

Dimensionsreduktion für die hochdimensionale Wärmeleitungsgleichung zum Bewerten von Basket-Optionen

Erika Gintautas

Geboren am 21. Mai 1990 in Paneweshis (Litauen)

24. September 2012

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. M. Griebel

INSTITUT FÜR NUMERISCHE SIMULATION

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

Danksagung

Ich möchte mich hiermit bedanken bei Prof. Dr. M. Griebel, für die Themengebung und die Betreuung, bei Alexander Hullman für die tatkräftige Unterstützung bei der Bearbeitung und seine Geduld bei all meinen Fragen und bei den Admins, die mir bei technischen Fragen desöfteren geholfen haben. Außerdem danke ich Constanze Klaar und Christina Quasebartg für das Korrekturlesen.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Motivation | 1 |
| 2 | Die Transformation der Black-Scholes-Gleichung in die Wärmeleitungsgleichung | 5 |
| 2.1 | Der 1-dimensionale Fall | 5 |
| 2.2 | Der mehrdimensionale Fall | 6 |
| 2.2.1 | Hauptachsentransformation | 7 |
| 2.2.2 | Nutzen abfallender Eigenwerte | 10 |
| 3 | ANOVA-Zerlegung (Analysis of Variance) | 13 |
| 3.1 | Anker-ANOVA-Zerlegung | 14 |
| 3.2 | Effektive Dimensionen | 16 |
| 3.2.1 | Fehlerabschätzungen | 16 |
| 3.3 | Fehleranalyse der AnkerANOVA-Zerlegung | 17 |
| 4 | Die Wärmeleitungsgleichung | 21 |
| 4.1 | Der PDE Löser | 21 |
| 4.2 | lineare Kombination niederdimensionaler Teillösungen | 22 |
| 4.2.1 | Randproblem | 23 |
| 5 | Fazit | 31 |

1 Einleitung

Eine wichtige Aufgabe in der Finanzmathematik ist das Bewerten von Basketoptionen. Dies sind Wertpapierer, die ein Recht auf den Erwerb oder Verkauf mehrerer Underlyings darstellen, jenachdem ob es sich um Calls oder Puts handelt. Ein Basket sei hierbei ein Aktienindex, sodass die Underlyings dementsprechend Aktien sind. Grundlage für die Preissetzung ist eine partielle Differentialgleichung: Die Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0 \quad \forall (S, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T) \quad (1.1)$$

Dabei entsprechen die Parameter S dem Aktienkurs, V dem Preis, σ der Volatilität des Basiswertes und t der Laufzeit der Option. Die Anzahl der Underlyings und somit die Größe des Baskets bestimmt die Dimension der zu lösenden partiellen Differentialgleichung.

Die Black-Scholes Gleichung lässt sich durch mehrere Variablentransformationen in die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{auf } \Omega \times (0, T]$$

überführen.

1.1 Motivation

Ziel der Arbeit ist es die Dimension der Gleichung mit Hilfe der ANOVA-Zerlegung zu reduzieren. Besonderes Augenmerk soll auf die Anker-ANOVA-Zerlegung gelegt werden. Diese verwendet als Integrationsmaß das Diracmaß, das sich besser zur numerischen Berechnung eignet. Dafür muss zunächst die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung betrachtet werden

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x_i^2}{4t}\right), \end{aligned}$$

die ausgenutzt wird, um niederdimensionale Teilprobleme zu erhalten. Wir benötigen hierfür die ANOVA-Zerlegung der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{u \subseteq \mathcal{D}} g_u(x_u) \quad (1.2)$$

mit $\mathcal{D} = \{1, \dots, d\}$. Diese Darstellung wird dann in die Fundamentallösung eingesetzt

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^d} F(x - y, t) g(y) dy \\
 &= \sum_{u \in \mathcal{D}} \int_{\mathbb{R}^d} F(x - y, t) g_u(y_u) dy \\
 &= \sum_{u \in \mathcal{D}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d-|u|}} F(x_{\mathcal{D} \setminus u} - y_{\mathcal{D} \setminus u}, t) dy_{\mathcal{D} \setminus u}}_{=1} \times \int_{\mathbb{R}^{|u|}} F(x_u - y_u, t) g_u(y_u) dy_u \\
 &= \sum_{u \in \mathcal{D}} \int_{\mathbb{R}^{|u|}} F(x_u - y_u, t) g_u(y_u) dy_u.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Da die Integration des Kerns F gleich 1 ist, können die Teilprobleme in (1.3) nun als niederdimensionale partielle Differentialgleichungen gelöst werden.

In der Arbeit wird zunächst die Transformation der Black-Scholes-Gleichung in die Wärmeleitungsgleichung erläutert. An dieser Stelle wird eine Hauptachsentransformation durchgeführt, sodass wir zunächst die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T)$$

erhalten. Die durch die Transformation entstehenden Eigenwerte λ_i sind Teil der weiteren Untersuchungen. In Kapitel 3 wird dann die ANOVA- und AnkerANOVA-Zerlegung eingeführt. Dabei betrachten wir insbesondere die relativen Fehler, die durch das Abschneiden der Reihe einer 3-dimensionalen Funktion entstehen auf den Gebieten $[0, 1]^3$ und $[-1, 2]^3$ und den Einfluss der eben erwähnten Eigenwerte. Diese sind ein Indiz für die Gewichtung einer Variable in der ANOVA-Zerlegung. Im folgenden Kapitel wird zunächst der Differentialgleichungslöser beschrieben und anschließend wird anhand einiger Beispiele der relative Fehler der Lösungen betrachtet. Dabei wird der 2- und 3-dimensionale Fall separat untersucht. Die niederdimensionalen Teilprobleme werden getrennt voneinander gelöst, zusammengefügt und anschließend mit der Lösung verglichen, in der die Anfangsbedingung nicht zerlegt wurde. Außerdem wird im 3-dimensionalen Fall zusätzlich noch die gekürzte, also auch fehlerbelastete Anfangsbedingung eingesetzt.

Fehlerquellen

Da im Fazit eine ausführlichere Erläuterung der Fehlerquellen, die in diesem Verfahren entstehen, vorhanden ist, möchte ich hier nur einen groben Überblick verschaffen. Es ist jedoch sinnvoll sich dieser Fehlerquellen bewusst zu sein.

- Das Lösungsgebiet \mathbb{R}^d muss gekürzt werden. In unserem Fall auf $[0, 1]^2$ bzw. $[0, 1]^3$.

- Die Anzahl der Ankerpunkte hat Einfluss auf die Genauigkeit der Approximation.
- Durch die gekürzte ANOVA-Zerlegung ist schon die Anfangsbedingung fehlerbelastet (vgl. 3.3).
- Die Lösung wird durch Linearkombination niederdimensionaler Teillösungen erzeugt, wodurch ein weiterer Randfehler entsteht (vgl. 4.2.1).
- Die Diskretisierung ist sowohl für den Löser wie auch für die Integration mithilfe der Quasi-Monte Carlo Methode wichtig.
- Sind die Eigenwerte aus der Hauptachsentransformation nicht stark genug abfallend, so führt dies zu einer erheblich ungenaueren Approximation durch die gekürzte ANOVA-Zerlegung.

2 Die Transformation der Black-Scholes-Gleichung in die Wärmeleitungsgleichung

Die folgenden beiden Kapitel basieren auf der Dissertation von Dr. M. Reisinger [Rei03]. Es wurden meinerseits einige Zwischenrechnungen hinzugefügt.

2.1 Der 1-dimensionale Fall

Wir betrachten das klassische Black-Scholes-Modell ohne Dividendenzahlungen

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^+ \setminus 0 \times [0, T]. \quad (2.1)$$

Für die die Transformation sind drei Schritte erforderlich.

1.) $u = Ve^{-rt} \Leftrightarrow V = ue^{rt}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= re^{rt}u + e^{rt} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial u}{\partial S} e^{rt} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} e^{rt} \end{aligned}$$

Gleichung (2.1) wird zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + rS \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = 0. \quad (2.2)$$

2.) $S = e^z \Leftrightarrow z = \ln(S)$

$$\begin{aligned}
 u(S, t) &= \tilde{u}(z(S), t) \\
 \frac{\partial u}{\partial S} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \frac{1}{S} \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} &= \frac{1}{S^2} \left(-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = 0. \quad (2.3)$$

$$3.) \quad x = z - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \Leftrightarrow z = x + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \quad t' = -t$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(z(S), t) &= \hat{u}(x(z(S), t), t(t')) \\
 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \left(-r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t'} (-1) \\
 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \\
 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten Die Wärmeleitungsgleichung mit Diffusionsparameter $\sigma^2/2$.

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.4)$$

2.2 Der mehrdimensionale Fall

Das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell hat folgende Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial S_i \partial S_j} - r \sum_{i=1}^d S_i \frac{\partial u}{\partial S_i} + ru = 0 \quad \forall (S, t) \in \mathbb{R}_+^d \times (0, T) \quad (2.5)$$

$$u(S, 0) = g(S) := \left(K - \sum_{i=1}^d \mu_i S_i \right) \quad \forall S \in \mathbb{R}_+^d. \quad (2.6)$$

Dabei sind μ_i positive Gewichte auf einem Basket. Auch in dieser Transformation müssen wir zunächst die logarithmischen Aktienwerte betrachten

$$y_i := \ln(S_i) \quad 1 \leq i \leq d$$

mit

$$u(S, t) = \tilde{u}(y(S), t)$$

sowie die dadurch entstehenden Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial S_i} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial S_i} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \frac{1}{S_i}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } i \neq j & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial S_j \partial S_i} = \frac{\partial}{\partial S_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \frac{1}{S_i} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_j \partial y_i} \frac{1}{S_i S_j} \\ \text{ii) } i = j & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial S_i^2} = \frac{\partial}{\partial S_i} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \frac{1}{S_i} \right) = \frac{1}{S^2} \left(-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_i^2} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir nun alle Gleichungen in (2.5) und (2.6) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_i \partial y_j} - r \sum_{i=1}^d \left(r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} + r \tilde{u} = 0 \quad \forall (y, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \quad (2.7)$$

$$\tilde{u}(y, 0) = \tilde{g}(y) := \left(K - \sum_{i=1}^d \mu_i e^{y_i} \right)_+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^d. \quad (2.8)$$

2.2.1 Hauptachsentransformation

Für die Transformation dient die Sochastische Differentialgleichung

$$dY_i = \mu_i dt + dW_i$$

mit

$$\langle dY_i, dY_j \rangle = \sigma_{ij} dt$$

als Grundlage. Die Kovarianzmatrix $\Sigma := (\sigma_{ij})$ mit $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ ist symmetrisch und positiv definit, sodass eine orthogonale Transformation Q auf Diagonalform

$$Q \Sigma Q^T =: \text{diag}(\lambda_i) =: \Lambda$$

existiert. Definieren wir,

$$Z := QY$$

so folgt

$$\langle dZ_i, dZ_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} dt. \quad (2.9)$$

Dies führt wegen

$$z_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} y_j$$

mit

$$\tilde{u}(y, t) = \hat{u}(z(y), t)$$

zu folgenden partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} &= \sum_{l=1}^d \frac{\partial \hat{u}}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^d \frac{\partial \hat{u}}{\partial z_l} q_{lj} \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_i \partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{l=1}^d \frac{\partial \hat{u}}{\partial z_l} q_{lj} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_k \partial z_l} q_{lj} q_{ki} \end{aligned}$$

Einsetzen in (2.7) führt mit Hilfe von (2.9) zu

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^d \sigma_{ij} q_{lj} q_{ki} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_k \partial z_l} - r \sum_{i,j=1}^d \left(r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) q_{ij} \frac{\partial \hat{u}}{\partial z_i} + r \hat{u} = \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_i^2} - r \sum_{i,j=1}^d \left(r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) q_{ij} \frac{\partial \hat{u}}{\partial z_i} + r \hat{u} = 0 \quad \forall (z, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \quad (2.11)$$

und

$$\hat{u}(z, 0) = \hat{g}(z) = g(e^{Q^T z}) = \left(K - \sum_{i=1}^d \mu_i e^{\sum_{j=1}^d q_{ji} z_j} \right)_+ \quad \forall z \in \mathbb{R}^d$$

Mit der Translation

$$x := z - tb$$

$$b_i := \sum_{j=1}^d q_{ij} (r - \sigma_j^2)$$

folgt mit

$$\hat{u}(z, t) = \hat{u}(x(z, t), t)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial z_i} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z_i} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_i^2} = \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} \frac{\partial x_i}{\partial z_i} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^d \left(-b_i \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

sodass Gleichung (2.11) zu

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} + r \hat{u} = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \quad (2.15)$$

$$\hat{u}(x, 0) = \hat{g}(x) = g(e^{Q^T x}) = \left(K - \sum_{i=1}^d \mu_i e^{\sum_{j=1}^d q_{ji} x_j} \right)_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (2.16)$$

wird. Nach einer letzten Substitution

$$v = e^{rt} \hat{u} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u} = e^{-rt} v$$

und erneutem partiellen Differenzieren

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -r \hat{u}$$

ist nun auch der Reaktionsterm $r \hat{u}$ verschwunden und wir erhalten die mehrdimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T). \quad (2.17)$$

Betrachten wir noch einmal die Fundamentallösung für die allgemeine Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{mit } A := (a_{ij}),$$

wobei A konstant und positiv definit ist. Mithilfe der Green'schen Formel und des Transformationssatzes, folgt

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2} \sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-\frac{1}{4t}(x-y)^T A^{-1}(x-y)} dy. \quad (2.18)$$

Auf unser Problem bezogen, resultiert aus (2.18) und $A = \frac{1}{2} Q \Sigma Q^T = \Lambda$, dass

$$\begin{aligned} \hat{u}(x(S_0, t), t) &= e^{-rt} v(x(S_0, t), t) \\ &= e^{-rt} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2} \sqrt{\det \frac{1}{2} \Lambda}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(y) e^{-\frac{2}{4t}(x(S_0, t)-y)^T \Lambda^{-1}(x(S_0, t)-y)} dy \\ u(S_0, t) &= \frac{e^{-rt}}{(2\pi t)^{d/2} \sqrt{\det \Lambda}} \int_{\mathbb{R}^d} g(S(y, t)) e^{-\frac{1}{2t} \sum_{i=1}^d (x_i(S_0, t)-y_i)^2 / \lambda_i} dy, \end{aligned}$$

wobei $x_i = \sum_{i=1}^d q_{ij} (\ln S_j + t(r - \frac{\sigma_j^2}{2}))$ von S und t abhängt.

2.2.2 Nutzen abfallender Eigenwerte

Sind abfallende Eigenwerte gegeben, so kann diese Eigenschaft ausgenutzt werden, um Fehler bei der Kürzung der AnkerANOVA- Zerlegung zu minimieren. Dafür definieren wir

$$\hat{x}_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x.$$

Hieraus ergibt sich für (2.17) mit $\hat{u}(\hat{x}, t) = u(x, t)$ wegen $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_i^2}$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_i^2} = 0$$

und im 3-dimensionalen Fall

$$\hat{u}(x, y, z) = u(\sqrt{\lambda_1}x, \sqrt{\lambda_2}y, \sqrt{\lambda_3}z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Zur Vereinfachung wählen wir folgende Testanfangsbedingung

$$g(S) = \left(3 - \sum_{i=1}^d S_i \right)_+ \Leftrightarrow g(\sqrt{\lambda}x) = \left(3 - \sum_{i=1}^d e^{\sqrt{\lambda_i}x_i} \right)_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.20)$$

Die Transformationsmatrix Q entspricht dabei der Einheitsmatrix, sodass Σ schon Diagonalgestalt mit Eigenwerteinträgen hat.

Das spätere Lösen der Differentialgleichung ist nur auf einem abgeschnittenen Gebiet möglich, deswegen betrachten wir die Auszahlungsfunktion mithilfe einer linearen Transformation

$$T : [-\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_1}] \times \dots \times [-\sqrt{\lambda_d}, \sqrt{\lambda_d}] \rightarrow [0, 1]^d$$

definiert als

$$T_x := \left(\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1}, \dots, \frac{x_d - a_d}{b_d - a_d} \right) \quad \text{mit} \quad a_i = -\sqrt{\lambda_i} \quad b_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \forall x \in [0, 1]^d.$$

Die Anfangsbedingung (2.20) wird mit

$$\tilde{g} := g(T^{-1}(x))$$

also zu

$$\tilde{g}(x) = \left(3 - \sum_{i=1}^d e^{-\sqrt{\lambda_i}+2\sqrt{\lambda_i}x_i} \right) \Leftrightarrow \tilde{g}(\sqrt{\lambda}x) = \left(3 - \sum_{i=1}^d e^{-\sqrt{\lambda_i}+2\lambda_i x_i} \right) \quad \forall x \in [0, 1]^d. \quad (2.21)$$

Die Bilder 2.1 und 2.2 zeigen die Anfangsbedingung (2.21) mit $d = 2$, $\lambda = [1, 1]$ und $\lambda = [1, 0.125]$ auf dem Gebiet $[0, 1]^d$.

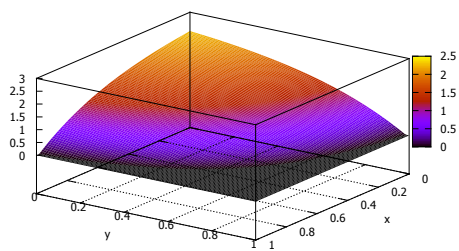


Abbildung 2.1: Auszahlungsfunktion mit $\lambda = [1, 1]$

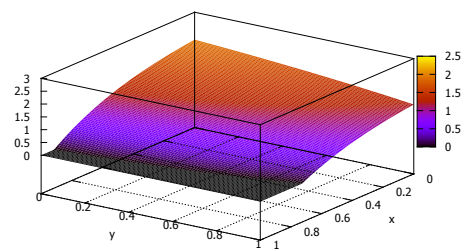


Abbildung 2.2: Auszahlungsfunktion mit $\lambda = [1, 0.125]$

3 ANOVA-Zerlegung (Analysis of Variance)

In diesem Kapitel wird die ANOVA-Zerlegung eingeführt und untersucht. Als Grundlage dient [Hol10]. Hierbei wollen wir klären inwieweit sich eine d -dimensionale Funktion als Summe niederdimensionaler Funktionen

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^d f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq d} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,2,\dots,d}(x) \quad f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

$$= \sum_{u \subseteq \{1,\dots,d\}} f_u(x_u) \quad (3.2)$$

zerlegen lässt und welcher Fehler durch das Abschneiden einer solchen Reihe entsteht. Außerdem müssen einige Notationen eingeführt werden. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und Ω_j seien Boreluntermengen von Ω^d für alle $j = 1, \dots, d$ und $\Omega^u = \bigotimes_{j \in u} \Omega_j \subseteq \mathbb{R}^{|u|}$, dann definieren die Wahrscheinlichkeitsmaße μ_j auf Ω_j ein Produktmaß auf $\Omega^{\{1,\dots,d\}}$

$$d\mu(x) = \prod_{i=1}^d \mu_j(x_j). \quad (3.3)$$

Die Menge aller \mathcal{L}^2 -Funktionen $f: \Omega^d \rightarrow \mathbb{R}$ und das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{\Omega^d} f(x)g(x)d\mu(x) \quad (3.4)$$

bilden zusammen den Hilbertraum $V^{(d)} := \mathcal{L}^2(\Omega^d, \mu)$. Die Maße μ induzieren Orthogonalprojektionen $P^u: V^{(d)} \rightarrow V^{(|u|)}$

$$P_u f(x_u) := \int_{\Omega^{d-|u|}} f(x) d\mu_{\mathcal{D} \setminus u}(x) \quad \text{für } u \subset \mathcal{D}$$

$$P_u f(x_u) := f(x) \quad \text{für } u = \mathcal{D}$$

mit $u \subseteq \mathcal{D}$ und $V^{|u|} \subset V^{(d)}$. Dabei bezeichnet x_u den $|u|$ -dimensionalen Vektor, der alle Komponenten von x enthält, deren Indizes in u sind und

$$d\mu_{\mathcal{D} \setminus u}(x) := \prod_{j \notin u} d\mu_j(x_j)$$

das Integrationsmaß. Man kann zeigen, dass f bezüglich der \mathcal{L}^2 -Norm durch die Projektionen P_u minimiert wird. Siehe [ottershagen]. Das heißt diese projizieren f auf optimale $f_u \in \mathcal{L}^2(\Omega^u)$. Mittels des Teleskopsummenprinzips kann f nun also in eine Summe zerlegt werden, deren niederdimensionale Terme f_u die Funktion jeweils bestmöglich approximieren. Die 2^d Terme f_u sind rekursiv definiert durch

$$f_u(x_u) := P_u f(x_u) - \sum_{v \subset u} f_v(x_v)$$

und können explizit bestimmt werden mit

$$f_u(x_u) = \sum_{v \subseteq u} (-1)^{|u|-|v|} P_v f(x_v).$$

3.1 Anker-ANOVA-Zerlegung

Die ANOVA-Zerlegung eignet sich schlecht für numerische Berechnungen, da zur Bestimmung jedes ANOVA-Summanden f_u mit $u \subseteq \mathcal{D}$ eine Integration durchgeführt werden muss. Wählt man nun aber das Dirac-maß als Integrationsmaß, so müssen stattdessen lediglich Punktauswertungen an den sogenannten Ankerpunkten a bestimmt werden.

Sei a der Ankerpunkt in $\Omega = [0, 1]^d$, dann definiert $d\mu(x) = \delta(x - a)dx$ das Integrationsmaß und die Orthogonalen Projektoren

$$P_u f(x_u) = f(x)_{x=a \setminus x_u}, \quad (3.5)$$

wobei $f(x)|_{x=a \setminus x_i} = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_d)$ mit der dazugehörigen Verallgemeinerung $x = a \setminus u$. Die Standard-ANOVA-Zerlegung ist eine Mittelung der Anker-ANOVA über allen möglichen Ankerpunkten auf dem Gebiet $\Omega = [0, 1]^d$. Deswegen ist die Anker-ANOVA-Zerlegung so implementiert, dass dem Programm eine variable Anzahl p an Ankerpunkten pro Dimensionsrichtung als Input übergeben werden kann. Diese werden dann äquidistant verteilt und entsprechend ihrer Anzahl gemittelt. Bildet f von \mathbb{R}^d nach \mathbb{R} ab, so gibt es d^p Ankerpunkte auf dem gesamten Gebiet. Das Integrationsmaß ist dementsprechend

$$d\mu = \frac{1}{p^d} \sum_a d\delta_a \quad (3.6)$$

und die Projektoren 3.5 werden zu

$$P_u f(x_u) = \frac{1}{p^{|\mathcal{D} \setminus u|}} \sum_a f(x)_{x=a \setminus x_u}.$$

Sei $p < n$, dann folgt, dass die Berechnung eines der 2^d Terme den Aufwand $O(p^{|\mathcal{D} \setminus u|} n^{|u|})$ hat und wir insgesamt eine Laufzeit von

$$O(2^d n^{|\mathcal{D}|}) \quad (3.7)$$

benötigen. Die nachfolgenden Bilder zeigen die einzelnen Terme der AnkerANOVA-Zerlegung von (2.20) mit einem Ankerpunkt $AP = [0.5, 0.5]$, $d = 2$ und $\lambda = [1, 0.125]$.

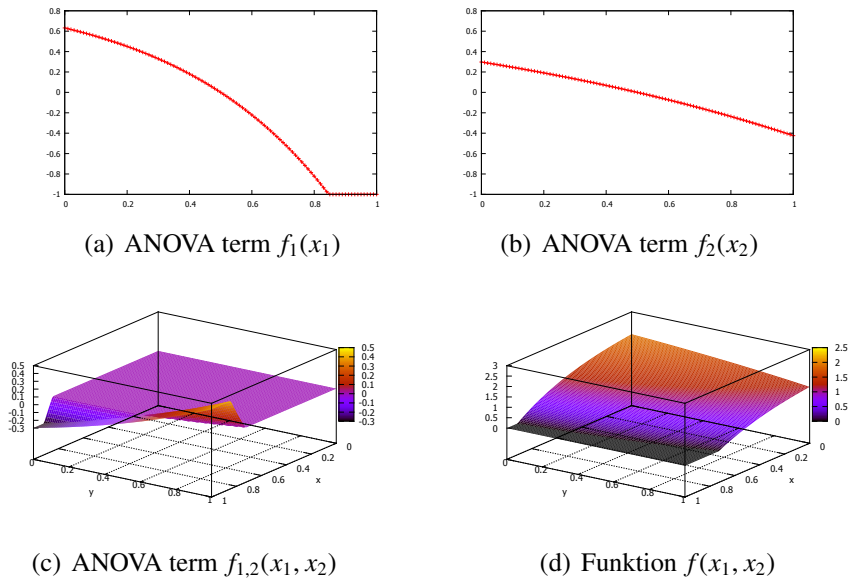


Abbildung 3.1: Beispielfunktion und ihre ANOVATERME mit einem Ankerpunkt

Um einen Eindruck des Einflusses der Ankerpunkte zu gewinnen sieht man zum Vergleich, dass bei höherer Anzahl an Ankerpunkten $p = 10$ die niederdimensionalen Terme stetiger werden. Genauere Analysen der Eigenschaften dieses Glättungseffekts sind in [GKS10] zu finden.

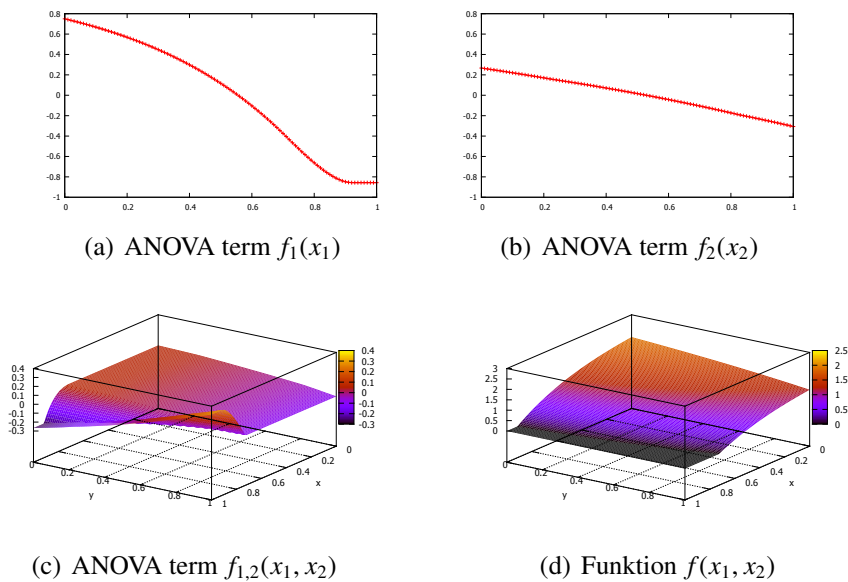


Abbildung 3.2: Beispielfunktion und ihre ANOVATERME mit 10 Ankerpunkten

3.2 Effektive Dimensionen

Die Idee der *Effektiven Dimension* ist eine Größe zu bestimmen, die einen Anhaltspunkt gibt, inwieweit sich die AnkerANOVA-Zerlegung kürzen lässt. Dies ist von Interesse, wenn man hoch-dimensionale Anfangsbedingungen hat und diese dann auf 3- oder sogar 2-dimensionale Probleme kürzen möchte. Dafür definieren wir den Operator $|I(\cdot)|$ mit $|\int_{[0,1]^d} f(x)dx| \leq \|f\|_{L_1}$. Somit werden wir hier eine Fehlerabschätzung für die Integration einführen. Dies ist aber auch von Interesse, wenn man anschließend den relativen \mathcal{L}^2 -Fehler der gekürzten Zerlegung mithilfe der Quasi-Monte Carlo Methode bestimmen möchte. Sei

$$\hat{\sigma} := \sum_{\substack{u \subseteq \mathcal{D}, \\ u \neq \emptyset}} |If_u| \leq \sum_{\substack{u \subseteq \mathcal{D}, \\ u \neq \emptyset}} \|f_u\|_{L_1}, \quad (3.8)$$

so kann mit dem Anteil $\alpha = 0.99$ die Trunktionsdimension (*truncation dimension*) definiert werden als der kleinste Integer d_t , sodass

$$\sum_{\substack{u \subseteq \{1, \dots, d_t\}, \\ u \neq \emptyset}} |If_u| \geq \alpha \hat{\sigma}(f) \quad (3.9)$$

gilt. Außerdem definieren wir die Superpositionsdimension (*superposition dimension*), einen weiteren Integerwert d_s

$$\sum_{\substack{|u| \leq d_s, \\ u \neq \emptyset}} |If_u| \geq \alpha \hat{\sigma}(f). \quad (3.10)$$

Sind die Variablen ihrem Einfluss entsprechend geordnet, so beschreibt die Trunktionsdimension die Anzahl der relevanten Variablen für die Funktion f . Die Superpositionsdimension hingegen gibt einen Anhaltspunkt für die höchste Anzahl der einander beeinflussenden Variablen. Beide Größen sind nur ungefähre Anhaltspunkte und können unter Umständen bei der AnkerANOVA-Zerlegung falsche Ergebnisse liefern. Außerdem sind beide Größen von der Wahl des Anteils α abhängig (vgl. [Hol10]).

3.2.1 Fehlerabschätzungen

Wir wollen hier zwei Fehlerabschätzungen zeigen, die vor allem auch den Integrationsfehler bei der relativen Fehlerberechnung betreffen.

Lemma 3.1. *Sei d_t die Trunktionsdimension von f , α der Anteil und $f_{d_t}(x) := \sum_{u \subseteq \{1, \dots, d_t\}} f_u(x_u)$. Dann gilt*

$$|If - If_{d_t}| \leq (1 - \alpha) \hat{\sigma}(f).$$

Beweis.

$$|If - If_{d_t}| = \left| \sum_{u \notin \{1, \dots, d_t\}} If_u \right| \leq \sum_{u \notin \{1, \dots, d_t\}} |If_u| = \sum_{u \subseteq \mathcal{D}} |If_u| - \sum_{u \subseteq \{1, \dots, d_t\}} |If_u| \leq (1 - \alpha) \hat{\sigma}(f)$$

□

Lemma 3.2. Sei d_s die Superpositionsdimension von f , α der Anteil und $f_{d_s}(x) := \sum_{|u| \leq d_s} f_u(x_u)$. Dann gilt

$$|If - If_{d_s}| \leq (1 - \alpha)\hat{\sigma}(f).$$

Beweis. Mit Abschätzung 3.8 und 3.10 folgt

$$|If - If_{d_s}| = \left| \sum_{|u| \geq d_s} If_u \right| \leq \sum_{|u| \geq d_s} |If_u| \leq (1 - \alpha)\hat{\sigma}(f).$$

□

3.3 Fehleranalyse der AnkerANOVA-Zerlegung

Da wir uns in dieser Arbeit auf den 3-dimensionalen Fall der Black-Scholes Gleichung beschränken, ist der Fehler von Interesse, der entsteht, wenn man die Zerlegung einer 3-dimensionalen Funktion auf ihre 2-dimensionalen Terme kürzt. Dafür sind zwei Faktoren ausschlaggebend. Zunächst folgt aus der Mittelungseigenschaft der AnkerANOVA, dass eine höhere Anzahl an Ankerpunkten eine genauere Approximation zur Folge hat. Desweiteren können abfallende Eigenwerte aus der Hauptachsentransformation wie in (2.19) ausgenutzt werden, um den Fehleinfluss der jeweiligen Variable zu minimieren. Tabelle 3.1 zeigt den relativen \mathcal{L}^2 -Fehler

$$\text{relFehler} = \frac{\|f_k - f\|_2}{\|f\|_2} = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}^d} (f_k(x) - f(x))^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^d} f^2(x) dx}}$$

der gekürzten Funktion $f_k = \sum_{|u| \leq k} f_u$ zur korrekten Lösung im Gebiet $[0, 1]^3$. Dabei steht Parameter p für die Anzahl an Ankerpunkten pro Dimension und Parameter k zeigt bis auf welche Dimension die Treme gekürzt wurden. Die Integration wird dabei mit Hilfe der Quasi-Monte Carlo Methode durchgeführt. Das heißt $\int f_u = If_u \approx q_u$ und

$$\text{relFehler} \approx \frac{\|q - \sum_{|u| \leq k} q_u\|_2}{\|q\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n^d} (f(x_i) - \sum_{|u| \leq k} f_u(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n^d} f(x_i)^2}},$$

wobei n die Ortsdiskretisierung ist.

Die Ergebnisse in Tabelle 3.1 und 3.1 legen die Vermutung nahe, dass ab einer bestimmten Anzahl an Ankerpunkten die Approximationseigenschaft nur noch geringfügig besser wird. Es lässt sich jedoch festhalten, dass die Wahl von nur einem Ankerpunkt nicht sinnvoll ist. In Kapitel 4 werden wir den Wärmeleitungslöser auch auf das vergrößerte Gebiet $[-1, 2]^3$ anwenden, um anschließend das Teilgebiet $[0, 1]^3$ zu betrachten. Deshalb ist es von Interesse die

3 ANOVA-Zerlegung (Analysis of Variance)

| | $p = 1$ | $p = 1$ | $p = 2$ | $p = 2$ |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 |
| [1, 1, 1] | 0.91 | 0.43 | 0.64 | 0.31 |
| [1, 1, 1/2] | 0.88 | 0.42 | 0.59 | 0.31 |
| [1, 1, 1/4] | 0.81 | 0.38 | 0.52 | 0.24 |
| [1, 1, 1/8] | 0.76 | 0.31 | 0.50 | 0.18 |
| [1, 1, 1/16] | 0.71 | 0.23 | 0.49 | 0.13 |
| [1, 1/2, 1/2] | 0.86 | 0.42 | 0.59 | 0.32 |
| [1, 1/2, 1/4] | 0.80 | 0.39 | 0.53 | 0.27 |
| [1, 1/2, 1/8] | 0.75 | 0.32 | 0.49 | 0.21 |
| [1, 1/2, 1/16] | 0.70 | 0.25 | 0.48 | 0.15 |
| [1, 1/4, 1/4] | 0.76 | 0.37 | 0.47 | 0.27 |
| [1, 1/4, 1/8] | 0.70 | 0.32 | 0.44 | 0.22 |
| [1, 1/4, 1/16] | 0.65 | 0.26 | 0.42 | 0.16 |
| [1, 1/8, 1/8] | 0.64 | 0.29 | 0.39 | 0.19 |
| [1, 1/8, 1/16] | 0.58 | 0.25 | 0.37 | 0.14 |
| [1, 1/16, 1/16] | 0.50 | 0.22 | 0.32 | 0.11 |

Tabelle 3.1: Relative Fehler der gekürzten ANOVA-Zerlegung mit einem und zwei Ankerpunkten und Diskretisierung $n = 100$

ANOVA-Zerlegung zusätzlich auf dem großen Gebiet durchzuführen und anschließend den relativen Fehler auf dem Teilgebiet zu untersuchen. Tabellen 3.3, 3.4 und 3.5 veranschaulichen diese Fehler. Leider ist hier auch deutlich zu sehen, dass der Fehler auf dem vergrößerten Gebiet $[-1, 2]^3$ sich im Vergleich zum Fehler auf dem Teilgebiet $[0, 1]^3$ deutlich erhöht. Um dem relativen Fehlern der Zerlegung auf $[0, 1]^3$ zu entsprechen, muss eine signifikant größere Anzahl an Punkten gewählt werden.

3.3 Fehleranalyse der AnkerANOVA-Zerlegung

| | $p = 5$ | $p = 5$ | $p = 10$ | $p = 10$ |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 |
| [1, 1, 1] | 0.54 | 0.21 | 0.54 | 0.21 |
| [1, 1, 1/2] | 0.52 | 0.19 | 0.52 | 0.19 |
| [1, 1, 1/4] | 0.49 | 0.16 | 0.49 | 0.15 |
| [1, 1, 1/8] | 0.47 | 0.12 | 0.46 | 0.12 |
| [1, 1, 1/16] | 0.45 | 0.09 | 0.45 | 0.09 |
| [1, 1/2, 1/2] | 0.51 | 0.19 | 0.50 | 0.18 |
| [1, 1/2, 1/4] | 0.48 | 0.16 | 0.48 | 0.16 |
| [1, 1/2, 1/8] | 0.45 | 0.13 | 0.45 | 0.12 |
| [1, 1/2, 1/16] | 0.44 | 0.10 | 0.44 | 0.09 |
| [1, 1/4, 1/4] | 0.45 | 0.15 | 0.50 | 0.14 |
| [1, 1/4, 1/8] | 0.42 | 0.12 | 0.42 | 0.12 |
| [1, 1/4, 1/16] | 0.40 | 0.09 | 0.40 | 0.09 |
| [1, 1/8, 1/8] | 0.38 | 0.10 | 0.38 | 0.10 |
| [1, 1/8, 1/16] | 0.35 | 0.08 | 0.35 | 0.08 |
| [1, 1/16, 1/16] | 0.30 | 0.07 | 0.30 | 0.07 |

Tabelle 3.2: Relative Fehler der gekürzten ANOVA-Zerlegung mit fünf und zehn Ankerpunkten und Diskretisierung $n = 100$

| | $p = 5, [0, 1]^3$ | $p = 5, [0, 1]^3$ | $p = 5, [-1, 2]^3$ | $p = 5, [-1, 2]^3$ |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 |
| [1, 1, 1] | 0.64 | 0.31 | 0.62 | 0.28 |
| [1, 1/2, 1/4] | 0.63 | 0.32 | 0.59 | 0.25 |
| [1, 1/2, 1/8] | 0.60 | 0.27 | 0.56 | 0.21 |
| [1, 1/4, 1/4] | 0.60 | 0.32 | 0.58 | 0.24 |
| [1, 1/4, 1/8] | 0.57 | 0.28 | 0.55 | 0.21 |
| [1, 1/4, 1/16] | 0.51 | 0.23 | 0.51 | 0.17 |

Tabelle 3.3: Relative Fehler der gekürzten ANOVA-Zerlegung mit 5 Ankerpunkten auf dem Gebiet $[-1, 2]^3$ und Diskretisierung $n = 90$. Betrachtet wird der Fehler auf beiden Gebieten.

3 ANOVA-Zerlegung (Analysis of Variance)

| | $p = 13, [0, 1]^3$ | $p = 13, [0, 1]^3$ | $p = 13, [-1, 2]^3$ | $p = 13, [-1, 2]^3$ |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 |
| [1, 1, 1] | 0.62 | 0.30 | 0.62 | 0.28 |
| [1, 1/2, 1/4] | 0.59 | 0.29 | 0.59 | 0.24 |
| [1, 1/2, 1/8] | 0.54 | 0.25 | 0.56 | 0.21 |
| [1, 1/4, 1/4] | 0.57 | 0.29 | 0.58 | 0.23 |
| [1, 1/4, 1/8] | 0.53 | 0.25 | 0.55 | 0.21 |
| [1, 1/4, 1/16] | 0.48 | 0.20 | 0.51 | 0.16 |

Tabelle 3.4: Relative Fehler der gekürzten ANOVA-Zerlegung mit 13 Ankerpunkten auf dem Gebiet $[-1, 2]^3$ und Diskretisierung $n = 90$. Betrachtet wird der Fehler auf beiden Gebieten.

| | $p = 20, [0, 1]^3$ | $p = 20, [0, 1]^3$ | $p = 20, [-1, 2]^3$ | $p = 20, [-1, 2]^3$ |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 | relFehler k = 1 | relFehler k = 2 |
| [1, 1, 1] | 0.61 | 0.30 | 0.62 | 0.28 |
| [1, 1/2, 1/4] | 0.58 | 0.29 | 0.59 | 0.24 |
| [1, 1/2, 1/8] | 0.54 | 0.24 | 0.56 | 0.21 |
| [1, 1/4, 1/4] | 0.56 | 0.28 | 0.58 | 0.23 |
| [1, 1/4, 1/8] | 0.52 | 0.24 | 0.55 | 0.21 |
| [1, 1/2, 1/16] | 0.48 | 0.20 | 0.51 | 0.16 |

Tabelle 3.5: Relative Fehler der gekürzten ANOVA-Zerlegung mit 20 Ankerpunkten auf dem Gebiet $[-1, 2]^3$ und Diskretisierung $n = 90$. Betrachtet wird der Fehler auf beiden Gebieten.

4 Die Wärmeleitungsgleichung

Um die Wärmeleitungsgleichung numerisch behandeln zu können, betrachten wir das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & \forall (x, t) \in [0, 1]^d \times (0, 1] \\ u(x, 0) &= g(x) & \forall x \in [0, 1]^d. \end{aligned}$$

Die sonst übliche Nullrandbedingung wird nicht vorausgesetzt, da die Terme der ANOVA-Zerlegung diese nicht beibehalten. Wir halten aber für jeden Zeitschritt den Rand fest, der durch die Anfangsbedingung gegeben ist. Ein recht großes Problem ist die Kürzung des Gebiets. Sie verursacht einen Fehler, der sich in jedem Zeitschritt in das Innere des Gebiets fortpflanzt. Dies ist vor Allem von Interesse, wenn durch Linearkombinationen aus niederdimensionalen Teillösungen die Lösung bestimmt wird (siehe 4.2).

4.1 Der PDE Löser

Als PDE-Löser wird das θ -Schema der Differenzenverfahren verwendet. Es ist die konvexe Kombination des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens mit Parameter θ .

explizites Eulerverfahren

$$\begin{aligned} \partial_t^+ u_j^n - \sigma \partial_x^+ \partial_x^- u_j^n &= 0 & j = 1, \dots, M-1, \quad n \geq 0 \\ u_j^0 &= u_0(x_j) & j = 0, \dots, M \end{aligned}$$

implizites Eulerverfahren

$$\begin{aligned} \partial_t^- u_j^{n+1} - \sigma \partial_x^+ \partial_x^- u_j^{n+1} &= 0 & j = 1, \dots, M-1, \quad n \geq 0 \\ u_j^0 &= u_0(x_j) & j = 0, \dots, M \end{aligned}$$

θ -Schema

$$\begin{aligned} \partial_t^- u_j^{n+1} - \sigma \partial_x^+ \partial_x^- [\theta u_j^{n+1} + (1 - \theta) u_j^n] &= 0 & j = 1, \dots, M-1, \quad n \geq 0 \\ u_j^0 &= u_0(x_j) & j = 0, \dots, M \end{aligned}$$

Durch Ausschreiben der Differenzenquotienten erhält man ein tridiagonales Gleichungssystem

$$Au^{n+1} = Bu^n, \quad u^n := \begin{bmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_M^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(M+1)^d} \quad A, B \in \mathbb{R}^{(M+1)^d \times (M+1)^d}$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ -\frac{\sigma\theta}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\sigma\theta}{\Delta x^2} & -\frac{\sigma\theta}{\Delta x^2} & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -\frac{\sigma\theta}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\sigma\theta}{\Delta x^2} & -\frac{\sigma\theta}{\Delta x^2} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\sigma\theta}{\Delta x^2} & -\frac{\sigma\theta}{\Delta x^2} \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ \frac{\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{2\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} & \frac{\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \frac{\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{2\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} & \frac{\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \frac{1}{\Delta t} - \frac{2\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} & \frac{\sigma(1-\theta)}{\Delta x^2} \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Analog zum 1-dimensionalen Fall, lassen sich auch Systemmatrizen für 2- und 3-dimensionale Wärmeleitungsgleichungen erstellen. Da diese eine feste Struktur besitzen und schwach besetzt sind, kann der Löser implementiert werden ohne die Matrix explizit speichern zu müssen. Das Verfahren ist stabil für $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Falls $\theta < 1/2$, so muss zusätzlich die CFL-Bedingung

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$$

erfüllt sein. Das Lineare Gleichungssystem, das in jedem Zeitschritt entsteht, wird mit dem vorkonditionierten BICGStab-Verfahren gelöst vgl[BICGStab suchen].

4.2 lineare Kombination niederdimensionaler Teillösungen

Betrachten wir noch einmal die Fundamentallösung (1.3) mit den ANOVATERMEN der 3-dimensionalen Zerlegung mit $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{u \in \mathcal{D}} \int_{\mathbb{R}^{|u|}} F(x_u - y_u, t) g_u(y_u) dy_u \\
 &= g_0 + \sum_{i \leq 3} \int_{\mathbb{R}} F(x_i - y_i, t) g_i(x_i) dy_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} \int_{\mathbb{R}^2} F(x_{i,j} - y_{i,j}, t) g_{i,j}(x_{i,j}) dy_{i,j} \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} F(x_{1,2,3} - y_{1,2,3}) g_{123}(x_{1,2,3}) d(y_1, y_2, y_3) \\
 &:= u_0 + \sum_{i \leq 3} u_i(x_i) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} u_{i,j_i}(x_i, x_j) + u_{1,2,3_i}(x_1, x_2, x_3).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aus den 1- und 2-dimensionalen Teillösungen u_i und $u_{i,j}$ lassen sich die 3-dimensionalen Terme durch Linearkombinationen generieren.

4.2.1 Randproblem

Das Problem bei dieser Zerlegung ist die inkonsequente Randwertbehandlung. Die Stammanfangsbedingung g gibt eigentlich konstante Randwerte vor, die in jedem Zeitschritt festgehalten werden. Wird nun aber z.B. g_1 als Anfangsbedingung eingesetzt, das heißt wir lösen die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung, erhalten wir in jedem Zeitschritt eine Lösung

$$u_{1_t}(x) := u_1(x, t), \tag{4.2}$$

die wir zur 3-dimensionalen Teillösung

$$\tilde{u}_{1_t}(x, y, z) := u_{1_t}(x) \tag{4.3}$$

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = u_0 + u_{1_t}(x) + u_{2_t}(y) + u_{3_t}(z) + u_{1,2_t}(x, y) + u_{1,3_t}(x, z) + u_{2,3_t}(y, z) + u_{1,2,3_t}(x, y, z)$$

erweitern. Lösung (4.3) entspricht jedoch nicht mehr dem Term $u_{1_t}(x, y, z)$ aus (4.1). Der Grund ist, dass (4.2) in jedem Zeitschritt mehr abflacht. Erweitern wir nun auf die höherdimensionale Lösung, so fließt dieser Effekt auch in \tilde{u}_{1_t} und dessen Rand ein. Der Diffusionseffekt wird also durch die sechs Terme $g_1, g_2, g_3, g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,3}$ verstärkt und führt deswegen zu einer weiteren Fehlerquelle.

Zur Verdeutlichung schauen wir uns eine vereinfachte Funktion

$$g(x) = \sum_{i=1}^2 (1 - 2|x_i - 0.5|) \quad \forall x \in [0, 1]^2 \tag{4.4}$$

als Anfangsbedingung an.

Eine Möglichkeit der Dimensionsreduktion ist analog zu (4.2) und (4.3) das separate Lösen der 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung

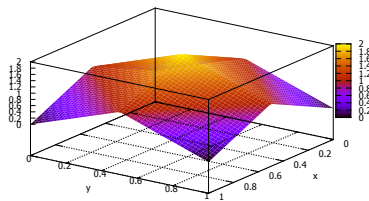
$$f(x_i) = (1 - 2|x_i - 0.5|) \tag{4.5}$$

und anschließender Erweiterung zur höherdimensionalen Lösung. Wir behandeln das Problem mit folgenden Werten:

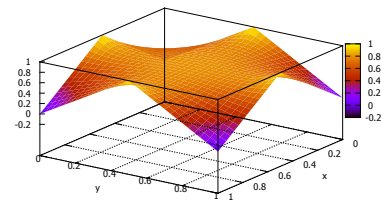
4 Die Wärmeleitungsgleichung

- die Ortsdiskretisierung sei $n = 30$
- die Zeitschritte seien $t = 50$
- $\theta = 0.5$ (entspricht Crank-Nicolson-Schema)
- der Diffusionsparameter sei $\sigma = 0.1$

Die Abbildungen in 4.1 zeigen die Testfunktion (4.4) und ihre Wärmeleitungslösung zum Zeitpunkt $t = 50$. Analog zu (4.3) entsprechen die weiteren beiden Abbildungen der dimensionsreduzierten Lösung $\hat{u}_{150}(x_1, x_2)$. Die Inkonsistenz der Randwerte ist hier besonders deutlich zu erkennen. Zum einen ist der Rand im reduzierten Problem stark abgeflacht, zum anderen wirkt sich das auf das Innere des Gebiets aus, da dieses offenbar stärker gesunken ist als die Lösung der Testfunktion ohne Dimensionsreduktion.

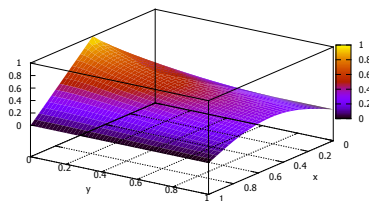


(a) Testfunktion

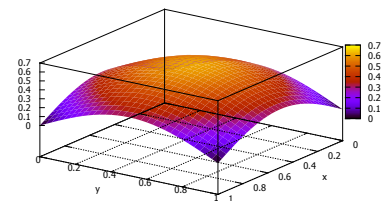


(b) Lösung zum Zeitpunkt 50

Abbildung 4.1: Testfunktion (4.4) und ihre Wärmeleitungslösung zum Zeitpunkt $t = 50$



(a) 1-dimensionale Teillösung



(b) reduzierte Lösung zum Zeitpunkt $t = 50$

Abbildung 4.2: Lösung der 1-dimensionalen Testfunktion (4.5) und die aus dem Zeitschritt $t = 50$ generierte reduzierte Lösung

Uns interessiert nun der relative \mathcal{L}^2 -Fehler

$$\text{relFehler}_t = \sqrt{\frac{\int_{[0,1]^2} (u(x_1, x_2, t) - \hat{u}_{150}(x_1, x_2))^2 dx}{\int_{[0,1]^2} u(x_1, x_2, t)^2 dx}}$$

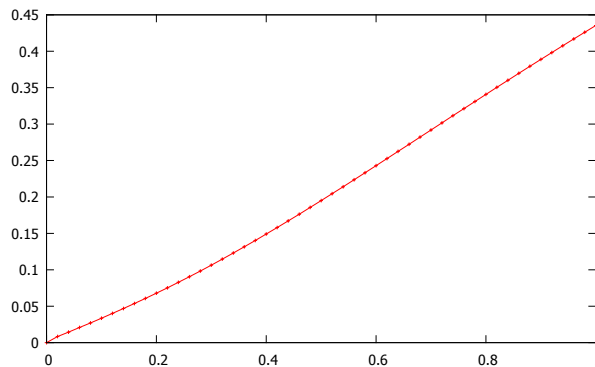


Abbildung 4.3: relativer \mathcal{L}^2 -Fehler zur ursprünglichen numerischen Lösung für das 2-dimensionale Testproblem

der dimensionsreduzierten Lösungen bezüglich der numerischen Lösung des eigentlichen Testproblems. Abbildung 4.3 veranschaulicht diesen Fehler für jeden Zeitschritt.

Offenbar ist die Auswirkung des Randfehlers ein nicht zu vernachlässigendes Problem und wird im Folgenden für Gleichung (2.21) als Anfangsbedingung untersucht.

2-dimensionaler Fall

Als Parameter werden hier folgende Werte benutzt:

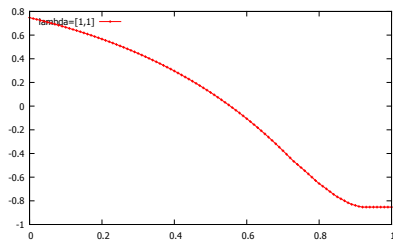
- die Ortsdiskretisierung sei $n = 30$
- die Zeitschritte seien $t = 50$
- $\theta = 0.5$ (entspricht Crank-Nicolson-Schema)
- der Diffusionsparameter sei $\sigma = 0.01$ und $\sigma = 0.1$
- Die Anzahl an Ankerpunkten pro Achse sei $p = 5$

Der Einfluss des Diffusionsparameter σ hat ähnlichen Einfluss auf die Gleichung wie die Zeitschritte. Eine Vergrößerung von σ entspricht einer Minderung der Zeitschritte. Betrachten wir nun die 2-dimensionale Anfangsbedingung (2.21) mit ihren ANOVATERMEN. Die Abbildungen in 4.4 zeigen die ANOVATERM $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ und ihre Wärmeleitungslösung. Abbildung 4.5 illustriert den 2-dimensionalen Term $f_{1,2}$ und seine Lösung zum Zeitschritt $t = 50$.

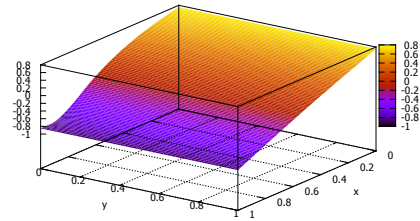
Wir addieren diese Teillösungen in jedem Zeitschritt nun aufeinander und vergleichen diese mit der ursprünglichen numerischen Lösung, um den relativen \mathcal{L}^2 -Fehler zu analysieren.

Interessanterweise führen abfallende Eigenwerte hier zu einem größeren Fehler im Gegensatz zu den Ergebnissen aus Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2. Außerdem hat die Erhöhung des Diffusionsparameters ebenfalls einen negativen Effekt auf den Fehler, da die Zeitkomponente diesen schneller in das Innere des Gebiets trägt. Um diesen Effekt zu verringern, ist es sinnvoll das Problem auf einem größeren Gebiet zu lösen. Dies zieht leider aber auch den "Fluch der

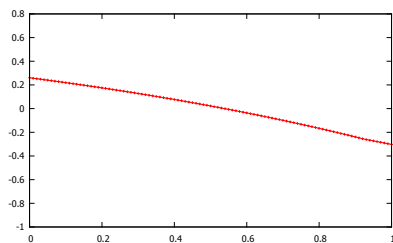
4 Die Wärmeleitungsgleichung



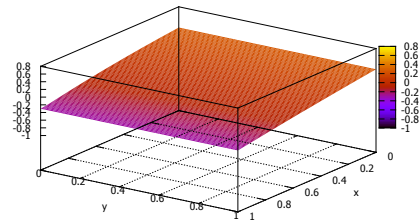
(a) ANOVA term $f_1(x_1)$



(b) Lösung

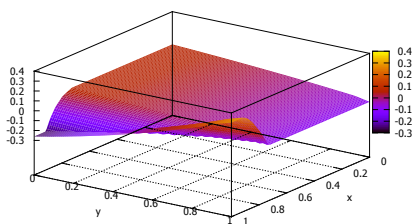


(c) ANOVA term $f_2(x_2)$

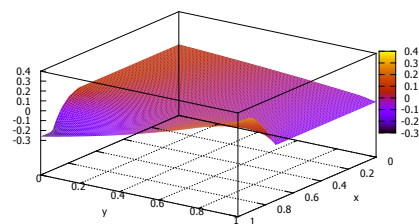


(d) Lösung

Abbildung 4.4: 1-dimensionale ANOVAterme mit $\lambda = [1, 1/8]$ und ihre Wärmeleitungslösung



(a) ANOVA term $f_{1,2}(x_1, x_2)$



(b) Lösung zum Zeitschritt $t = 50$

Abbildung 4.5: 2-dimensionaler ANOVAterm mit $\lambda = [1, 1/8]$ und seine Wärmeleitungslösung im Zeitschritt $t = 50$

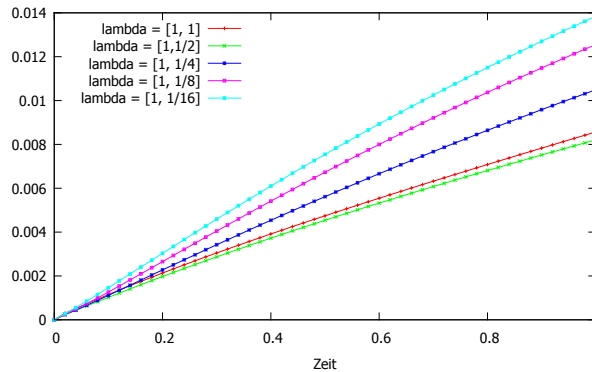


Abbildung 4.6: relativer \mathcal{L}^2 -Fehler zur ursprünglichen numerischen Lösung für unterschiedliche Eigenwerte mit Diffusionsparameter 0.01 für das 2-dimensionale Problem

Dimensionen" nach sich, denn die Anzahl an Punkten pro Achse wächst proportional zur Größe des Gebiets.

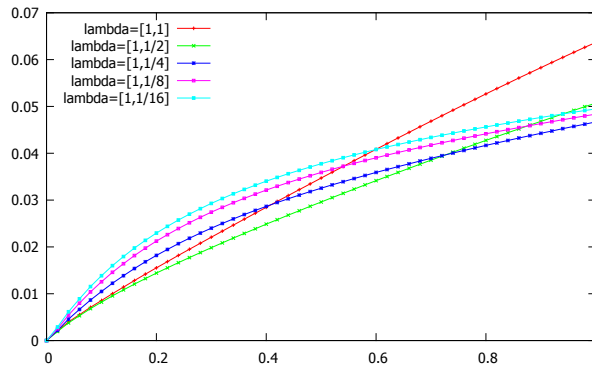


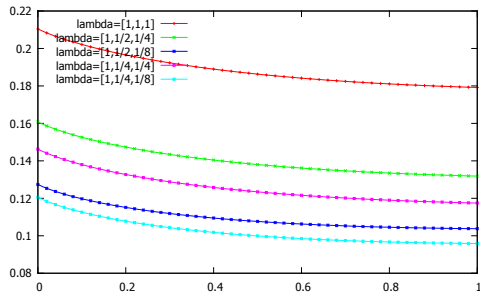
Abbildung 4.7: relativer \mathcal{L}^2 -Fehler zur ursprünglichen numerischen Lösung für unterschiedliche Eigenwerte mit Diffusionsparameter 0.1 für das 2-dimensionale Problem

3-dimensionaler Fall

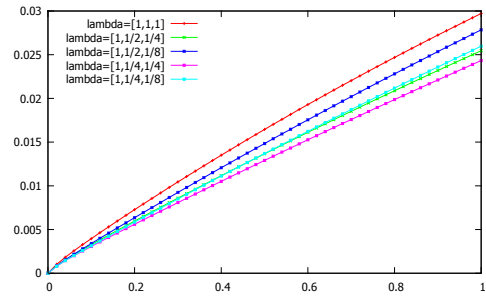
Fairerweise sollte nocheinmal erwähnt werden, dass wir hier eine nicht fehlerbelastete Anfangsbedingung haben, da nicht gekürzt wurde. Vergleichen wir nun die auf die 2-dimensionalen Terme gekürzte ANOVA-Zerlegung des 3-dimensionalen Problems als Anfangsbedingung, sowie die nicht gekürzte Anfangsbedingung. Abbildung 4.8 zeigt für unterschiedliche Eigenwerte den relativen Fehler in Abhängigkeit der Zeit auf dem Gebiet $[0, 1]^3$ mit der Ortsdiskretisierung $n = 30$.

Bei wachsendem Diffusionsparameter steigt jedoch der relative Fehler bis um das Sechsfache. Abbildung 4.8 und 4.9 verdeutlichen dies für die Diffusionsparameter 0.01 und 0.1.

4 Die Wärmeleitungsgleichung

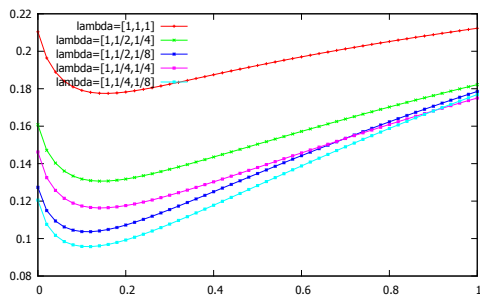


(a) relativer \mathcal{L}^2 -Fehler für gekürzte Terme

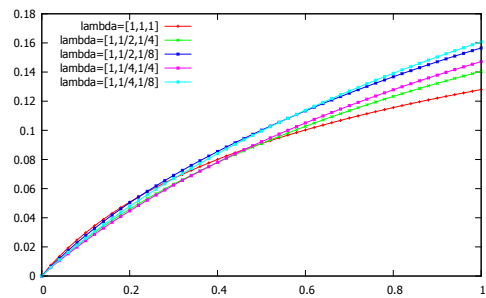


(b) relativer \mathcal{L}^2 -Fehler

Abbildung 4.8: Die Lösung des 3-dimensionalen Problems mit gekürzter und korrekter Anfangsbedingung mit Diffusionsparameter 0.01



(a) relativer \mathcal{L}^2 -Fehler für gekürzte Terme



(b) relativer \mathcal{L}^2 -Fehler

Abbildung 4.9: Die Lösung des 3-dimensionalen Problems mit gekürzter und korrekter Anfangsbedingung mit Diffusionsparameter 0.1

Betrachten wir das Problem nun auf dem Gebiet $[-1, 2]^3$. Um einen sinnvollen Vergleich zu gewährleisten, wählen wir als Ortsdiskretisierung $n = 90$, sodass auf dem Teilgebiet $[0, 1]^3$ die gleiche Diskretisierung wie zuvor stattfindet. Die Gebietsvergrößerung zieht außerdem die Erhöhung der Ankerpunkte p nach sich. War p zuvor noch gleich 5, so müsste p nun intuitiv gleich 13 entsprechen. Die Ergebnisse aus den Tabellen 3.3, 3.4 und 3.5 zeigen jedoch, dass bei vergrößerten Gebieten eine erheblich höhere Anzahl an Ankerpunkten benötigt wird, um vergleichbare Fehler wie auf dem Gebiet $[0, 1]^3$ zu erhalten. Der Unterschied zwischen 5, 13 und 20 Punkten ist vernachlässigbar. Wir beschränken uns daher wieder auf 5 Ankerpunkte pro Dimension.

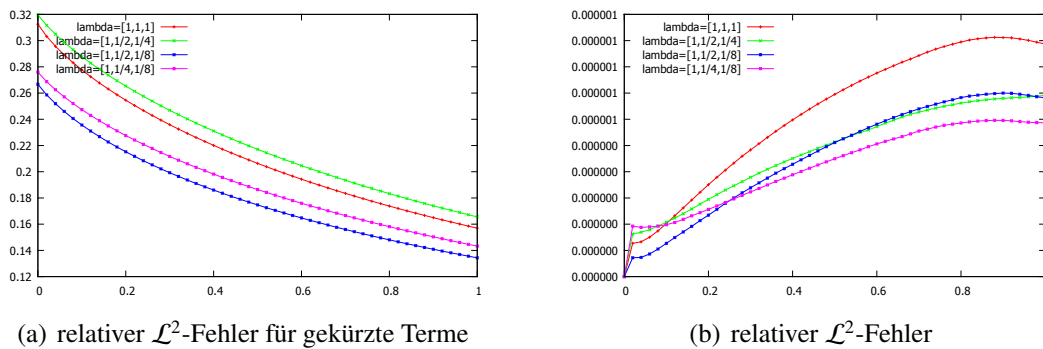


Abbildung 4.10: Die Lösung des 3-dimensionalen Problems auf $[-1, 2]^3$ mit gekürzter und korrekter Anfangsbedingung mit Diffusionsparameter 0.01. Betrachtet wird der Fehler auf dem Teilgebiet $[0, 1]^3$.

5 Fazit

Die Methode der Dimensionsreduktion mithilfe der ANOVA-, oder in unserem Fall, der Anker-ANOVA-Zerlegung ist im 3-dimensionalen Fall leider zu fehleranfällig. Unter anderem werden zu starke Anforderungen an die Kovarianz der jeweiligen Aktien bzw. Unternehmen gestellt. Ich möchte hier einige Fehlerquellen aufführen.

Zunächst müssen die Eigenwerte in der Kovarianzmatrix Σ recht stark abfallend sein, was die Tabellen 3.1 und 3.2 in Abschnitt 3.2 verdeutlichen.

An ihnen sieht man auch, dass die Wahl der Ankerpunkte, insbesondere ihrer Anzahl, den relativen Fehler gravierend beeinflussen. In der Praxis führt die Erhöhung der Punkte leider aber auch zu einer höheren Laufzeit (vgl. 3.7). Hierbei sollte noch einmal erwähnt werden, dass es sich in unserem Fall um äquidistant verteilte Punkte handelt und eine andere Verteilung möglicherweise schon bei einer geringeren Anzahl zu erheblichen Verbesserungen des relativen \mathcal{L}^2 -Fehlers führt.

Es entsteht außerdem ein Fehler durch das Abschneiden des Gebiets, der zwar durch das Lösen auf einem vergrößerten Gebiet verringert werden kann, dies jedoch zu einer steigenden Ortsdiskretisierung führt, sodass wir wieder mit dem "Fluch der Dimensionen" kämpfen müssen. Auch hier spielt die Laufzeit der ANOVA-Zerlegung eine Rolle, da sie von der Diskretisierung n abhängt.

Noch gravierender ist jedoch das Randproblem, das die einzelnen ANOVATERME verursachen. Jeder einzelne Term der ANOVA-Zerlegung führt zu neuen Randbedingungen, die mit der Zeitkomponente auch ihren Einfluss in der jeweiligen Lösung haben. Durch die anschließende Linearkombination werden diese Fehler dann aufeinanderaddiert.

Eine weitere Fehlerquelle ist die Integration mithilfe der Quasi-Monte Carlo Methode. Es gibt eine obere Schranke

$$\left| \int_{[0,1]^d} f(x) dx - \frac{1}{n^d} \sum_{i=1}^{n^d} f(x_i) \right| \leq V(f) D_{n^d},$$

wobei der Fehler von der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{(\log n^d)^d}{n^d}\right)$ ist (vgl. [MC95]).

Die Ausführung der Dimensionsreduktion mithilfe der ANOVA-Zerlegung ist also nur unter gewissen Umständen nützlich. Insbesondere der Fehler, der durch das Abschneiden der Zerlegung

entsteht, ist von Relevanz, da er schon in der Anfangsbedingung Einfluss findet. Grundsätzlich ist also eher das Betrachten eines Baskets mit signifikant höherer Anzahl an Unternehmen von Interesse, da hier das Abschneiden möglicherweise einen geringeren Einfluss hat. Der Einfluss einzelner ANOVA-terme kann wie in 3.9 und 3.10 mithilfe der Trunkations- bzw. Superpositionsdimension bestimmt werden.

Insgesamt ist das Verfahren eine Frage des geschickten Ausbalancierens der Fehlerquellen. So wäre eine Untersuchung des Einflusses der abfallenden Eigenwerte auf die Trunkations- bzw. Superpositionsdimension von Interesse, ein möglicherweise effizienteres Verteilen der Ankerpunkte und andere Gitterstrukturen beim Lösen der Differentialgleichung.

Literaturverzeichnis

- [GKS10] Griebel, M., F. Y. Kuo und I. H. Sloan: *The Smoothing Effect of the ANOVA Decomposition*. J. Complexity, 26:523–551, 2010.
- [Hol10] Holtz, M.: *Sparse Grid Quadrature in High Dimensions with Applications in Finance and Insurance*, Band 77. Springer Verlag, 2010.
- [MC95] Morokoff, W.J. und R.E. Caflisch: *Quasi-monte carlo integration*. Journal of Computational Physics, 122(2):218–230, 1995.
- [Rei03] Reisinger, C.: *Numerische Methoden für hochdimensionale parabolische Gleichungen am Beispiel von Optionspreisaufgaben*. Dissertation, Universität Heidelberg, 2003.