5.1(d) ( $x \mapsto 2x + x^2$ , für  $x > 0$ ).



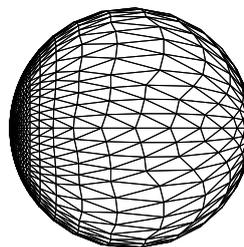
(b) Zum Vergleich die Reparametrisierung von  $\mathcal{M}_h$  mittels konformer Ausgangsparametrisierung (d).



(c) Reparametrisierung von  $\mathcal{M}_h$  mittels optimaler Parametrisierung (e).  $S_{nice}^2$  wie in Abb. 5.1(d).



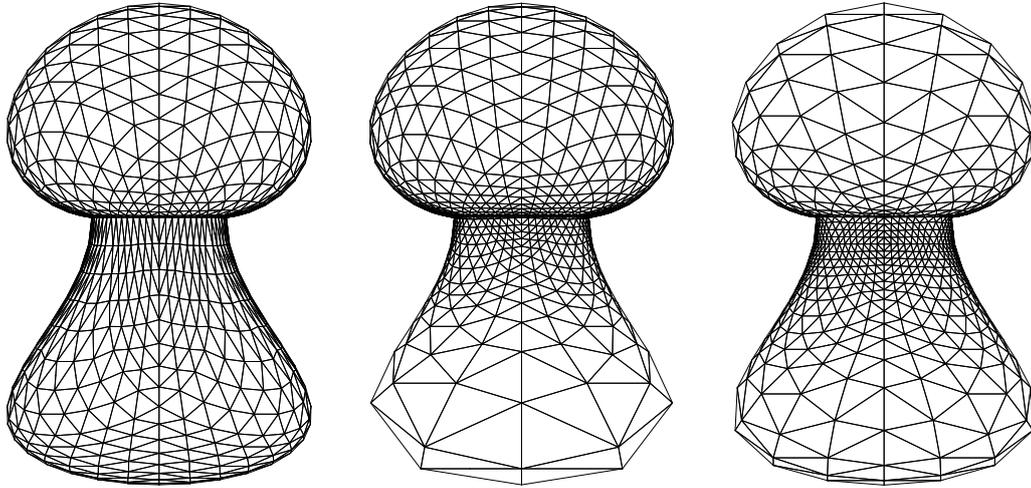
(d) Konforme Ausgangsparametrisierung. Die Parametergebiete sind in Abb. 6.1 nochmal aus verschiedenen Perspektiven dargestellt.



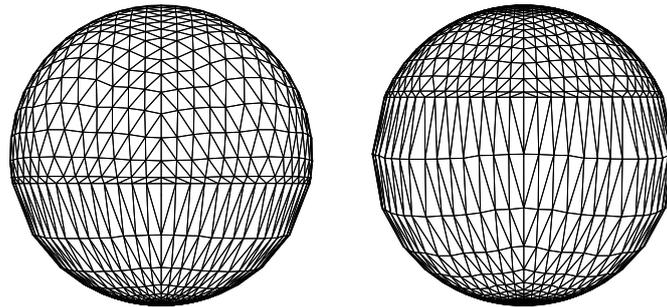
(e) Parametergebiet zu  $\mathbf{x}_{opt}$ , der Lösung des Gradientenverfahrens zur Startparametrisierung (d) mit Energiedichte  $W(\delta, \tau) = \delta + \frac{13}{3}\delta^{-3} + \tau^3$ .

**Abbildung 5.3:** Reparametrisierung der Ei-Fläche.

Die Dreiecke sind bei der Reparametrisierung bezüglich der optimalen Parametrisierung (Abb. 5.3 (c)) gleichmäßiger auf der Fläche verteilt, und es kommt nicht zu extrem großen Dreiecken an der Eispitze wie in Abbildung 5.3 (b), der Reparametrisierung bezüglich der Startparametrisierung. Die Dreiecke der Reparametrisierung sind in allen Beispielen nicht so spitz wie in der Ausgangsparametrisierung und verbessern so die Qualität der Triangulierung einer Fläche.

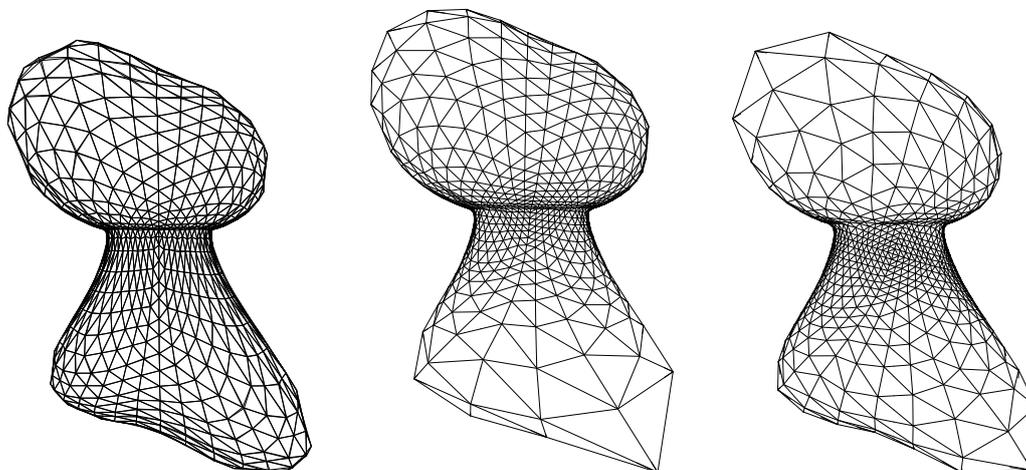
**Pilz-Fläche**

(a)  $\mathcal{M}_h$  = Ausgangstriangulierung der Pilz-Fläche (vgl. § 4.6) (links).  
Der rechte Pilz zeigt die Reparametrisierung mittels optimaler Parametrisierung. Zum Vergleich sieht man in der Mitte die Reparametrisierung mittels Startparametrisierung.

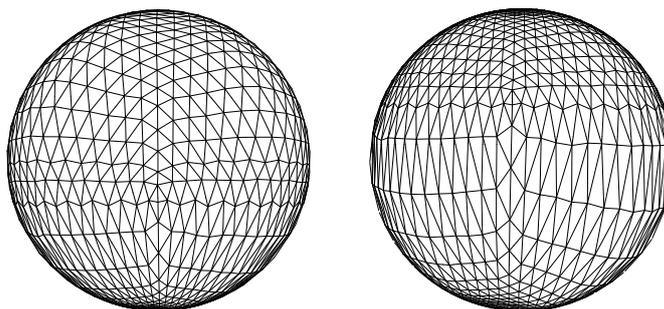


(b) Parametergebiete zur Startparametrisierung (links) und zur optimalen Parametrisierung (rechts).

**Abbildung 5.4:** Reparametrisierung der Pilz-Fläche.

**Unsymmetrische Pilz-Fläche**

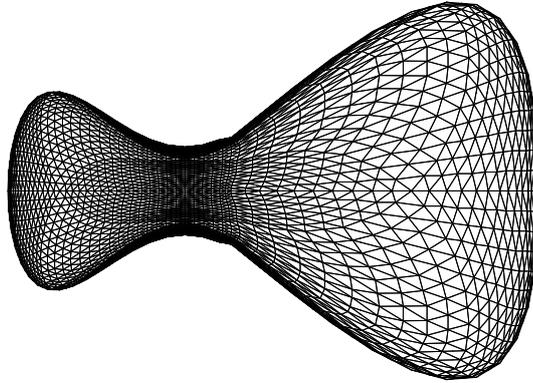
(a)  $\mathcal{M}_h$  = Ausgangstriangulierung der Pilz-Fläche (vgl. § 4.6) (links).  
Der rechte Pilz zeigt die Reparametrisierung mittels optimaler Parametrisierung. Zum Vergleich sieht man in der Mitte die Reparametrisierung mittels Startparametrisierung.



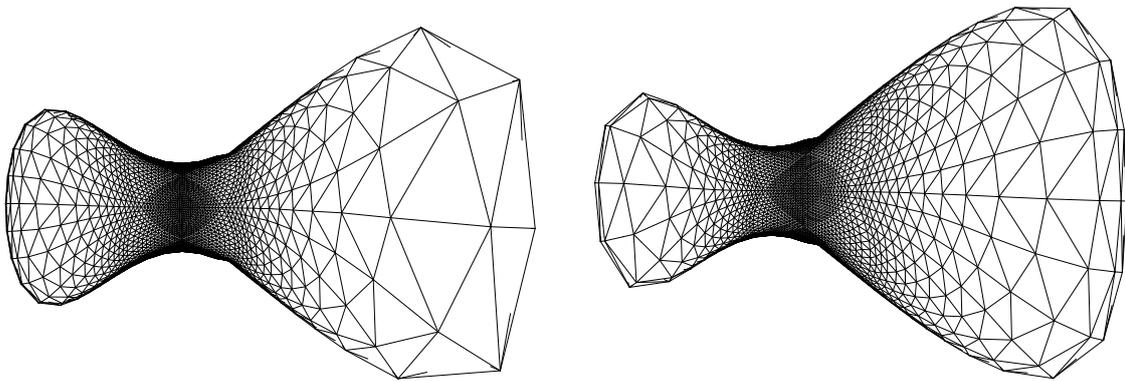
(b) Parametergebiete zur Startparametrisierung (links) und zur optimalen Parametrisierung (rechts).

**Abbildung 5.5:** Reparametrisierung der unsymmetrischen Pilz-Fläche.

## Hantel-Fläche

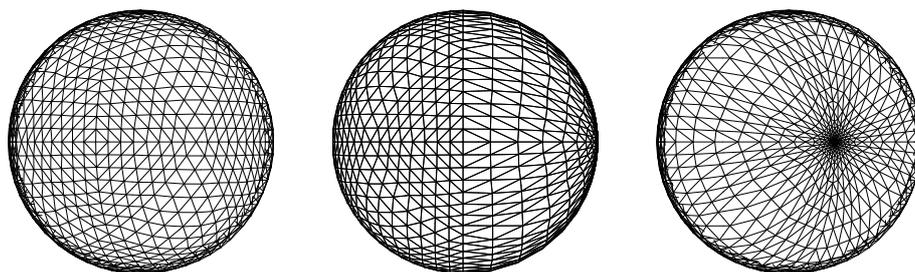


(a) Ausgangstriangulierung der Hantel-Fläche

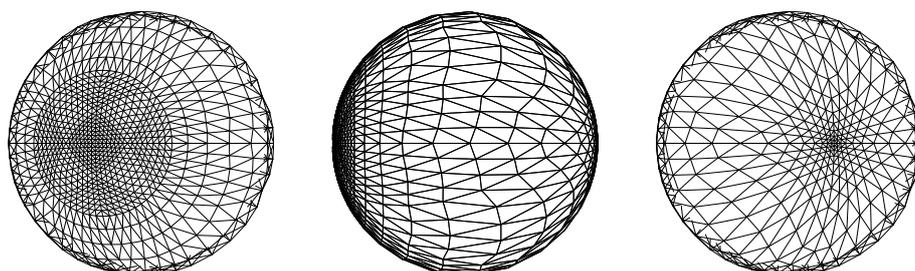


(b) Reparametrisierung durch Projektion bezüglich der optimalen Startparametrisierung (rechts) im Vergleich zur Projektion bezüglich der Startparametrisierung (links). Siehe auch Abb. 4.9.

**Abbildung 5.6:** Reparametrisierung der Hantel-Fläche.



(a) Diskret konforme Ausgangsparametrisierung  $\mathbf{x}_h$  der Ei-Fläche aus verschiedenen Perspektiven.



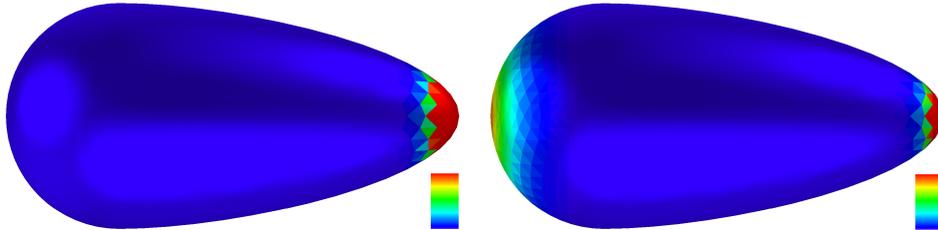
(b) Parametergebiet zu  $\mathbf{x}_{opt}$  aus verschiedenen Perspektiven.

**Abbildung 6.1:** Parametergebiete zur Ei-Fläche aus §4.6 (vgl. Abben. 4.3 und 4.4). Der Algorithmus optimiert die Parametrisierung durch Vergrößerung der Dreiecke im Parametergebiet, welche durch  $\mathbf{x}_h$  auf die Eispitze abgebildet werden. Es kommt jedoch gleichzeitig zur Kompression der Dreiecke am gegenüberliegenden Pol.

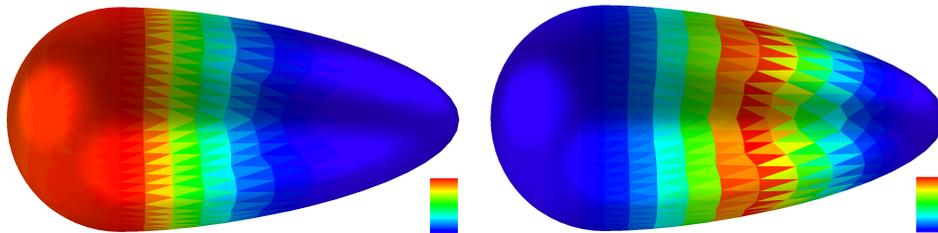
## 6 Diskussion

Das hier vorgestellte Verfahren zur Optimierung von Parametrisierungen zeichnet sich durch eine enge Beziehung zur nicht-linearen Elastizität aus. Es führt auf eine geometrische Klasse von Parametrisierungsenergien, die nach dem Darstellungssatz (Satz 3.4) schon den von geometrischer Bedeutung allgemeinsten Fall widerspiegelt. Das vom Dreiecksgitter unabhängige stetige Modell erlaubt eine straight-forward Diskretisierung.

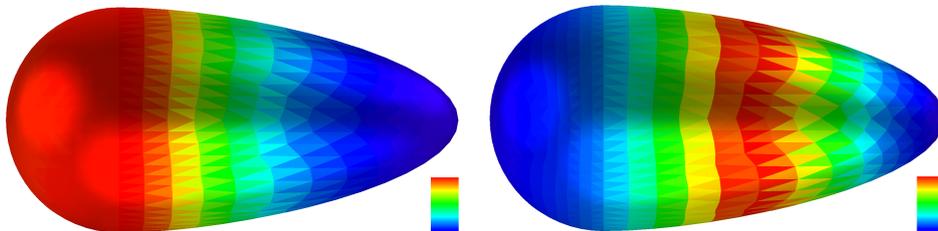
Optimiert man eine diskrete konforme Startparametrisierung  $\mathbf{x}_h$  mit dem hier entwickelten Algorithmus, so sind die numerischen Ergebnisse im allgemeinen schlechter als ich auf Grund der 6 freien Parameter der Möbiustransformationen erwartet habe. Die konformen Diffeomorphismen der Sphäre können lediglich an einem Punkt des sphärischen Gitters Dreiecke einer Triangulierung vergrößern, und müssen dazu jedoch am gegenüberliegenden Pol Dreiecke verkleinern. Dies sieht man zum Beispiel bei der Optimierung der Parametrisierung zur Ei-Fläche (Abb. 4.3 in §4.6). Die Energiedichte der Startparametrisierung  $\mathbf{x}_h$  ist an den zur Eispitze korrespondierenden Dreiecken  $T$  wegen  $\delta_{h,T} \ll 1$  extrem hoch (Abb. 6.2). Der Algorithmus optimiert die Parametrisierung durch Vergrößerung der Dreiecke im Parametergebiet, welche durch  $\mathbf{x}_h$  auf die Eispitze abgebildet werden. Es kommt jedoch gleichzeitig zur Kompression der Dreiecke am gegenüberliegenden Pol (Abb. 6.1).



(a) Farbliche Visualisierung der Energiedichte  $W(\delta_h, \tau_h) = \delta_h + \frac{13}{3}\delta_h^{-3} + \tau_h^3$

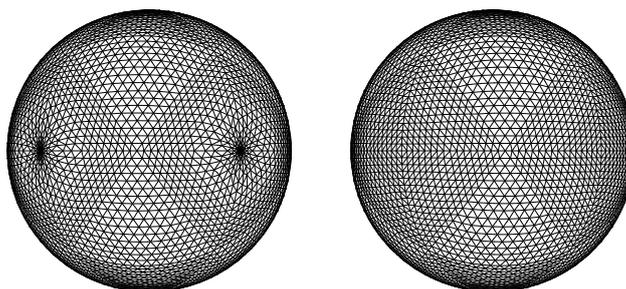


(b) Farbliche Visualisierung von  $\delta_h = \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}_h} (\underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_h \underline{\nabla} \mathbf{x}_h)$

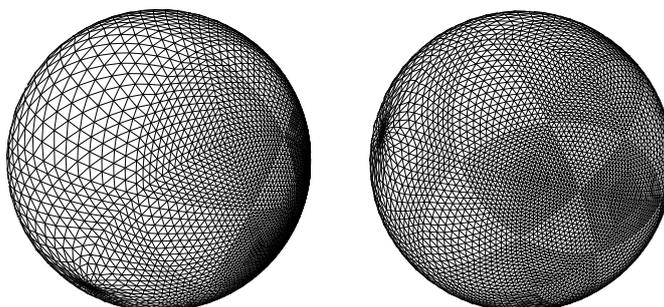


(c) Farbliche Visualisierung von  $\tau_h = \text{tr} (\underline{\nabla} \mathbf{x}_h^T (\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\nabla} \Phi)_h \underline{\nabla} \mathbf{x}_h)$

**Abbildung 6.2:** Farbliche Visualisierung der Determinante, Spur und Energiedichte der Ei-Fläche aus Abb. 4.3. Die linke Hälfte korrespondiert zur Ausgangsparametrisierung (Abb. 6.1(a)), im Vergleich zu  $\mathbf{x}_{opt}$ , der optimalen Parametrisierung bezüglich der Energiedichte  $W(\delta, \tau) = \delta + \frac{13}{3}\delta^{-3} + \tau^3$ , auf der rechten Seite (Abb. 6.1(b)).



(a) Parametergebiet zur Startparametrisierung der Sphäre mit Armen (vgl. Abb. 6.4(a)) aus verschiedenen Perspektiven.

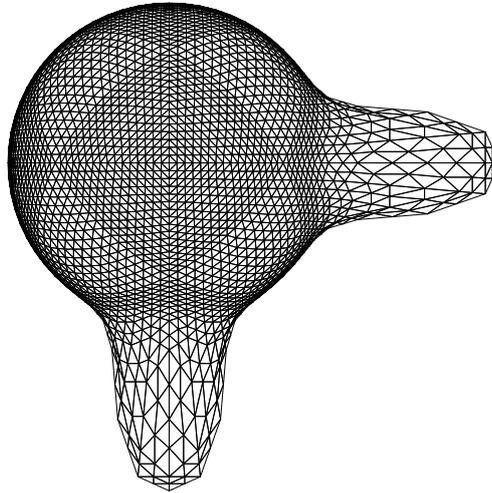


(b) Parametergebiet zur optimaler Parametrisierung zur Energiedichte  $W(\delta_h, \tau_h) = \delta_h^2 + 3\delta_h^{-1} + \tau_h$  aus verschiedenen Perspektiven.

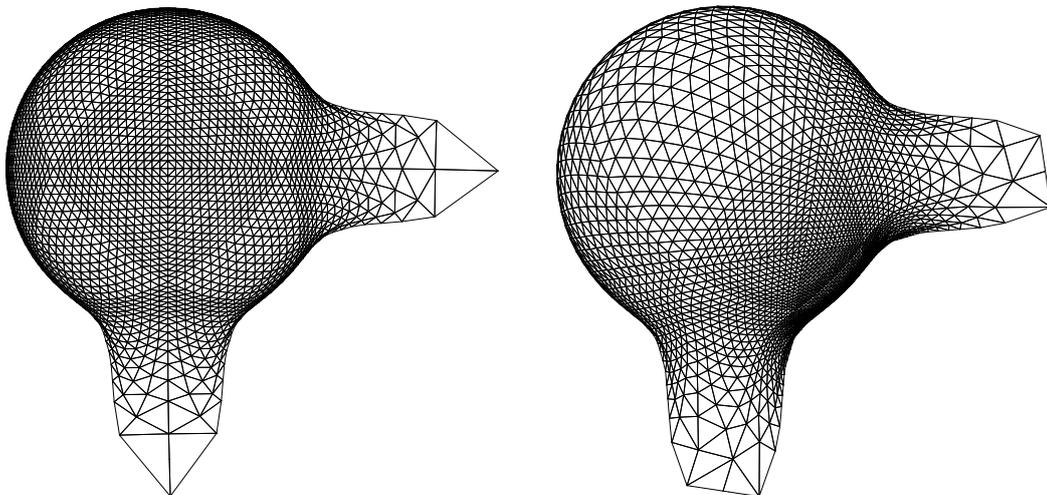
**Abbildung 6.3:** Im Parametergebiet der Startparametrisierung zur Fläche in Abbildung 6.4(a) gibt es, wie in obiger Abbildung (a) zu sehen, zwei zu den „Armen“ der Fläche korrespondierende Konzentrationspunkte. Der Algorithmus versucht dort die Dreiecke zu vergrößern, muss jedoch gleichzeitig die Dreiecke am gegenüberliegenden Pol verkleinern (Abb. (b) oben).

Die Verkleinerung bzw. Vergrößerung der Dreiecke bewirkt auch bei der Reparametrisierung bessere Ergebnisse (Abb. 5.3). Die Dreiecke sind bei der Reparametrisierung bezüglich der optimalen Parametrisierung gleichmäßiger auf der Fläche verteilt, und es kommt nicht zu extrem großen Dreiecken wie in Abbildung 5.3(b), der Reparametrisierung bezüglich der Startparametrisierung. Die Dreiecke der Reparametrisierung sind in allen Beispielen nicht so spitz wie in der Ausgangsparametrisierung und verbessern so die Qualität der Triangulierung einer Fläche.

Konforme Diffeomorphismen der Sphäre können nicht an zwei unterschiedlichen Stellen eines sphärischen Gitters Dreiecke vergrößern. Im Parametergebiet der Startparametrisierung zur Fläche in Abbildung 6.4(a) gibt es zwei zu den „Armen“ der Fläche korrespondierende Konzentrationspunkte (Abb. 6.3(a)). Der Algorithmus versucht dort die Dreiecke zu vergrößern, muss jedoch gleichzeitig die Dreiecke am gegenüberliegenden Pol verkleinern (Abb. 6.3(b)). Die Reparametrisierung der Sphäre mit Armen bezüglich der optimalen Parametrisierung ist an den Armen im Vergleich zur Reparametrisierung bezüglich der Startparametrisierung besser, jedoch insgesamt nicht zufriedenstellend (Abb. 6.4(b)).



(a) Ausgangstriangulierung der Sphäre mit Armen.



(b) Auf der linken Seite ist die Reparametrisierung bezüglich der Startparametrisierung dargestellt. Die Reparametrisierung mittels optimaler Parametrisierung zur Energiedichte  $W(\delta_h, \tau_h) = \delta_h^2 + 3\delta_h^{-1} + \tau_h$  ist im rechten Bild abgebildet.

**Abbildung 6.4:** Reparametrisierung der Sphäre mit Armen.

## 7 Schlussbemerkungen

Die numerischen Ergebnisse belegen, dass die konformen Diffeomorphismen der Sphäre konforme Startparametrisierungen nicht mehr wesentlich verbessern können. Beschränkt man sich auf konforme Parametrisierungen so liefert der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Algorithmus optimale Parametrisierungen.

Inhalt weiterführender Arbeiten wird es sein, sich nicht auf konforme Parametrisierungen zu beschränken. Gesucht sind dann Deformationen der Sphäre, so dass die Umparametrisierung möglichst winkel-, flächen- und längentreu ist. Erweitert man die Energiedichte aus Beispiel 3.7 um den Summanden

$$W_c(\delta, \tau) = \alpha_c \left( \frac{\tau^4}{\delta} - 4 \right),$$

so wird man die fehlende Konformität bestrafen können. Sind  $\gamma$  und  $\Gamma$  die Eigenwerte des Verzerrungstensors der Parametrisierung  $\mathbf{x}[\Phi] : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}^2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \tau &= \text{tr}_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) = \gamma + \Gamma, \\ \delta &= \det_{\mathcal{T}\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]^T \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{x}[\Phi]) = \gamma \cdot \Gamma. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte kann man wiederum in den Variablen  $\delta$  und  $\tau$  ausdrücken:

$$\Gamma = \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \delta}, \quad \gamma = \frac{\tau}{2} - \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \delta}.$$

Für konforme Parametrisierungen ist  $\gamma = \Gamma$  und damit  $W_c(\delta, \tau) = 0$ .

Wie in Bemerkung 3.5 angedeutet, wird man sich desweiteren nicht auf topologische Sphären beschränken wollen.

### Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Martin Rumpf für die intensive Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit. Desweiteren bedanke ich mich bei Dr. Ulrich Clarenz, der stets für meine Fragen zur Verfügung stand. Mein besonderer Dank gilt Dipl.-Math. Udo Diewald für die Mühe, die Arbeit Korrektur zu lesen, sowie der Arbeitsgruppe für Numerische Mathematik in Duisburg für die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen.



## Literatur

- [1] H. Behnke and F. Sommer. *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [2] D. Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [3] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 2002.
- [4] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume 1: Three-dimensional Elasticity*. Elsevier Science Publishers B.V., New York, 1988.
- [5] U. Clarenz and G. Dziuk. Grid optimization via conformal reparametrization. Preprint, 2004.
- [6] U. Clarenz, N. Litke, and M. Rumpf. Axioms and Variational Problems in Surface Parameterization. *Computer Aided Geometric Design*, 21:727–750, 2004.
- [7] B. Dacorogna and J. Moser. On a partial differential equation involving the Jacobian determinant. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7:1–26, 1990.
- [8] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, and O. Wohlrab. *Minimal Surfaces I*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 295, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [9] M. P. do Carmo. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1998.
- [10] G. Dziuk. Finite Elements for the Beltrami-Operator on arbitrary surfaces. In S. Hildebrandt and R. Leis, editors, *Partial Differential Equations and Calculus of Variations*, Lecture Notes in Mathematics 1357, pages 142–155. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [11] J. Eells and J. C. Wood. Restrictions on harmonic maps of surfaces. *Topology*, 15:263–266, 1979.
- [12] C. F. Gauß. Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinstenTheilen ähnlich wird. Als Beantwortung der von der königlichen Scietät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage. *Schumachers Astronomische Abhandlungen, Drittes Heft*, pages 1–30, 1825. (Cf. also: Werke Bd. IV, 189-216).
- [13] X. Gu and S.-T. Yau. Computing conformal structures of surfaces. *Communications in Informations and Systems*, 2(2):121–146, 2002.
- [14] S. Hildebrandt and H. von der Mosel. On Lichtenstein’s theorem about globally conformal mappings. *Calc. Var.* ONLINE DOI:10.1007/s00526-004-0307-4, 2004.
- [15] K. Hormann and G. Greiner. MIPS: An efficient global parametrization method. In P.-J. Laurent, P. Sablonnière, and L. L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design: Saint-Malo 1999*, Innovations in Applied Mathematics, pages 153–162. Vanderbilt University Press, Nashville, 2000.

- 
- [16] J. Jost. *Two-dimensional geometric variational problems*. Wiley-Interscience, 1991.
- [17] A. Khodakovsky, N. Litke, and P. Schröder. Globally smooth parameterizations with low distortion. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3):350–357, July 2003.
- [18] P. Kosmol. *Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [19] L. Lichtenstein. Zur Theorie der konformen Abbildungen: Konforme Abbildungen nichtanalytischer, singularitätsfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. *Bull. Acad. Sci. Cracovie, Cl. Sci. Math. Nat.*, A:192–217, 1916.
- [20] J. Moser. On the volume elements on a manifold. *Trans. Am. Math. Soc.*, 120:286–294, 1965.
- [21] J. C. C. Nitsche. *Vorlesung über Minimalflächen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 199, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [22] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part III: Variational methods and optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

# **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich diese Diplomarbeit selbständig und nur unter Gebrauch der angegebenen Hilfsmittel und Quellen angefertigt habe.

Duisburg, Januar 2005

(Nadine Olischläger)