

Diplomarbeit

Numerische Simulation strömungsbedingten
Sedimenttransports und der entstehenden
Gerinnebettformen

angefertigt am
Institut für Numerische Simulation

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

September 2010

von

Markus Burkow

aus

Cottbus

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	NaSt3D Strömungslöser	7
3	Sedimenttransport	9
4	Konzentrationsgleichung	13
4.1	Herleitung	13
4.2	Anwendungsbeispiele	15
5	Exner-Gleichung	17
5.1	Herleitung aus Massenbilanz	17
5.2	Varianten	19
5.3	Herleitung aus Mittelungsansatz	20
6	Anwendbarkeit und Vergleich beider Modelle	27
6.1	Anwendungsbereiche	27
6.2	Klarwasserbedingungen	27
6.3	Gerinnebettformen	28
6.3.1	Übersicht	28
6.3.2	Prozesse und Beispiele	28
7	Diskretisierungsverfahren und Berechnungsformeln	31
7.1	Konzept der Schubspannung	31
7.2	Geschiebevolumenformeln	33
7.3	Diskretisierung der Exner-Gleichung	37
8	Erweiterung der NaSt3DGP-Implementierung um das Sedimentmodell	41
8.1	Datenstrukturen	43

8.2	Behandlung von Hindernissen und Initialisierung der Anfangssedimenthöhe	43
8.3	Berechnung der Schubspannung	46
8.4	Geschiebetransportberechnung	47
8.5	Höhenveränderung durch Exner-Gleichung	48
8.6	Gefällsbegrenzer	50
8.6.1	Natürliche Schüttwinkel	50
8.6.2	Slope-Limiter Algorithmus	52
8.7	Anpassung des Flag-Feldes	55
8.8	Parallelisierung	60
8.8.1	Veränderungen des Strömungslösers	60
8.8.2	Kommunikation	60
9	Konvergenzanalyse und Ergebnisse	63
9.1	Konvergenzanalyse	63
9.2	Driven Cavity	67
9.3	Doppelte Stufe	77
9.4	Rückwärtige Stufe mit Ausflussrand	90
9.5	Düne	95
9.6	Fluviale Hindernismarke	99
10	Zusammenfassung und Ausblick	105

1 Einleitung

Motivation

Fluidströmungen verursachen durch Turbulenz und durch die eigentliche Strömung Sedimenttransport in unterschiedlichsten Formen. Seien es durch Wind verursachte Aufwirbelungen von Sand und Schluffpartikeln oder durch Flüssigkeitsströmungen hervorgerufene Erosion und Sedimentation in Flüssen – die grundlegenden Mechanismen dieser Erscheinungen sind dieselben. Unterschiede weisen sie allerdings in Transportkapazitäten, resultierenden Formen und Reichweiten auf. Ein Sandsturm in der Sahara kann durchaus Partikel soweit in die Höhe befördern, dass diese durch Höhenströmungen mehrere tausende Kilometer weit bis nach Mitteleuropa transportiert werden. Ebenso unterscheiden sich die transportierten Partikelgrößen. Wind kann Sand meist nur in Bodennähe über kurze Distanzen transportieren, wohingegen Wasser Schluff- oder Tonpartikel von der Quelle bis zur Mündung mitführen kann. Durch Sedimentation und Erosion entstehende Formen haben zahlreiche Ausprägungen und sind im Detail noch längst nicht alle erforscht oder verstanden.

Viele Probleme des Gewässerbaus beschäftigen sich mit der Entstehung und dem Verschwinden dieser Formen am Gewässerboden. Gerinnebettformen entstehen unter den unterschiedlichsten Fließ- und Strömungsbedingungen und beeinflussen diese wiederum. Alltagsbeispiele wären zum einen Sandbänke, welche unter Hochwassersituationen entstehen und bei Niedrigwasser aus der Wasseroberfläche herausragen oder sogar trocken fallen. Zum anderen spielen „Ausspülungen“ um Hindernisse eine gewichtige Rolle bei der Konstruktion und Planung von Gewässerbauwerken wie Brücken, Molen, Buhnen oder Wehren. Diese Kolke werden durch Abtransport von Material hervorgerufen und zeigen vielfältige Unterschiede in Form und Größe.

Praktische Beispiele zeigen, dass Sedimenttransport als Folge einer Erosion des Gerinnebettes bis in eine Tiefe der Fundamente von Brücken und anderen Gewässerbauwerken ergeben kann. Resultierende strukturelle Instabilitäten gefährden die gesamte Konstruktion.

tion und können im Extremfall zu einem Kollaps des Bauwerks führen. Ein gut dokumentiertes Beispiel für einen durch Kolkung verursachten Brückeneinsturz findet sich im strukturellen Versagen der *Schoharie Bridge*, einer Autobahnbrücke nahe Amsterdam, New York. Heftige Regenfälle und einsetzende Schneeschmelze führten zu einem 50-jährigen Hochwasser. Die starken Strömungsbedingungen verursachten die Ausbildung von Kolken an den Fundamenten der einzelnen Pfeiler. Anhaltende Erosion vertiefte die Kolke bis in eine kritische Tiefe, ab der es zur Instabilität der Brücke kam. Der abrupte Einsturz forderte zehn Menschenleben und zerstörte die Brücke vollständig (Storey & Delatte, 2003).

An exemplarischen Beispielen in Abbildung 1.1 sind die Ausmaße aufgezeigt, welche Erosion an Wasserbauwerken oder allgemeinen Hindernissen annehmen kann. Zu beachten sind die Maßstabsunterschiede zwischen den Kolken in den Abbildungen 1.1a und 1.1c. Obwohl die Grundform des Kolks vergleichbar ist, sind Skalensprünge von *cm* auf *m* nicht zu vernachlässigen.

Problemstellung

Zur Untersuchung des Sedimenttransports und der resultierenden Gerinnebettformen werden große Versuchskanäle (engl. *flume*, Abbildung 1.2) gebaut, in denen unter genau definierten Bedingungen die Entstehung dieser Formen dokumentiert wird. Da hier jedoch immer lediglich eine spezielle Situation in einem Versuchsaufbau nachgestellt werden kann, ist ein sehr hoher Kostenaufwand nötig, um einen Erkenntnisgewinn zu erhalten. Mit Hilfe einer numerischen Simulation ließen sich dagegen Kosten reduzieren und eine Erweiterung der Einsatzmöglichkeiten erreichen. Ein wichtiger Aspekt in diesen Simulationen ist die Modellierung des Sedimenttransports und dessen Teilprozesse. Nach Aufteilung in Suspensionstransport und Transport der Bettfracht stehen zwei Modelle zur Auswahl. Zum einen wird der Suspensionstransport durch eine Konzentrationsgleichung und der Betttransport durch die Exner-Gleichung beschrieben. Ausschlaggebend sind hierbei Korngröße, Reibungskoeffizienten, Gravitationskräfte, Rundungsgrad, Dichte des Fluids, Dichte des Sediments, Strömungsgeschwindigkeiten mit dazugehörigen Schubspannungen und Strömungsturbulenzen. Die Umlagerung von Sand, Schluff und anderen Feinstpartikeln bewirkt das Entstehen von sogenannten Gerinnebettformen. Beispiele finden sich im äolischen Bereich in Form von Dünen und Anwehungen von Sand, Schnee oder anderen ähnlichen Materialien. Im fluvialen Milieu bilden sich – angefangen bei

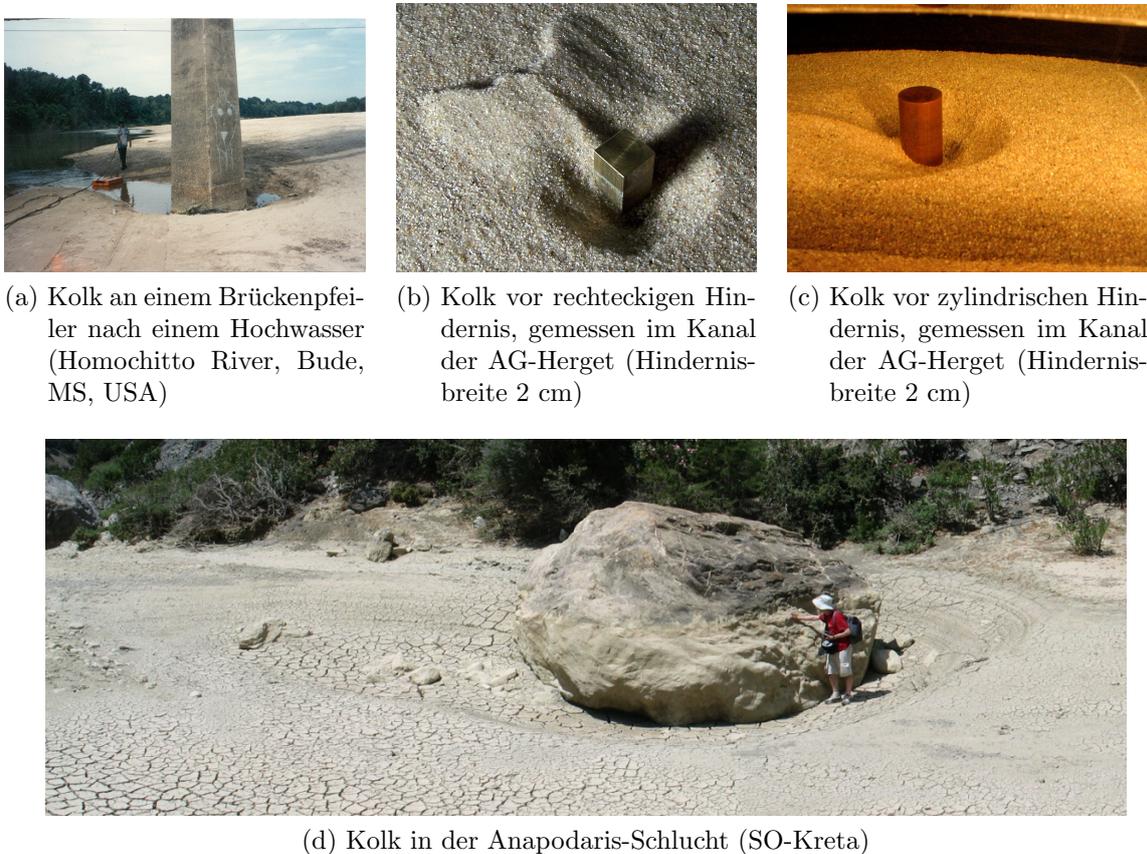


Abb. 1.1: Unterschiedliche Kolke aus Gelände- sowie Laborarbeiten

der kleinsten Form – Rippeln, Dünen, Kolke, Sandbänke und beliebige Kombinationen heraus.

Da gleichzeitig zum Sedimenttransport immer die Strömung zu simulieren ist, kommen in der Literatur häufig die Flachwassergleichungen oder auch Turbulenz gemittelte Modelle zur Strömungssimulation zum Einsatz und keine direkte numerische Simulation der ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichungen. Hintergrund ist, dass die begrenzte Auflösungstiefe im Verhältnis zur Rechnerkapazität eine Mittelung der Strömungsgleichungen nötig macht. Daraus resultierend müssen heuristische Methoden zur Schließung der Systeme eingesetzt werden. Da die Allgemeingültigkeit dieser Heuristiken nicht gegeben ist, gilt es zu beachten, dass unter gewissen Umständen keine realistischen Strömungsverhältnisse zu erwarten sind. Dementsprechend kann die Sedimententwicklung ebenfalls unrealistisch werden.

Zusätzlich rutschen natürliche Sedimente wie Sand, Kies oder ähnliche granulare Me-



Abb. 1.2: Schematischer Aufbau des hydraulischen Versuchskanals der AG-Herget am Geographischen Institut Universität Bonn

dien bei zu starker Anhäufung ab und bilden Schüttkegel aus. Die genannten Modellen können keine Rutschungsprozesse darstellen. Damit ist eine natürliche nach oben begrenzte Hangneigung nicht gegeben und beeinflusst wiederum die Resultate.

Die Kopplung des Sedimentmodells mit dem Strömungslöser stellt sich in der Art schwierig dar, dass aus dem Strömungsfeld die zugehörigen Schubspannungen zu berechnen sind. Eingesetzt in unterschiedliche empirische Geschiebetransportformeln resultieren Transportraten, die wiederum die Sedimenthöhe in jeder Gitterzelle verändern. Sich verändernde Sedimenthöhen variieren die Geometrie, welche als Fluidgebiet die Grundlage für das Berechnungsgebiet der Navier-Stokes-Gleichungen darstellt. Dieses Gebiet gilt es dynamisch zu verändern und damit plausible Geschwindigkeiten für die Berechnungen der Strömung zu setzen. Ebenfalls durch die Veränderung des Gebiets müssen Randbedingungen angepasst beziehungsweise neu gesetzt werden.

Lösungsansätze

Die Idee zur schrittweisen Lösung der beschriebenen Probleme besteht in dieser Diplomarbeit darin, zunächst die unterschiedlichen Transportarten aufzuschlüsseln und nach

der ursächlichen Wirkung zu sortieren. Entstehung und Bildung der angestrebten Gerinnebettformen sind hauptsächlich auf Betttransport zurückzuführen. Aus diesem Grund kommt die Exner-Gleichung zum Einsatz. Beginnend beim Konzept der Schubspannung als Eingangsgröße dieser Gleichung werden die durch den Navier-Stokes-Löser berechneten Geschwindigkeiten benutzt, um die Schubspannung zu bestimmen. Nach einer begründeten Einschränkung auf die Schubspannungsformel nach [Chanson \(1999\)](#) und die Meyer-Peter Müller-Formel wird die Berechnung der Exner-Gleichung mit Finiten Differenzen durchgeführt.

Zur realistischen Darstellung der dreidimensionalen Strömung kommt als Strömungslöser der parallele NaSt3DGP-Code zum Einsatz, welcher eine direkte numerische Simulation darstellt. Auf den vorgegebenen Gittern wird die Exner-Gleichung zu einem mit einem Upwind Schema erster Ordnung und zum anderen mit zentralen Differenzen diskretisiert.

Um etwaige Rutschungsprozesse im Sediment und die damit verbundene Obergrenze für Hangwinkel darzustellen, wird zusätzlich ein iterativer Gefällsbegrenzer implementiert. Über einen massenerhaltenden Verteilungsalgorithmus wird ein maximaler Hangwinkel eingehalten. Die resultierende Sedimentoberfläche soll dem Strömungslöser als Hindernisstruktur dienen. Dafür wird eine Neusetzung der Geometrie anhand der berechnete Sedimentoberfläche nötig.

Um den Einsatz leistungsstarker Parallelrechner zu ermöglichen, wird eine Parallelisierung mit MPI umgesetzt. Anhand der grundlegenden Beispiele Driven-Cavity und Doppelte Stufe werden Konvergenzstudien durchgeführt und an weiteren Beispielen prinzipielle Einsatzmöglichkeiten vorgestellt.

Eigene Beiträge

Zusammenfassend lassen sich die eigenen Beiträge wie folgt gliedern:

Theorie Begründete Einschränkung auf das Exner-Modell und Reduktion der Eingangsparameter auf die Prozess beeinflussenden Faktoren.

Implementierung Ermittlung der Schubspannung und des Betttransports aus den Geschwindigkeiten des Fluids. Anschließende Berechnung der Sedimenthöhe auf dem durch NaSt3DGP vorgegebenen Gitter mit Finiten Differenzen.

Einführung einer Sediment-CFL-Bedingung an die Zeitschrittweite des Löser.

Konstruktion eines massenerhaltenden Gefällsbegrenzers für einstellbare Winkel.

Erstellung eines Mappings der Sedimenthöhe auf die Geometrie von NaSt3DGP und anschließende Anpassung des Geschwindigkeitsfeldes. Dies führt zur Kopplung einer direkten numerischen Simulation der Strömung mit dem Exner-Modell.

Numerische Simulation Simulation grundlegender Testfälle und expliziter Vergleich eines unter Laborbedingungen entstandenen Kolks samt Sedimentrücken und einer numerischen Simulation.

Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Einer kurzen Vorstellung des verwendeten Strömungslöser in Kapitel 2 folgt in Kapitel 3 eine generelle Übersicht über jegliche Arten vorkommenden Sedimenttransports. Nach Aufschlüsselung in Suspension und Bettfracht werden in Kapitel 4 und 5 die jeweiligen Modelle erläutert und hergeleitet. Kapitel 5 beinhaltet insbesondere die Herleitung des Exner-Modells aus einem Mittelungsansatz. In Kapitel 6 wird nach der Erläuterung der Einsatzmöglichkeiten beider Modelle die Beschränkung auf das Exner-Modell begründet und ein kurzer Überblick über die betreffenden Gerinnebettformen gegeben. Kapitel 7 stellt die grundlegenden Einflussfaktoren und die Diskretisierungsarten der Exner-Gleichung vor. Auf die Details der Implementierung wird in Kapitel 8 eingegangen und der gesamte Algorithmus ausführlich erläutert. Im Kapitel 9 werden Konvergenzstudien an Testbeispielen durchgeführt, um anschließend Anwendungsbeispiele des Verfahrens aufzuzeigen. Ebenfalls in Kapitel 9 ist der Vergleich des ausgemessenen Kolks mit der numerischen Simulation ausführlich zu finden. Kapitel 10 fasst diese Arbeit zusammen und zeigt zusätzliche Verbesserungsmöglichkeiten und Ideen zur Weiterentwicklung auf.

2 NaSt3D Strömungslöser

Als numerische Grundlage für die Implementierung der Exner-Gleichung dient der bestehende Navier-Stokes Löser NaSt3DGP der Arbeitsgruppe Griebel. NaSt3DGP ist ein auf Finite Differenzen basierender paralleler dreidimensionaler Strömungslöser. Auf nicht notwendigerweise uniformen Gittern stehen folgende Optionen zur Verfügung:

- Runge-Kutta- oder Adams-Bashforth-Verfahren für die Zeitdiskretisierung
- QUICK, SMART und VONOS als Upwind-Schemata zur Diskretisierung des Konvektionsterms der Navier-Stokes Gleichungen
- Berechnung der Temperatur oder Konzentration chemischer Stoffe

Die Trennung des Fluides von festen Objekten, in denen keine Berechnung stattfinden soll, geschieht über ein sogenanntes Flag-Feld. Hiermit können mit Hilfe von Binärshifts einzelne Eigenschaften in die jeweiligen Zellen gesetzt werden. Konfigurierbar sind sowohl Haft- beziehungsweise Rutschbedingungen als auch Ein- oder Ausströmbedingungen. Eine Übersicht der einzelnen Flag-Typen findet sich in [Croce \(2002\)](#).

Zur Steuerung und Gebietsbeschreibung steht ein sogenanntes Scene-File zur Verfügung. Unterschiedliche Makros vereinfachen die Gebietsgestaltung, so dass mit Hilfe von Quadern (box), Kugeln (sphere), Zylindern (cylinder), Halbebenen (halfspace) und Polygonen (poly) komplizierte Geometrien erstellt werden können. Desweiteren lassen sich diese Elemente durch Schnitte und Vereinigungen miteinander kombinieren. Periodische Randbedingungen gegenüberliegender Seiten des Gebietes lassen die Reduktion des dreidimensionalen Löser auf zweidimensionale Probleme zu. Weitere Einstellungsmöglichkeiten betreffen Randbedingungen der einzelnen Flächen des Gebietes, so dass Rutsch-, Haft- und Einström- beziehungsweise Ausströmbedingungen gesetzt werden können. Gebietszerlegungsverfahren und MPI (*message passing interface*) ermöglichen eine Parallelisierung des Löser, so dass höhere Auflösungen für die gegebenen Probleme auf einem

Parallelrechner berechenbar werden. Für weitere und ausführlichere Informationen sei hier auf [Croce \(2002\)](#) verwiesen.

Dieser vorhandene Löser wird in dieser Arbeit derart angepasst, dass sich in jedem Zeitschritt das Sedimentbett aktualisiert. Ziel wird es sein, einen parallelen Strömungslöser mit sich verändernden Sedimentbett zu erstellen. Hierzu wird das System der bestehenden Navier-Stokes-Gleichungen um die Exner-Gleichung erweitert.

3 Sedimenttransport

Sedimenttransport beinhaltet fast alle Korngrößen. Die kleinste Fraktion der Tonpartikel ($d < 0,0002\text{ mm}$) wird einmal in Bewegung gesetzt als Schwebfracht sowohl von Wasser als auch von Wind bis zum absoluten Stillstand der Strömung mitgeführt. Als nächst Größere folgt Schluff ($d < 0,063\text{ mm}$), welcher ebenso als Schwebfracht transportiert wird, wobei der äolische Transport nicht so weitreichend ist wie der fluviale. Äolisch transportierter Schluff wird als Löss wieder abgelagert. Die zur Bildung von Gerinnebettformen wichtigste Kornfraktion ist Sand ($d < 2\text{ mm}$). Durch die zunehmende Korngröße wird Sand hauptsächlich in Bodennähe als Bodenfracht transportiert, so dass die Transportreichweiten sehr viel kleiner sind, als dies bei Schluff oder Ton der Fall ist. Nach Sand folgen in aufsteigender Reihenfolge Kies ($d < 63\text{ mm}$) und Steine ($d < \infty$). Kiestransport stellt einen großen formbildenden Faktor in Flüssen und Bächen dar, so dass die meisten Formen in Flüssen aus Kiesen bestehen. Eine genauere Aufschlüsselung der einzelnen Kornfraktionen ist der Tabelle 3.1 zu entnehmen.

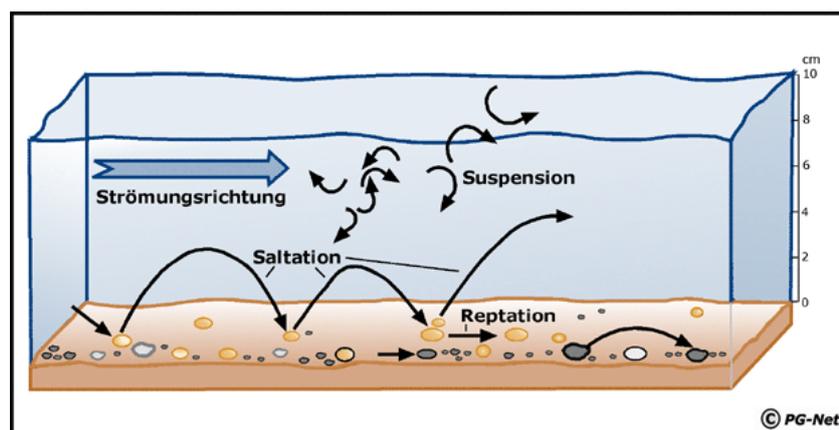


Abb. 3.1: Unterschiedliche Arten des Sedimenttransportes

Je nach Größe des Sedimentkorns und Transportkapazität des Fluids sind die Transportreichweiten unterschiedlich lang. Wind kann höchstens Sand noch als springende

Tabelle 3.1: Korngrößenklassifikation nach DIN 4022

Bezeichnung		Durchmesser
Großgruppe	Kleingruppe	in mm
Steine	Blöcke	$200 < d$
	Geröll / Schotter	$63 < d < 200$
Kies	Grobkies	$20 < d < 63$
	Mittelkies	$6,3 < d < 20$
	Feinkies	$2 < d < 6,3$
Sand	Grobsand	$0,63 < d < 2$
	Mittelsand	$0,2 < d < 0,63$
	Feinsand	$0,063 < d < 0,2$
Schluff	Grobschluff	$0,02 < d < 0,063$
	Mittelschluff	$0,0063 < d < 0,02$
	Feinschluff	$0,002 < d < 0,0063$
Ton	Grobton	$0,00063 < d < 0,002$
	Mittelton	$0,0002 < d < 0,00063$
	Feinton	$0 < d < 0,0002$

Körnchen transportieren aber keinen Kies mehr, wohingegen in Flüssen selbst bei normalen Wasserständen und den damit verbundenen Abflussraten Schotter und Gerölle transportiert werden. Unter extremeren Hochwässern werden sogar Blöcke transportiert. Die beiden hauptsächlichen Transportarten sind Suspension und Bodenfracht.

Als Suspensionsfracht werden alle über einen längeren Zeitraum schwebend transportierten Sedimente bezeichnet. Übliche Kornfraktionen sind hierbei Ton und auch Schluff. Sande oder Kiese werden für gewöhnlich nicht als Suspensionsfracht betrachtet, obwohl Ausbruchflutwellen auch Sande und Kiese für kurze Momente der Suspensionsfracht zuführen können. Suspensionsfracht hat den größten Anteil am Gesamttransport, allerdings wird häufig der formbildende Charakter als gering angegeben, da es zur Sedimentation sehr geringe Strömungsgeschwindigkeiten benötigt. Lediglich in Sedimentationsbereichen

wie Auen oder Totwässern kommt es zur Bettbildung durch Suspensionsfracht ([Zanke, 2002](#)).

Bodenfracht als zweiter Teil des Gesamttransports bezeichnet alle Transportarten in der Nähe des Bodens. Aufgeteilt in springende (Saltation), rollende und schiebende Partikel bildet dieser Bereich die Bodenfracht oder auch Geschiebe. Hierbei sind die Prozesse im fließenden Übergang, da ein rollendes Teilchen durch kleinste Veränderungen der Strömungssituation in Saltation übergehen kann und umgekehrt. Hierbei spielen wieder die Korngröße und die Transportkapazität der Strömung die entscheidende Rolle. Eine schematische Darstellung der einzelnen Transportarten findet sich in [Abbildung 3.1](#).

4 Konzentrationsgleichung

Um beide Transportarten in mathematischen Gleichungen ausdrücken zu können, wird in den folgenden Kapiteln zum einen der Suspensionstransport mit Hilfe der Konzentrationsgleichung modelliert und zum anderen der Betttransport mit der Exner-Gleichung in ein mathematisches Modell gefasst. Beide Modelle können über eine allgemeine Kontinuitätsgleichung gewonnen werden.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.1)$$

Angepasst auf die jeweiligen Materialien ergeben sich auf der einen Seite die Konzentrationsgleichung $\rho = c$ und auf der anderen die Exner-Gleichung. Zuerst wird die Konzentrationsgleichung vorgestellt und deren unterschiedliche Varianten erklärt.

4.1 Herleitung

Die, der Herleitung der Konzentrationsgleichung, zugrunde liegende Überlegungen lassen sich vereinfacht wie folgt zusammenfassen. Massenanteile der gelösten Feinsedimente sind im Vergleich zur Wassermasse sehr gering und die Partikel so klein, dass die Partikelgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit des umgebenden Wassers gleich zu setzen ist ($\vec{u}_{\text{Sediment}} = \vec{u}_{\text{Wasser}}$). Dadurch gilt für den Lösungstransport die inkompressible Kontinuitätsgleichung.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c \vec{u}) = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Unter der Annahme, dass größere, in Suspension befindliche, Partikel eine nicht mehr vernachlässigbare Masse besitzen, liegt es nahe, Gravitationskräfte auf die jeweiligen Partikel wirken zu lassen. Folglich muss für größere Partikel eine Sinkgeschwindigkeit w_g hinzugefügt werden. Mit

$$\vec{u}_c := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w + w_g \end{pmatrix}$$

folgt:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\vec{u}) + \frac{\partial w_g c}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

Diffusion von feinsten Partikeln spielt eine weitere zu berücksichtigende Rolle. Deswegen muss der durch diffusive Prozesse entstandene Massestrom zum bisherigen Modell hinzugefügt werden. Hierzu wird das erste Ficksche Gesetz herangezogen, welches aussagt, dass der durch Diffusion entstandene Massestrom immer in Richtung des negativen Konzentrationsgradienten entsteht:

$$Q_{diff} = -K\nabla c$$

In vorstehender Gleichung steht K für eine Diffusivitätskonstante. Werte für K von Sedimenten in Wasser sind nur schwer zu finden. Eine Laborstudie zu dieser Problematik findet sich in [Officer \(1982\)](#), aus welcher Werte für K im Falle der Sedimentsuspension in den Größenordnungen 10^{-7} hervorgehen. Eingesetzt in Gleichung 4.2 folgt:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}_c c - K\nabla c) = 0$$

Mit $\operatorname{div} \vec{u} = 0$

$$\operatorname{div}(\vec{u}_c c) = c \cdot \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \nabla c + \frac{\partial w_g c}{\partial z} = \vec{u} \nabla c + \frac{\partial w_g c}{\partial z}$$

folgt die nicht konservative Form der Konzentrationsgleichung.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \underbrace{\vec{u} \nabla c}_{\text{Advektion}} + \underbrace{\frac{\partial w_g c}{\partial z}}_{\text{Absinken}} = \underbrace{\operatorname{div} K (\nabla c)}_{\text{Diffusion}} \quad (4.3)$$

In Gleichung 4.3 sind den jeweiligen Termen die einzelnen Prozessen zugeordnet. Den Advektionsprozess modelliert $\vec{u}\nabla c$, gravitationsbedingtes Absinken einzelner Partikel wird durch $\frac{\partial w_g c}{\partial z}$ simuliert und die Diffusion wird durch $\text{div } K\nabla c$ dargestellt.

4.2 Anwendungsbeispiele

Zur Anwendung kommt die Konzentrationsgleichung in Fällen in denen Suspensions-transport und der Weg im Fluid von Interesse sind. Als Beispiele wären industrielle Schadstoffe, wie Lacke und Farben, zu nennen. Feinsedimente wie Tone und Feinschluffe werden ebenfalls in Suspension transportiert und bilden Schlick- oder Schlammdecken in strömungsfreien Bereichen, wie Auen oder Altarmen. Ausgewählte Arbeiten in diesen Bereichen sind: [Campos \(2001\)](#) für den Aspekt der Simulation von Sedimenten in Wasserrückhaltebecken, [Amoudry & Liu \(2009\)](#) zur Kolkung hinter Hindernissen und [Yoon & Kang \(2005\)](#) zu allgemeinen Suspensionsprozessen.

5 Exner-Gleichung

Das Hauptaugenmerk in dieser Arbeit soll auf Klarwasserbedingungen liegen, so dass eine detaillierte Herleitung der Exner-Gleichung, welche die Bettbildung durch Bodenfracht beschreibt, von Nöten ist.

5.1 Herleitung aus Massenbilanz

Als Herleitung der Exner-Gleichung gilt eine bereits 1925 von Exner vorgestellte Version:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \nabla \cdot q_s = 0$$

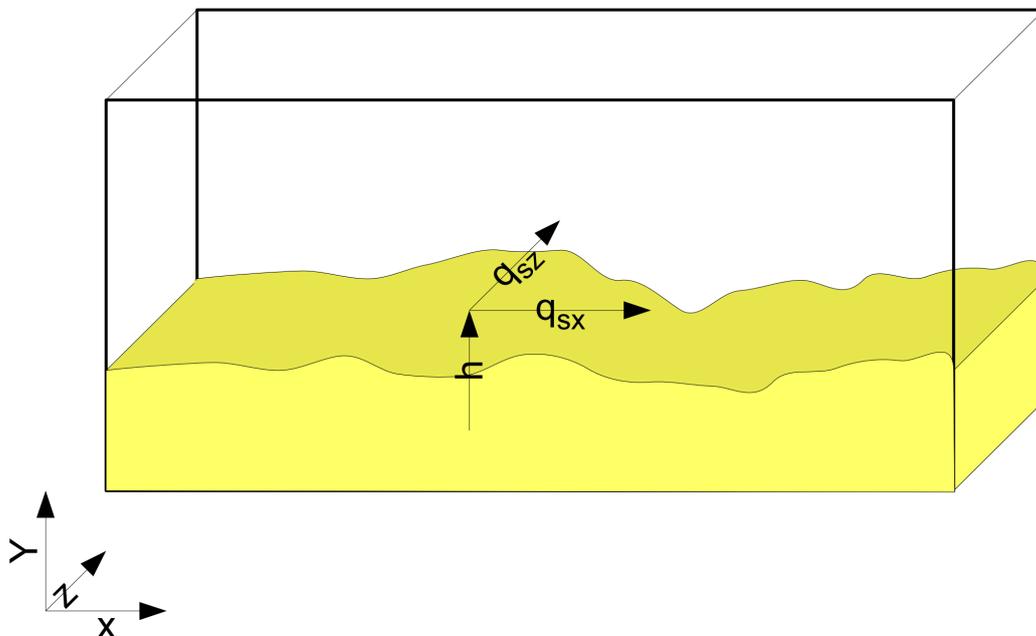


Abb. 5.1: Vereinfachtes Schema zur Exner-Gleichung

Mit der Variablen h wird im allgemeinen eine positive Höhe zu einem tiefer im Sedimentkörper liegenden Basisniveau bezeichnet.

Weitere Annahmen, die in diesem Modell getroffen werden:

- Kontinuierliches Sediment
- Höhenveränderung als direkte Konsequenz der Massenveränderung
- Alle weiteren Einflüsse werden in Quell- und Senktermen zusammengefasst

Die Beschränkung auf kontinuierliches Sedimentes vernachlässigt die Eigenschaften einzelner Körner. Somit werden diskrete Massen, also einzelne Körner, auf einer Makroskala als ein Kontinuum betrachtet und lassen damit nicht jeden beliebigen Skalenwechsel zu. Dadurch käme es zur Situation, dass kleinere Massen ausgetauscht werden könnten als es die kleinsten Körner zu ließen.

Ebenso verhält es sich mit der zweiten Annahme, dass sich jede Massenänderung direkt in einem Zuwachs oder einer Abnahme der Höhe bezüglich des Basisniveaus widerspiegelt. Mögliche dichtere Kornpackungen werden nicht berücksichtigt. Um diesen Missstand zu korrigieren, wird ein Vorfaktor ε_0 eingeführt, welcher die Sedimentporosität beschreiben soll. Nach [Parker \(2004\)](#) sind Werte zwischen 0,45 und 0,75 mögliche Parameter, wobei eine dichteste Kugelpackung $\varepsilon_0 = 0,74048$ ergibt. Quell- und Senkterme stellen einen weiteren Versuch dar, äußere Einflüsse einzufangen. Die Auswahl der Senk- und Quellterme muss sorgfältig getroffen werden, da sich hiermit unterschiedlichste Möglichkeiten der Modellbeeinflussung ergeben. Häufig finden sich Suspensionstransport, tektonische Hebungen des Basisniveaus und andere externe Stoffeinträge in diesen Termen wieder.

In dieser Arbeit wird komplett auf Senk- und Quellterme verzichtet. Eine Beschränkung auf die einfachste Form der Exner-Gleichung wird durch die Validierung mit Labordaten unterstützt, da in diesen geschlossenen Systemen äußere Einflüsse fast gänzlich ausgeschlossen werden können.

Die einfachste Überlegung zur Aufstellung einer Massenbilanz ist, dass in jedem Punkt die zeitliche Veränderung der Sedimenthöhe h gleich der Summe der räumlichen Verände-

rungen der Ein- und Austräge des Sedimentes in die Raumrichtungen q_{sx} und q_{sz} parallel zum Basisniveau in diesem Punkt ist (Abbildung 5.1).

Fügt man noch die Quellen und Senken in die Gleichung ein, folgt eine Massenbilanzgleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \nabla \cdot q_s + \text{Senken} + \text{Quellen} = 0 \quad (5.1)$$

Die Höhe h bezeichnet den Abstand zum Basisniveau. Die von der Geschwindigkeit abhängigen Geschiebevolumenformel wird mit q_s benannt. Geschiebetransport beziehungsweise Geschiebevolumen werden in der Praxis durch empirisch ermittelte Gleichungen ausgedrückt, welche in großer Anzahl in der Literatur zu finden sind und sorgfältig ausgewählt werden müssen. Genauere Erläuterung der jeweiligen Modelle finden sich in Kapitel 7.2.

5.2 Varianten

Eine kurze Übersicht über einige Varianten der Exner-Gleichung soll die große Variationsbreite der gezeigten Formel verdeutlichen. Vollständigkeit kann nicht erreicht werden, da die ursprüngliche Gleichung Exners für viele Probleme angepasst wurde. Die Hinzunahme zusätzlicher Terme, welche eine numerische Behandlung vereinfachen, Suspensionsverluste und ähnliche kompensieren sollen, verändert die Grundgleichung. Ebenso verändert die Variation der empirischen Konstante, welche in den vorangegangenen Erläuterungen mit $\frac{1}{\varepsilon}$ bezeichnet wurde, das Modell. Ebenso wie Long et al. (2008) arbeiten Liu & Garcia (2006) mit einer Porositätskonstante n . Li et al. (2008) fügen einen Senkenterm hinzu, welcher unterschiedliche Kornfraktionen berücksichtigen soll. Zum Beispiel in kleinere Fraktionen zerfallene Schotter, welche in den Transport übergehen. Ähnliche Senkterme finden sich in Marek (2001) zur Simulation einer konstanten Suspensionsabgabe an das umgebende Wasser.

Da in dieser Arbeit der Schwerpunkt auf der Implementierung und numerischen Behandlung der ursprünglichen Exner-Gleichung liegen soll, wird sich im Folgenden auf die Gleichung 5.1 bezogen.

Tabelle 5.1: Varianten der Exner-Gleichung

Formel	Grund der Veränderung	Author
$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{1-n} \cdot \nabla \cdot q_s = 0$	n als Porositätsfaktor	Liu & Garcia (2006), Long et al. (2008)
$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{1-n} \cdot \nabla \cdot q_s = z_0$	z_0 soll beim Transport zerfallendes Sediment modellieren	Li et al. (2008)
$(1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} = D_b - E_b + \frac{1}{L_s} (q_b - q_b^*)$	Letzter Term modelliert gravitative Effekte auf das Sedimentbett (Wu, 2004)	Wu & Wang (2005)
$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{1-n} \cdot \nabla \cdot q_s = \frac{\Phi_s}{\rho_{dep}}$	Φ_s stellt den vertikalen Sedimentaustrag dar. Entweder Suspension oder Saltation aus dem betrachteten Gebiet heraus.	Marek (2001)

5.3 Herleitung aus Mittelungsansatz

Neben der einfachen Exner-Gleichung 5.1 wird eine weitere Möglichkeit der Herleitung durch Homogenisierung der punktwisen Massengleichung in einem Sediment-Wasser-Gemisch ausführlich dargestellt. Der nachfolgend vorgestellte Weg ist eine detailliertere Ausführung des von Coleman & Nikora (2009) durchgeführten Mittelungsprozesses an deren Ende eine allgemeine Version der Massenerhaltungsgleichung steht. Zur besseren Lesbarkeit wird auf eine vereinfachte Notation zurückgegriffen. Beginnend mit der lokalen punktwisen Massenerhaltung wird durch räumliche und zeitliche Mittelung eine allgemeinere Form der Exner-Gleichung hergeleitet.

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s u_{si})}{\partial x_i} = 0 \quad (5.2)$$

In jedem dieser Terme steht der Index s für Sediment, womit ρ_s für die Sedimentdichte und u_{si} für die lokale Geschwindigkeit in Richtung x_i steht. Für die räumliche Mittelung dieser Gleichung passen Coleman & Nikora (2009) zwei Mittelungssätze aus Whitaker (1998) auf die Sedimentphase an:

$$\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi_s \langle f_s \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V_s} \int_{S_I} f_s u_I \cdot n \, dS \quad (5.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi_s \langle f_s \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{V_s} \int_{S_I} f_s \cdot n \, dS \quad (5.4)$$

Für jede Funktion f_s gilt, innerhalb der Sedimentphase $f_s|_{Fluid} = 0$. Die Sedimentkonzentration $\phi_s := V_s/V_0$ wird über das Verhältnis von Sedimentvolumen V_s zu Kontrollvolumen V_0 definiert. Das hier beschriebene Kontrollvolumen V_0 ist als dz feine Scheibe in XY -Richtung zu verstehen. Die lokale Geschwindigkeit des Sediment-Fluid-Interface I wird mit u_I angegeben. Mit den Sätzen konnte die Mittelung über ein Volumen auf die zeitliche Veränderung der Sedimentkonzentration und auf die Mittelung über den Rand S_I zurückgeführt werden. Weiterhin beschreibt $\langle \cdot \rangle$ den üblichen räumlichen Mittelungsoperator:

$$\langle f_s \rangle = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} f_s dV$$

Wird Gleichung 5.2 mit Hilfe dieser Operatoren über das Kontrollvolumen V_0 gemittelt ergeben sich folgende Schritte:

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s u_{si})}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi_s \langle \rho_s \rangle}{\partial t} && - \frac{1}{V_s} \int_{S_I} \rho_s u_I \cdot n dS \\ &+ \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi_s \langle \rho_s u_{si} \rangle}{\partial x_i} && + \frac{1}{V_s} \int_{S_I} \rho_s u_{si} \cdot n dS \\ &= \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi_s \langle \rho_s \rangle}{\partial t} && + \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi \langle \rho_s u_{si} \rangle}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\frac{\partial \phi_s \langle \rho_s \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \phi_s \langle \rho_s u_{si} \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (5.5)$$

Hier wurde benutzt, dass Sedimentgeschwindigkeit und Sediment-Fluid-Geschwindigkeit in Richtung x_i eingeschränkt auf I gleich sind:

$$u_{si}|_I = u_I$$

Die gewonnene Gleichung 5.5 stellt ein makroskopisches Modell dar und ist von der Größe des Kontrollvolumens V_0 abhängig.

In Gleichung 5.5 wurde ϕ_s als nicht veränderlich in der Zeit angenommen. Um unterschiedlich schnelle, zeitliche Veränderungen der Sohle in Verbindung mit Fluidströmungen zu berücksichtigen, muss eine zeitliche Mittelung durchgeführt werden. Der Zeitraum

T_0 beschreibt das komplette Zeitintervall, wohingegen T_s lediglich die Zeit beschreibt, in der die Punkte ausschließlich von Sediment belegt sind. Dass sich aus T_s und T_0 ergebene Verhältnis $\phi_t := T_s/T_0$ stellt den zeitlichen Gegenpart zu ϕ_s dar und beschreibt das Verhältnis der Summe der Abschnitte als sich tatsächlich Sediment im betrachteten Punkt über das gesamte Zeitintervall befand.

$$\left\langle \phi_t \overline{\frac{\partial f_s}{\partial t}} \right\rangle = \frac{1}{\phi_{sm}} \frac{\partial \phi_{sm} \langle \phi_t \overline{f_s} \rangle}{\partial t} - \frac{1}{\phi_{sm}} \frac{1}{V_0} \overline{\int_{S_I} f_s u_I \cdot n dS}^S \quad (5.6)$$

$$\left\langle \phi_t \overline{\frac{\partial f_s}{\partial x_i}} \right\rangle = \frac{1}{\phi_{sm}} \frac{\partial \phi_{sm} \langle \phi_t \overline{f_s} \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{\phi_{sm}} \frac{1}{V_0} \overline{\int_{S_I} f_s \cdot n dS}^S \quad (5.7)$$

Überstrichene Terme bedeuten zeitliche Mittelung und ein hochgestelltes S in Verbindung mit einem Mittelungsoperator $\langle \cdot \rangle$ beziehungsweise $\overline{\cdot}$ steht für eine Mittelung über die Oberfläche der gesamten Gebiete V_0 beziehungsweise T_0 . Mit V_m wird der Teil von V_0 beschrieben in dem $\phi_t \neq 0$, also sowohl zeitlich als auch räumlich gemittelt von Sediment gefüllt ist. Weiterhin wird $\phi_{sm} := V_m/V_0$ gesetzt. Beide Theoreme wurden in [Coleman & Nikora \(2009\)](#) hergeleitet und sind geringfügig auf Sedimenttransport angepasst worden. Gleichung 5.2 gemittelt über die Oberfläche ergibt:

$$\left\langle \overline{\left[\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s u_{si})}{\partial x_i} \right]}^S \right\rangle^S = \frac{\partial \phi_{sm} \langle \phi_t \overline{\rho_s} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{sm} \langle \phi_t \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (5.8)$$

Hierbei wurden ähnliche Überlegungen wie in 5.5 und folgende Tatsachen benutzt:

$$\overline{f}^S = \phi_t \overline{f}; \quad \implies \langle \overline{f}^S \rangle^S = \langle \phi_t \overline{f} \rangle^S = \phi_{sm} \langle \phi_t \overline{f} \rangle$$

In 5.8 kann ϕ_t auf Grund der Linearität der Mittelungsoperatoren ($\langle \phi_t \overline{f} \rangle = \langle \phi_t \rangle \langle \overline{f} \rangle$) herausgezogen werden und somit folgt:

$$\frac{\partial \phi_{st} \langle \overline{\rho_s} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{st} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (5.9)$$

Gleichung 5.9 stellt das doppelt gemittelte Pendant zu 5.5 dar. Als Gegenstück zu ϕ_s ist $\phi_{st} := \phi_{sm} \langle \phi_t \rangle$ die räumliche und zeitliche mittlere Sedimentkonzentration.

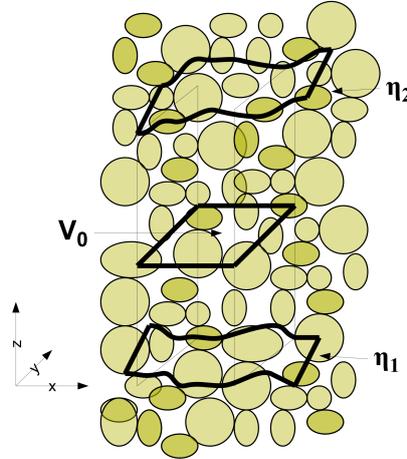


Abb. 5.2: Isoplächen in der Sedimentschicht (verändert nach Coleman & Nikora (2009))

Um nun die eigentliche Exner-Gleichung herzuleiten, wird 5.9 in Z -Richtung integriert. Als Integrationsgrenzen werden variable Isoplächen $\eta_1(x, y, t)$ und $\eta_2(x, y, t)$ eingeführt, so dass die Massenveränderung in der Schicht zwischen beiden Isoplächen erfasst wird. Eine schematische Darstellung der vertikalen Anordnung der jeweiligen Flächen zeigt Abbildung 5.2.

Weiteres Hilfsmittel für die Herleitung ist die Leibnizregel für Integrale mit veränderlichen Grenzen jeweils in t beziehungsweise in x_i :

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y, z, t) dz - f_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \quad (5.10)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x_i} dz = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y, z, t) dz - f_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_i} + f_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} \quad (5.11)$$

Die Funktionsauswertung von f auf den Isoplächen η_1 beziehungsweise η_2 sind mit f_1 und f_2 benannt.

Die Operatoren $\langle \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot \rangle_2$ stellen die räumlichen Mittelungen auf den Isoplächen η_1 und η_2 dar. Des weiteren gelten:

$$\begin{aligned} \phi_{st_1} &:= \phi_{sm} \langle \phi_{t_1} \rangle = \phi_{sm} \left\langle \frac{T_{S_1}}{T_0} \right\rangle \\ \phi_{st_2} &:= \phi_{sm} \langle \phi_{t_2} \rangle = \phi_{sm} \left\langle \frac{T_{S_2}}{T_0} \right\rangle \end{aligned}$$

Nach Intergration von 5.9 folgt:

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial \phi_{st} \langle \overline{\rho_s} \rangle}{\partial t} dz & + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial \phi_{st} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle}{\partial x_i} dz \\
= & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\phi_{st} \langle \overline{\rho_s} \rangle) dz & - \phi_{st_2} \langle \overline{\rho_s} \rangle_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \phi_{st_1} \langle \overline{\rho_s} \rangle_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \phi_{st} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle dz & - \phi_{st_2} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_i} + \phi_{st_1} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} \\
= & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\phi_{st} \langle \overline{\rho_s} \rangle) dz & + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \phi_{st} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle dz \\
& - \phi_{st_2} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_i} & - \phi_{st_2} \langle \overline{\rho_s} \rangle_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \\
& + \phi_{st_1} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} & + \phi_{st_1} \langle \overline{\rho_s} \rangle_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial t}
\end{aligned}$$

Aus der Vorstellung, dass die zeitliche Änderung der Isoflächen η_1 und η_2 gleich dem räumlichen Weitertransport mit den Geschwindigkeiten u_{I1} beziehungsweise u_{I2} ist, folgt:

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial t} + \langle \overline{u_{In}} \rangle \frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} = 0$$

Eine ausführlichere Herleitung findet sich in Coleman & Nikora (2009). Weiterhin gilt der doppelt gemittelte Sedimentmassenfluss in der Schicht zwischen η_1 und η_2 in die jeweilige Richtung x_1 und x_2 :

$$g_{sx_i} := \int_{\eta_1}^{\eta_2} \phi_{st} \langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle dz$$

Eingesetzt in die obere Gleichung und nach Zusammenfassen gleichartiger Terme ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\phi_{st} \langle \overline{\rho_s} \rangle) dz + \frac{\partial g_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{sy}}{\partial y} \\
& - \phi_{st_2} \left(\langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle_2 - \langle \overline{\rho_s} \rangle_2 \langle \overline{u_{I2}} \rangle \right) \frac{\partial \eta_2}{\partial x_i} \\
& + \phi_{st_1} \left(\langle \overline{(\rho_s u_{si})} \rangle_1 - \langle \overline{\rho_s} \rangle_1 \langle \overline{u_{I1}} \rangle \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die zeitliche Änderungsrate der Sedi-

mentmasse wiederum in der Schicht zwischen η_1 und η_2 . Letztere beiden Terme sind als Flüsse des Sediments in Normalenrichtung zu den zugehörigen Isoflächen η_1 und η_2 zu verstehen, welche aus der relativen Bewegung der beiden Isoflächen zueinander entstehen. Auch hier sei für eine ausführlichere Beschreibung auf [Coleman & Nikora \(2009\)](#) verwiesen.

Gleichung 5.12 lässt sich als allgemeine Exner-Gleichung interpretieren und besagt, dass die zeitliche Sedimenthöhenveränderung gleich der Summe der Massenflüsse über die Grenzflächen ist. Zusammengefasst heißt dies, dass die Masse erhalten bleibt.

Aus 5.12 lassen sich durch unterschiedliche Annahmen unterschiedliche Versionen und auch die „übliche“ Form der Exner-Gleichung herleiten. Zuerst ergibt sich aus der Annahme, dass sowohl zeitlich als auch räumlich konstante Dichte im Sediment ρ_s herrscht folgende Gleichung:

$$q_{sxi} := \frac{g_{sxi}}{\rho_s} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \phi_{st} \langle \overline{u_{si}} \rangle dz$$

Zweitens wird die übliche Exner-Gleichung von der Wasseroberfläche η_2 bis zu einer im Sedimentkörper liegenden Isofläche η_1 aufgestellt. Aus konstanten ϕ_{st} folgt die Trennung zwischen Suspensionstransport q_{ss} und Betttransport q_{sb} entlang η_{bs} als Sedimentoberfläche. Ohne jeglichen Transport durch die Wasseroberfläche ($\langle \overline{u_{si}} \rangle_2 = \langle \overline{u_{I2}} \rangle$) und dass η_1 tief genug liegt, so dass keine Sedimentbewegungen vorhanden sind ($\langle \overline{u_{si}} \rangle_1 = \langle \overline{u_{I1}} \rangle = 0$), folgt nach Aufteilung in die Abschnitte von η_1 bis η_{bs} und von η_{bs} bis η_2 aus 5.12 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_1}^{\eta_{bs}} (\phi_{st}) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_{bs}}^{\eta_2} (\phi_{st}) dz + \frac{\partial q_{sbx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sby}}{\partial y} + \frac{\partial q_{ssx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ssy}}{\partial y}$$

Unter der weiteren Annahme der konstanten Sedimentkonzentration ϕ_B im gesamten Bett

$$\phi_B := \phi_{st}|_{(\eta_1, \eta_{bs})}$$

und zeitlich konstanter Isofläche η_1 also $\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = 0$ folgt:

$$\frac{\partial \eta_{bs}}{\partial t} = -\frac{1}{\phi_B} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_{bs}}^{\eta_2} (\phi_{st}) dz - \frac{1}{\phi_B} \left(\frac{\partial q_{sbx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sby}}{\partial y} + \frac{\partial q_{ssx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ssy}}{\partial y} \right) \quad (5.13)$$

Die Suspensionskonzentration wird durch $\int_{\eta_{bs}}^{\eta_2} (\phi_{st}) dz$ beschrieben. Im Fall von Sandkörnern kann die Sedimentkonzentration im Bett ϕ_B als Porosität oder Packungsdichte der Körner interpretiert werden. Nach Aufteilung des Gesamttransports q_{sx} in Suspensions-

(q_{ss}) und Betttransport (q_{sb}) kann der Suspensionsanteil in 5.13 durch die Konzentrationsgleichung modelliert werden. Jedoch wird dieser häufig ganz vernachlässigt. Gestützt wird diese Vernachlässigung durch empirische Beobachtungen dass sich Bettformen auch unter Klarwasserbedingungen, also ohne Suspension, bilden (Zanke, 2002). Als weitere Vereinfachung geht ein, dass die Suspensionskonzentration im Wasser zeitlich konstant bleibt.

Im folgenden Verlauf dieser Arbeit wird der Suspensionstransport (q_{ss}) vernachlässigt und die vereinfachte Form der Exner-Gleichung benutzt:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\phi_B} \left(\frac{\partial q_{sbx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sby}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} (\nabla \cdot q_{sb}) \quad (5.14)$$

Hiermit ist die Form der zu Anfang angeführten Formel 5.1 hergestellt, wobei durch die vorangegangene Herleitung die heuristisch aufgestellte Gleichung 5.1 auf eine solide Basis gestellt werden konnte.

6 Anwendbarkeit und Vergleich beider Modelle

Im folgenden sollen Anwendungsbereiche sowie Vor- und Nachteile beider vorgestellten Modelle diskutiert werden. Nicht alle Problemstellungen lassen sich mit beiden Gleichungen modellieren, so dass eine kurze Übersicht der bisherigen Anwendungsbeispiele gegeben werden soll.

6.1 Anwendungsbereiche

Beispiele in denen die Konzentrationsgleichung benutzt wurde, finden sich in [Amoudry & Liu \(2009\)](#), [Campos \(2001\)](#) oder [Yoon & Kang \(2005\)](#). In diesen Fällen wurde die Strömung durch ein zweidimensionales $k - \varepsilon$ -Modell simuliert, um anschließend den Transport und die Ablagerung der gelösten Stoffen mit Hilfe der Konzentrationsgleichung zu berechnen. Allgemeine Tests mit der Exner-Gleichung haben [Kubatko et al. \(2006\)](#) durchgeführt und die Entstehung von Dünen aus sinusförmigen Sedimenthaufen simuliert. In diesem Fall wurden die Flachwassergleichungen mit der Exner-Gleichung zur Sedimentbettentwicklung verbunden. Das Beispiel der Kolksimulation wird beispielsweise von [Zhang et al. \(2005\)](#) oder aber auch [Link \(2006\)](#) bearbeitet. In beiden Fällen wurde die Exner-Gleichung in ein $k - \varepsilon$ -Fluid-Modell integriert, in welchem Turbulenzen mit einer Large Eddy Simulation (LES) modelliert werden.

6.2 Klarwasserbedingungen

Dass die Vernachlässigung des Suspensionstransportes für die angestrebte Simulation fluvialer Gerinnebettformen akzeptabel ist, wird durch empirische Beobachtungen belegt und unterstützt. [Zanke \(2002\)](#) beschreibt dies auf Seite 174 wie folgt:

„Im Feinkornbereich macht der Geschiebetransport zwar häufig nur den geringsten Teil des Gesamttransports aus, ist jedoch von vorrangigem Einfluss auf die Bettbildung. [...] Der Suspensionstransport wirkt [...] viel weniger bettbildend.“

Betttransport, oder auch Geschiebetransport genannt, ist maßgeblich verantwortlich für die Ausbildung von Dünen, Rippeln, Kolken oder anderen Gerinnebettformen. Messergebnisse von Kolken um zylindrische Hindernisse unterstützen diese Erkenntnis (Euler, 2007). Dabei wurde in genau definierbaren Strömungszuständen fluviale Hindernismarken um zylindrischen Körper erzeugt und ausgemessen. Eine Beschränkung auf quasi-uniforme Sedimente und auf Fließgeschwindigkeiten über den kritischen Grenzwert für Suspensionsablagerung, ließ faktisch keine Beeinflussung durch Suspension in diesen Messreihen zu. Trotz dieser Einschränkungen entstanden die zu erwartenden Formen (Abbildung 1.1) .

6.3 Gerinnebettformen

6.3.1 Übersicht

Zum allgemeinen Verständnis und zur Übersicht stellt Abbildung 6.1 Gerinnebettformen und eine - einfach gehaltene - Einordnung nach Größe zusammen. Gerinnebettformen bezeichnen grundsätzlich alle durch Sedimente am Gerinnebett aufgebauten Formen. Genauere Aufschlüsselungen erfolgen anhand der Größe oder der Entstehung nach. Wichtigstes Kriterium ist eine strömungsinduzierte Entstehung der Sedimentform. Ob sich aus einer Form durch anhaltende Strömung weitere Unterschiedliche entwickeln, spielt zuerst eine untergeordnete Rolle.

6.3.2 Prozesse und Beispiele

An der Bildung der genannten Gerinnebettformen sind unterschiedliche Prozesse beteiligt, welche alle im Bereich der Bodenfracht ablaufen. Das Überströmen einer rückwärtigen Stufe führt zu einem Wirbel hinter der Stufe, welcher an der Gewässersohle eine rückwärtsgerichtete Strömung ausbildet. Entgehend aus dieser Strömung setzt Sedimenttransport in Richtung der Stufe ein, so dass eine Vertiefung entsteht. Hinter dieser Vertiefung, am Separationspunkt der Strömung, kehrt sich die Strömungsrichtung um,



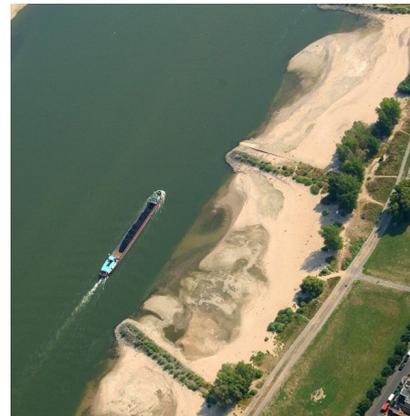
(a) Rippeln



(b) Fluvial Dünen im Versuchskanal



(c) Kolk an Brückenpfeiler



(d) Formen vor und hinter Buhnen. Aufgenommen bei Niedrigwasser des Rheins

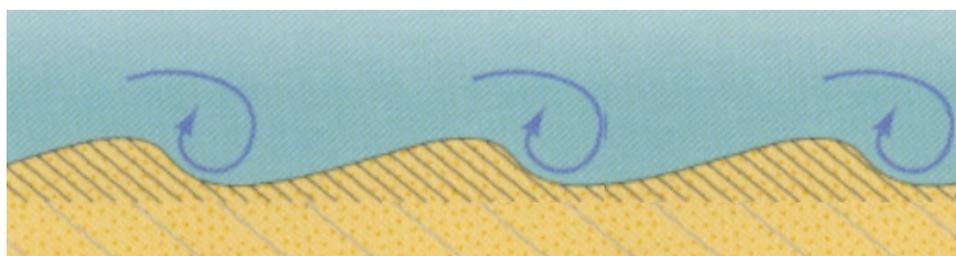
Abb. 6.1: Beispiele für Gerinnebettformen in aufsteigender Größe

so dass ab diesem Punkt vorwärtsgerichteter Sedimenttransport einsetzt. Allerdings in entgegengesetzter Richtung als im Wirbelsystem direkt hinter der Stufe.

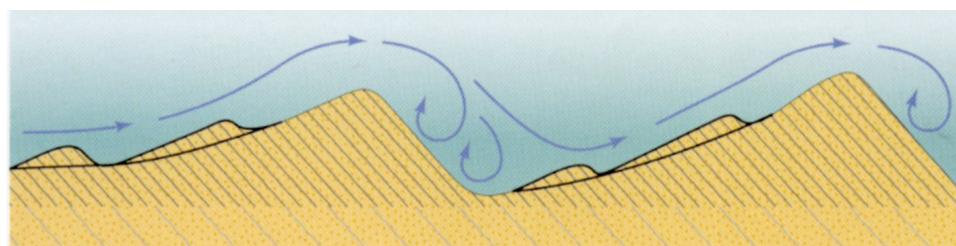
Als zweites Beispiel wäre das Hufeisenwirbelsystem im Bereich eines um- oder überströmten Hindernisses zu nennen. Durch ein Zusammenspiel mehrerer Wirbelsysteme wird vor dem Hindernis ein Teil der Strömung nach unten und seitlich umgelenkt. Abwärtsgerichtete Strömungsanteile bilden ein Wirbel vor dem Hindernis, welcher Sedimente aus dem Sedimentkörper löst und damit in Bewegung versetzt. Angrenzende seitliche Strömungen transportieren diese Partikel anschließend am Hindernis vorbei. Nachlassende Strömungsintensität verursacht Sedimentation hinter dem Hindernis. In einem gewis-

sen Abstand führt dies zu einer Rückenbildung, aufgebaut aus den ursprünglich vor dem Hindernis gelegenen Partikeln. Im Falle eines überströmten Hindernisses wird der nach oben gelenkte Teil der Strömung über das Hindernis und dahinter nach unten abgelenkt, mit der Folge eines weiteren Wirbels hinter dem Strömungshindernis.

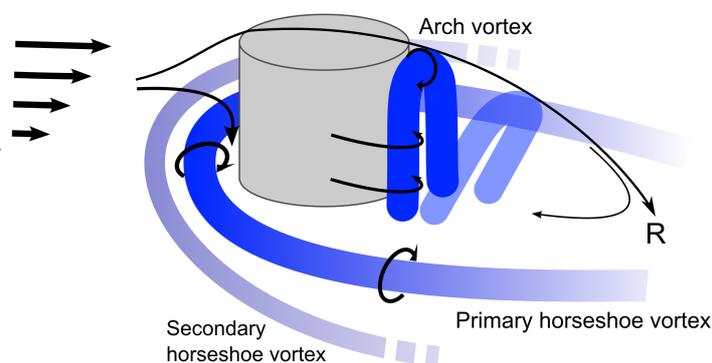
Eine schematische Visualisierung der beschriebenen Prozesse findet sich in Abbildung 6.2. Dass diese Prozesse im Hufeisenwirbelsystem nicht komplett zu erfassen sind und beliebige Kombinationen und Übergänge haben können, liegt auf der Hand und soll hier nicht näher behandelt werden.



(a) Rippeln, verändert nach Press & Siever (2003)



(b) Dünen, verändert nach Press & Siever (2003)



(c) Hufeisenwirbel um zylindrisches Hindernis, verändert nach Euler (2007)

Abb. 6.2: Schematische Darstellung formbildender Strömungssysteme

7 Diskretisierungsverfahren und Berechnungsformeln

Nach erfolgter Auswahl des Modells, gilt es die Implementierung der Exner-Gleichung vorzubereiten. Eingangsgrößen in dieses Modell sind hauptsächlich Geschiebeformeln, welche wiederum von empirisch gewonnenen Modellen und Messwerten abhängen. Korngröße d_{50} , Sedimentdichte ρ_s , Reibungskoeffizient f , Schubspannungen τ und als wichtigste Größe die Fließgeschwindigkeit u üben Einfluss auf die Geschiebeformeln aus, so dass eine sorgfältige Auswahl dieser Faktoren von Nöten ist.

Allen voran steht die Diskretisierung der eigentlichen Exner-Gleichung und die damit verbundenen Auswirkungen auf Stabilität und Konvergenz des Löser. Dementsprechend werden im Folgenden das Konzept der Schubspannung und der Geschiebetransport erläutert, um anschließend ausführlich die Diskretisierung der Exner-Gleichung zu diskutieren.

7.1 Konzept der Schubspannung

Die wichtigste zu bestimmende Größe in den Geschiebevolumenformeln q_s ist die Schubspannung τ . Nach dem Berechnungsansatz von [Chanson \(1999\)](#) ist neben der Strömungsgeschwindigkeit u noch ein Reibungskoeffizient f zu bestimmen. Unterschiedlichste Modelle sowohl für die Bestimmung des Koeffizienten f als auch für die Wahl der „richtigen“, Strömungsgeschwindigkeit beeinflussen τ maßgeblich. Um allgemein anerkannte und in der Praxis bewährte Modelle zu verwenden, wird sich im weiteren Verlauf auf die Hydrauliklehrbücher nach [Zanke \(2002\)](#), [Chanson \(1999\)](#), [Douglas et al. \(2001\)](#) oder [Jones \(2000\)](#) bezogen. [Chanson \(1999\)](#) gibt zur Bestimmung der Schubspannung τ nachstehende Formel an:

$$\tau = \frac{1}{8} \rho f |\vec{u}|^2 \quad (7.1)$$

Parameter in dieser Formel sind die Fluidichte ρ und f als Reibungskoeffizient. Die mittlere Fließgeschwindigkeit wird durch \vec{u} ausgedrückt. In der Praxis wird als Fließgeschwindigkeit ein Wert über dem Sedimentbett benutzt, welcher im logarithmischen Fließprofil der mittleren Geschwindigkeit entspricht. Dass dieser Wert durch Messfehler, aber vorrangig durch Erfahrungswerte des Anwenders, beeinträchtigt ist, liegt auf der Hand und beeinflusst die Berechnung. In der späteren Umsetzung in ein numerisches Programm, wird ein Parameter $-y$ den Abstand $\tau_{\Delta y}$ über dem Sedimentbett und damit die Geschwindigkeit \vec{u} einstellen. Geschwindigkeitswerte zwischen einzelnen Gitterzellen werden linear aus den angrenzenden Werten interpoliert. Um eine größere Variabilität zu geben, können sowohl Rutsch- als auch Haftbedingungen für die Sedimentoberfläche gesetzt werden. Hintergrund ist, dass durch mangelnde Auflösungstiefe Grenzschichten nicht zufriedenstellend aufgelöst werden können und damit die Ausbildung realistischer Geschwindigkeitsprofile nicht gesichert ist. Unter Rutschbedingungen werden über die Höhe $y = 0$ die direkten Geschwindigkeiten an der Grenzfläche zwischen Sediment und Fluid benutzt. Haftbedingungen hingegen müssen mit einem $y \neq 0$ initialisiert werden, da eine Geschwindigkeit $\vec{u} = 0$ keinen Transport entstehen lassen würde.

Chanson (1999) beschreibt den Reibungskoeffizienten f als abhängig von der Reynoldszahl und gibt Grenzwerte für f an. Zusammengefasst entstehen je nach Strömungszustand unterschiedliche Richtwerte für f (Tabelle 7.1).

Tabelle 7.1: Mögliche Berechnungsverfahren für f gekürzt nach Chanson (1999), S.77

$Re < 2000$	$f = \frac{64}{Re}$
$Re < 10000$	$f = \frac{0.3164}{Re^{\frac{1}{4}}}$
$Re > 10000$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \cdot \log_{10}(Re \cdot \sqrt{f}) - 0.8$
„Turbulente Strömungen“	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \cdot \log_{10}\left(\frac{k_s}{3.71 \cdot R} + \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{f}}\right)$
„ Stark Turbulente Strömungen“	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \cdot \log_{10}\left(\frac{R}{k_s}\right) + 1.14$

Parameter R in den letzteren beiden Formeln beschreibt den hydraulischen Radius und gibt das Verhältnis von Kontaktfläche Fluid-Sediment zu durchflossenen Querschnitt an. Dass dieser Wert in freien Gewässern nur zu schätzen ist, beeinträchtigt die Aussagekraft und Genauigkeit der Formeln. Die Bezeichnungen „Turbulente Strömungen“ und

„Stark Turbulente Strömungen“ sind Zitate aus [Chanson \(1999\)](#) und zeigen deutlich wie groß der Empirieanteil in der Bestimmung des Reibungskoeffizienten ist. Im Folgenden wird sich auf nicht turbulente Strömungen mit Reynoldszahlen im Bereich von 10 bis 2000 beschränkt, dementsprechend kann für die Bestimmung von f folgende Gleichung Anwendung finden:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (7.2)$$

7.2 Geschiebevolumenformeln

Zu Beginn wird ein kurzer Überblick über einige Geschiebetransportformeln gegeben. Diese Zusammenstellung hat nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, da sich die Entwicklung unterschiedlichster Geschiebeformeln beliebig verfeinern ließe.

Um jedoch eine Vergleichbarkeit zu ermöglichen, werden mehrere Geschiebeformeln vorgestellt. Der große empirische Charakter dieser Formeln beeinflusst maßgeblich die Ergebnisse des numerischen Verfahrens. Um dieses Problem so gering wie möglich zu halten und gleichzeitig auf eine solide Grundlage zu setzen, wird sich in dieser Arbeit auf die gängigsten Geschiebeformeln beschränkt. Damit sollen prinzipiellen Prozesse erfasst und reproduziert werden. Für spezielle Anwendungen aus dem Ingenieurwesen werden von Fall zu Fall weitere Messung die Wahl der Parameter für die jeweiligen Transportformeln beeinflussen. In [Tabelle 7.2](#) sind einige der gängigsten Formeln aufgelistet, welche sowohl rein empirisch als auch semi-empirisch ([Zanke, 2002](#)) sind. Bei der Auswahl sind Anwendungsbereiche und Skalensprünge zu beachten. Die folgende Auswahl orientiert sich an der historischen Entwicklung, welche bereits in [Chanson \(1999\)](#) als Auswahlkriterium für die Geschiebetransportformeln diente.

Viele der Geschiebeformeln aus [Tabelle 7.2](#) basieren auf dem Prinzip der kritischen Grenzschubspannung τ_c , welche die dimensionslose Kenngröße für Transportbeginn darstellt. Dass dieser Wert von Messgrößen, wie Korngröße oder Sedimentdichte abhängt ist klar. Alle weiteren aufgeführten Parameter stammen aus der Analyse der Messwerte.

Die Formeln von Shields (1936), Einstein (1942) und Meyer-Peter Müller (1949) wurden alle aus demselben Datensatz hergeleitet, so dass ähnliche Ergebnisse mit diesen

Tabelle 7.2: Geschiebetransportformeln gekürzt nach Chanson (1999), S.198

Boys (1879)	$q_s = \lambda \tau (\tau - \tau_c)$	
Schoklitsch (1930)	$q_s = \lambda (\sin \theta)^k (q - 1.944 \cdot 10^{-2} \cdot (\sin \theta)^{-\frac{4}{3}})$	Labormessungen
Shields (1936)	$q_s = q \cdot 10 \frac{\sin \theta}{s} \cdot \frac{\tau - \tau_c}{\rho g (s-1) d_s}$	Labormessungen
Einstein (1942)	$q_s = \sqrt{(s-1) g d_s^3} \cdot 2.15 \exp\left(-0.391 \cdot \frac{\rho (s-1) g d_s}{\tau}\right)$	Labormessungen
Meyer-Peter Mueller (1949)	$q_s = \sqrt{(s-1) g d_s^3} \cdot \left(\frac{4\tau}{\rho (s-1) g d_s} - \tau_c\right)^{\frac{3}{2}}$	Labormessungen
Nielsen (1992)	$q_s = \sqrt{(s-1) g d_s^3} \cdot \left(\frac{12\tau}{\rho (s-1) g d_s} - 0.05\right) \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\rho (s-1) g d_s}}$	Neuanalyse der Labormessungen
Zanke (1999)	$q_s = u_{S,m} \cdot 2.8 \cdot R \cdot (\tau - \tau_c) \cdot d$	semi-analytischer Ansatz
Parameter	λ Sediment Koeffizient, θ Winkel der inneren Reibung, d_s mittlere Korngröße, $0.125 < d_s < 28.7$ mm, $s = \frac{\rho_s}{\rho}$ $1.06 < s < 4.25$, R Risiko eines Transportbeginns, $u_{S,m}$ = mittlere Transportgeschwindigkeit	

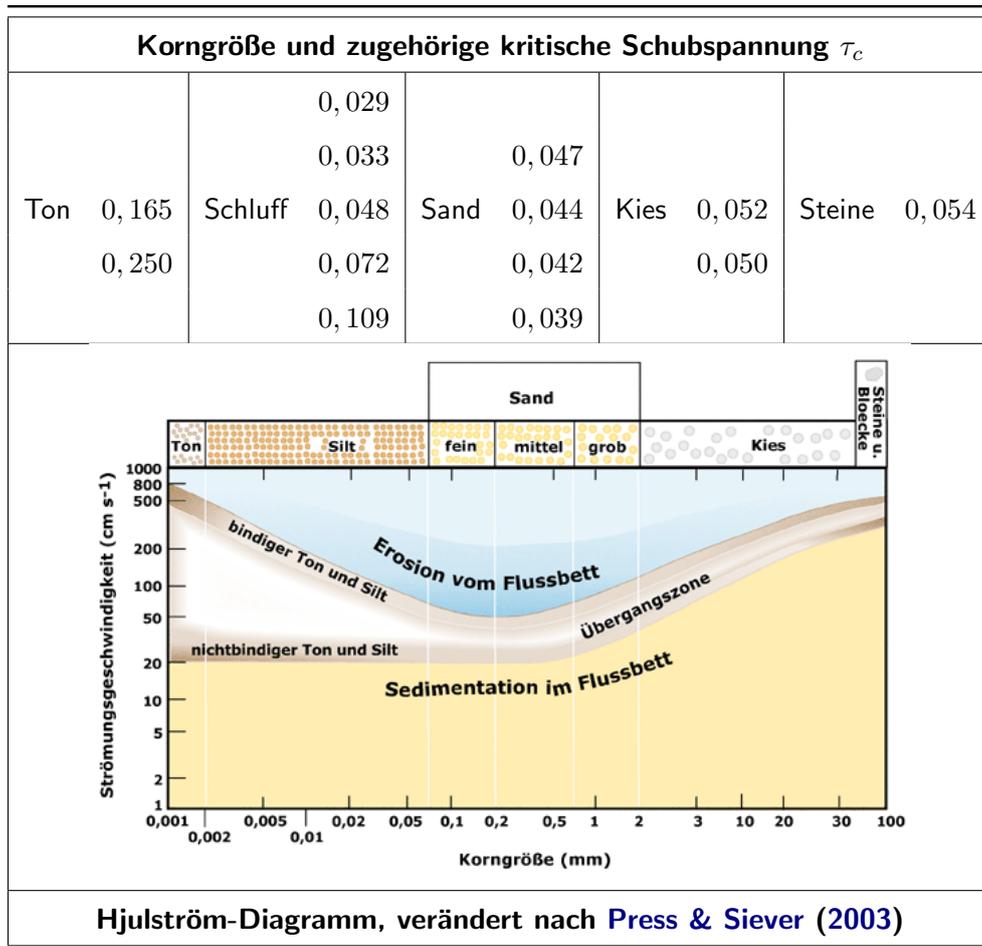
Formeln zu erwarten sind. Eine von Nielsen (1992) durchgeführte Neuanalyse der Messungen führte zu einer ähnlichen Formel. Jedoch ersetzt das Modell nach Nielsen die kritische Schubspannung τ_c durch eine Konstante 0.05. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass in der Natur fast immer Sedimenttransport vorliegt. Unterschiede ergeben sich jedoch in den Geschwindigkeiten und der Dauer des Transports. Kleinräumig und kurzzeitig kann durchaus keine Bewegung herrschen, auch wenn über längere Zeiträume immer wieder vereinzelt Partikel transportiert werden. In größeren Skalen kann somit von einem durchschnittlichen Geschiebe gesprochen werden. Jones (2000) gibt zur Berechnung der dimensionslosen kritischen Grenzsobspannung τ_c folgende Gleichung an:

$$\tau_c = \frac{\tau_{cr}}{g \cdot (\rho_s - \rho_w) \cdot d} \quad (7.3)$$

Mit τ_{cr} als kritischer Schubspannung bei Bewegungsbeginn in N/m^2 , den Dichten des Sediments ρ_s sowie des Wassers ρ_w und der Korngröße d . Tabellarisch aufgeführt findet sich in Julien (1995) eine vereinfachte Zusammenstellung der dimensionslosen kritischen Schubspannung, welche in den klassischen Geschiebeformeln Anwendung findet (Tabelle 7.3). Das in Press & Siever (2003) präsentierte, empirisch erarbeitete Hjulström-Diagramm, fasst das Konzept der kritischen Grenzsobspannung als kontinuierliche Kurve zusammen. Zu beachten ist, dass Schluffpartikel am leichtesten in Bewegung versetzt werden können. Im Gegensatz dazu bilden kleinere Tonteilchen durch kohäsive Effekte kompaktere und damit stabilere Konglomerate. Das Minimum im größeren

Schluffbereich lässt sich damit erklären, dass die Kohäsion nicht stark genug ist und die Teilchen nicht schwer genug sind, um größeren Schubspannungen standzuhalten. Derartige Effekte gilt es, im späteren Verlauf bei der Auswahl der Beispiele, zu beachten und τ_c dementsprechend zu wählen.

Tabelle 7.3: Kritische Schubspannungen in Abhängigkeit der Korngröße, verändert nach [Julien \(1995\)](#)



Durch den modularen Aufbau des Algorithmus' ist es leicht, weitere Geschiebetransportgleichungen hinzuzufügen, um unterschiedliche Anwendungs- und Gültigkeitsbereiche abzudecken. Beispielsweise ist zu berücksichtigen unter welchen Voraussetzungen welche Formel Anwendung finden darf, ob eine Grenzscherubspannung erreicht sein muss oder allgemeiner Transport vorliegt.

Zuerst soll die Meyer-Peter Müller Formel implementiert werden, da wie zuvor be-

schrrieben die Anwendung gute Ergebnisse lieferte:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sqrt{\frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w} \cdot g \cdot d_{50}^3} \\
 A_2 &= (\rho_s - \rho_w) \cdot g \cdot d_{50} \\
 q_s &= A_1 \cdot \left(\frac{4 \cdot \tau}{A_2} - \tau_c \right)^{\frac{3}{2}} \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

Tabelle 7.4: Materialparameter für die Meyer-Peter Müller Formel

Sedimentdichte (Quarzsand)	$\rho_s = 2650,0 \text{ kg/m}^3$
Fluiddichte (Wasser)	$\rho_w = 1000,0 \text{ kg/m}^3$
mittlerer Korndurchmesser	$d_{50} = 0,001 \text{ m}$
kritische Schubspannung	$\tau_c = 0,047 \text{ N/m}^2$

Auf makroskopischen Skalen gibt es zusätzlich Transportformeln, welche einen generellen Sedimenttransport in Abhängigkeit zur Strömungsgeschwindigkeit zur Grundlage haben. Beispielsweise verzichten die Formeln nach Schoklitsch (1930), Einstein (1942) oder Nielsen (1992) auf das Konzept der kritischen Schubspannung.

Anwendungsbereiche

Mit der Meyer-Peter Müller Formel wurden mehrere numerische Untersuchungen im Bereich der Gerinnebettformen durchgeführt. Unter anderen hat [Link \(2006\)](#) Kolkungen an zylindrischen Hindernissen untersucht. [Zhang et al. \(2005\)](#) simulierten die Sedimententwicklung umströmter Buhnen im Fließgewässer und [Kantoush et al. \(2008\)](#) untersuchten sowohl numerisch als auch experimentell die Sedimentation in einem rechteckigen Becken mit der Meyer-Peter Müller Formel. Klassische Hydrauliklehrbücher nach [Jones \(2000\)](#), [Chanson \(1999\)](#) oder auch [Zanke \(2002\)](#) geben ebenfalls der Meyer-Peter Müller Formel auf Grund ihrer breiten Datengrundlage den Vorzug.

7.3 Diskretisierung der Exner-Gleichung

Prinzipiell stehen mehrere Verfahren zur Auswahl. Angefangen mit der einfachsten Form der Diskretisierung durch das explizite Euler Verfahren, unterschiedlicher Upwind-Schemata bis hin zu Verfahren höherer Ordnung (z.B. WENO oder TVD) ist die Auswahl groß. In dieser Arbeit soll mit zwei Verfahren unterschiedlicher Ordnung gearbeitet werden. Ziel soll es sein einen stabilen, konvergenten Algorithmus zu implementieren, der prinzipiell die Prozesse des Sedimenttransport und die Gerinnebettformen selbst reproduzieren kann.

FTFS

Zuerst bietet sich eine Diskretisierung mit dem Upwind-Schema erster Ordnung an, dies bedeutet, dass sowohl zeitlich als auch räumlich in expliziter Weise diskretisiert wird. Im Allgemeinen sind explizite Verfahren instabil und müssen durch eine Bedingung an die Zeitschrittweite zur Stabilität gezwungen werden. Die FTFS-Diskretisierung (**F**orward in **T**ime, **F**orward in **S**pace) der Exner-Gleichung (5.1) ergibt folgendes Schema:

$$h_{i,k}^{n+1} = h_{i,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{x_{i+1,k}}^n - q_{x_{i,k}}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta z} (q_{z_{i,k+1}}^n - q_{z_{i,k}}^n) \quad (7.5)$$

Die Zeitschrittweite dieser Diskretisierung über die nach Courant et al. (1928) benannte Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL) gesteuert, welche Δt und Δx gegeneinander balanciert und damit numerische Stabilität für das explizite Euler-Verfahren garantiert. Die zum Sedimenttransport gehörige Sediment-CFL-Bedingung der Exner Gleichung wird aus der Überlegung gewonnen, dass die Höhe h in einem Zeitschritt nicht mehr als um eine Gitterzelle Δy anwachsen darf:

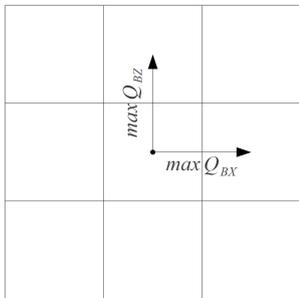
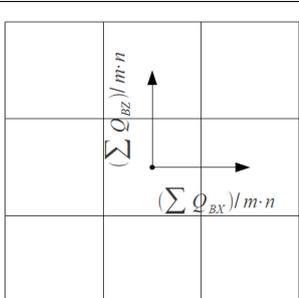
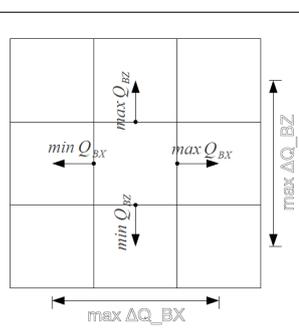
$$\begin{aligned} \Delta y \geq |h_{i,k}^{n+1} - h_{i,k}^n| &= \left| -\frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{x_{i+1,k}}^n - q_{x_{i,k}}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta z} (q_{z_{i,k+1}}^n - q_{z_{i,k}}^n) \right| \\ &\geq \frac{\Delta t}{\max(\Delta x, \Delta z)} \left| \underbrace{(q_{x_{i+1,k}}^n - q_{x_{i,k}}^n)}_{=:Q_x} + \underbrace{(q_{z_{i,k+1}}^n - q_{z_{i,k}}^n)}_{=:Q_z} \right| \end{aligned}$$

Als Bedingung an Δt ergibt sich damit für das Euler-Diskretisierungsverfahren:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta y \cdot \max(\Delta x, \Delta z)}{|Q_x + Q_z|} \quad (7.6)$$

Das Minimum aus dieser Bedingung und der CFL-Bedingung aus NaSt3DGP bildet anschließend die neue Zeitschrittweite für das gesamte System bestehend aus Strömungssimulation durch NaSt3DGP und Sedimenttransport.

Tabelle 7.5: Unterschiedliche Möglichkeiten für Sediment-CFL-Bedingung für das explizite Euler-Verfahren

	<p>Maximale Austräge aus einer Zelle</p> $\max_i q_{x_{i+1,k}} - q_{x_{i,k}} + \max_k q_{z_{i,k+1}} - q_{z_{i,k}} \leq \frac{\Delta y \cdot \max(\Delta x, \Delta z)}{\Delta t}$
	<p>gemittelte Austräge aus einer Zelle</p> $\left \frac{\sum_{i,k}^{n,m} (q_{x_{i+1,k}} - q_{x_{i,k}})}{m \cdot n} \right + \left \frac{\sum_{i,k}^{n,m} (q_{z_{i,k+1}} - q_{z_{i,k}})}{m \cdot n} \right \leq \frac{\Delta y \cdot \max(\Delta x, \Delta z)}{\Delta t}$
	<p>CFL-Bedingung als Summe der maximalen Austräge aus einer Zelle sowohl in X-Richtung als auch Y-Richtung</p> $\begin{aligned} & \left \max_i q_{x_{i,k}} \right + \left \min_i q_{x_{i,k}} \right + \\ & \left \max_k q_{z_{i,k}} \right + \left \min_k q_{z_{i,k}} \right \leq \frac{\Delta y \cdot \max(\Delta x, \Delta z)}{\Delta t} \end{aligned}$

Welche Werte für Q_x und Q_z im speziellen gewählt werden, soll an dieser Stelle lediglich kurz umrissen werden. Zur Auswahl stehen: stark einschränkende Bedingun-

gen, wie maximale Sedimentausträge $\max_{i,k} |Q_x|$ beziehungsweise $\max_{i,k} |Q_z|$ aus einer Zelle oder weniger restriktive, wie gemittelte Sedimenttransporte zum Beispiel $Q_x = \sum_{i,k}^{n,m} (q_{x_{i+1,k}} - q_{x_{i,k}})/(n \cdot m)$. Die restriktivste Variante ist die Differenz aus den jeweiligen Maxima und Minima aller Sedimenttransportraten. Mit dieser Wahl wird der Extremfall abgedeckt, dass die größten Differenzen des Sedimenttransports in beiden Richtungen in einer Zelle zusammen kommen. Der dadurch entstandene Fall des stärksten Ein- oder Austrag in oder aus einer Zelle ist sicherlich unwahrscheinlich, trotzdem bleibt mit Hilfe dieser Bedingung die Stabilität des Verfahrens gewährleistet. Eine Übersicht der beschriebenen Kombinationsmöglichkeiten findet sich in Abbildung 7.5. Hierbei wird auf eine vollständige Auflistung aller möglichen Kombinationen der Geschiebetransporte in den schematischen Zeichnungen verzichtet.

In der numerischen Praxis war der Einfluss, der in dieser Arbeit neu eingeführten Sediment-CFL-Bedingung, auf die CFL-Bedingung des eigentlichen Strömungslösers so gering, dass es nur bei sehr starken Sedimenttransport zu Veränderungen in Δt kam.

FTCS

Als nächste Möglichkeit wird das FTCS-Schema dargestellt. In diesem Fall wird die zeitliche Komponente mit einem expliziten Eulerschritt und der räumliche Anteil mit zentralen Differenzen diskretisiert, so dass zeitlich vorwärts diskretisiert wird und räumlich zentral (**F**orward in **T**ime, **C**entral in **S**pace) (Gleichung 7.7).

$$h_{i,k}^{n+1} = h_{i,k}^n - \Delta t \left(\frac{q_{x_{i+1,k}}^n - q_{x_{i-1,k}}^n}{2\Delta x} + \frac{q_{y_{i,k+1}}^n - q_{y_{i,k-1}}^n}{2\Delta z} \right) \quad (7.7)$$

Nach Long et al. (2008) lässt sich das normalerweise instabile FTCS-Verfahren mit Hilfe unterschiedlicher Filter oder Gradientenbegrenzungen zusätzlich zur CFL-Bedingung stabil halten. Aus diesem Grund muss für FTCS auch eine Wahl für die jeweiligen Zeitschrittweite getroffen werden. Als Filteralgorithmus dient der, im späteren Verlauf vorgestellte, Gefällsbegrenzer. Dieselben Annahmen an den Höhenzuwachs pro Zeitschritt, wie im Upwind-Verfahren erster Ordnung, liefern für die Sediment-CFL-Bedingung folgende Gleichung:

$$\Delta y \geq \frac{\Delta t}{2 \cdot \max(\Delta x, \Delta z)} \left| \underbrace{(q_{x_{i+1,k}}^n - q_{x_{i-1,k}}^n)}_{Q_x} + \underbrace{(q_{z_{i,k+1}}^n - q_{z_{i,k-1}}^n)}_{Q_z} \right| \quad (7.8)$$

Eine mögliche Variante ist die Differenz der maximalen Transportraten:

$$Q_x = \max_{i,k} q_{x_{i,k}}^n - \min_{i,k} q_{x_{i,k}}^n$$

$$Q_z = \max_{i,k} q_{z_{i,k}}^n - \min_{i,k} q_{z_{i,k}}^n$$

Der Nachteil ist, dass der größtmögliche Sedimenttransport in eine Zelle zusammenfallen müsste. Wie in der FTFS-Diskretisierung stellt dies einen unwahrscheinlichen Extremfall dar, gewährleistet jedoch die Erfüllung der CFL-Bedingung.

In den numerischen Untersuchungen dieser Arbeit wurde die restriktivste Wahl der maximalen Ein- und Austräge aus einer Zelle benutzt.

Eine ausführliche Besprechung anderer möglicher Verfahren in Anwendung auf die Exner-Gleichung findet sich in [Long et al. \(2008\)](#). Hierin wurden weitere Diskretisierungsverfahren nach Lax-Wendroff, nach Warming-Beam sowie unterschiedliche WENO-Verfahren untersucht. Mit allen Varianten wurden Versuche zur Stabilität und Massenerhaltung über lange Zeiträume durchgeführt. Explizit wurde ein Testsedimentkörper erstellt und über Zeiträume ($t = 10000$ s) durch ein vorgegebenes Strömungsfeld weitertransportiert. Als Ergebnis zeigte sich, dass das FTFS-Verfahren nach Gleichung 7.5 stabil ist und wenig Oszillation produziert. Allerdings zeigt sich eine Tendenz zur Zerstreuung über sehr lange Zeiträume ($t \geq 5000$ s). Lax-Wendroff und FTCS-Diskretisierung neigen zu starken Oszillationen, welche durch Filteralgorithmen aufgefangen werden können. Jedoch bleiben Oszillationen im Bereich hoher Gradienten ein Problem. Im Gegensatz hierzu zeigen die WENO Schemata fast keine Oszillationen und wenig diffusives Verhalten. Alle getesteten Verfahren sind massenerhaltend im Bereich der numerischen Rechengenauigkeit. Wenn sehr lange Transportzeiträume betrachtet werden, schlagen [Long et al. \(2008\)](#) WENO-Schemata als Mittel der Wahl vor, da beide stabiler sind und genauere Ergebnisse als die klassischen Diskretisierungsschemata liefern.

8 Erweiterung der NaSt3DGP-Implementierung um das Sedimentmodell

Im folgenden Kapitel soll die komplette numerische Erweiterung von NaSt3DGP um das beschriebene Sedimentmodell beschrieben werden. Die Abfolge der Abschnitte folgt dem Ablauf des Algorithmus, welcher schematisch in Abbildung 8.1 dargestellt ist. Weitere Details werden in den einzelnen Abschnitten behandelt und ausführlich beschrieben. Als Grundlage für die Implementierung dient NaSt3DGP, ein, auf finiten Differenzen basierender, Navier-Stokes Löser. Gebietstruktur und unterschiedliche Randbedingungen werden hierbei auf einem orthogonalen Gitter und mit Hilfe unterschiedlicher Flags realisiert. Gesteuert werden Gitter und Voreinstellungen, wie Reynoldszahl oder Dauer, über ein `Scene-File`. Dieses wird zunächst so bearbeitet, dass eine sedimentfreie Struktur erstellt wird. Die Orientierung des gesamten Gebietes ist so implementiert, dass die X - und Z -Richtung die horizontale Lage bilden. Hiermit verbunden sind die Indizes $i = 1 \dots \text{gridp}[0]$ und $k = 1 \dots \text{gridp}[2]$. Als eigentliche Höhenkomponente wird die Y -Richtung und damit $j = 1 \dots \text{gridp}[1]$ als Index benutzt. Desweiteren wird mit der Höhe auf die Y -Richtung Bezug genommen. Zur Erstellung des Gebietes mit zugehörigen Startbedingungen wird das NaSt3DGP-Unterprogramm `navsetup` benutzt. Die so erstellte sedimentlose Struktur wird erst im eigentlich Löser mit Sedimenthöhe *Hoehe* belegt. Befehlsparameter hierfür ist `-s` als Attribut für den Löser `navcalc` beziehungsweise `navcalcmpi`.

Die folgenden Punkte orientieren sich am Ablaufdiagramm 8.1 und beschreiben im Detail die Implementierung.

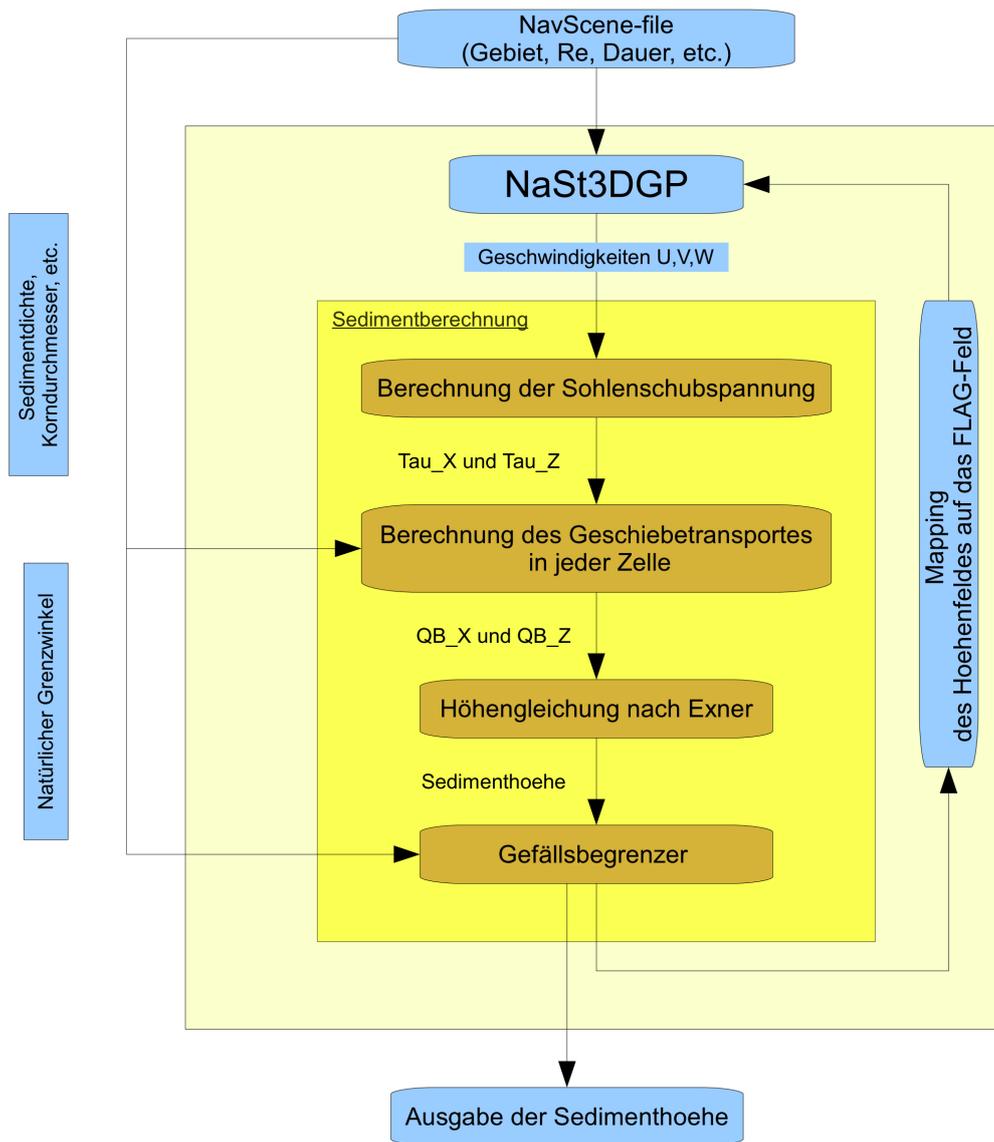


Abb. 8.1: Schemazeichnung des Algorithmus

8.1 Datenstrukturen

Zur besseren Übersicht werden, soweit möglich, in NaSt3DGP Datenstrukturen übernommen oder angepasst. Alle zur Berechnung der Sedimenthöhe nötigen Daten beschränken sich auf zweidimensionale Datenstrukturen. Sedimenthöhe *Hoehe*, Schubspannung τ ($[TAU_X]$ und $[TAU_Z]$) und Geschiebetransport q_s ($[Q_{BX}]$ und $[Q_{BZ}]$) werden als zweidimensionale Felder im bereits in NaSt3DGP vorhandenen Datentyp `Plane` im `double`-Format gespeichert. Die Klasse `Plane` liefert bereits Routinen für die in der Sediment-CFL-Bedingung nötige Maximums- beziehungsweise Minimumssuche.

`Hoeheindex`, welches ein Integer-Feld darstellt, gibt für jede Zelle in der *X-Z*-Ebene die Anzahl, der mit Sediment gefüllten Zellen in der *Y*-Richtung an. Hieraus werden im Mapping die richtigen Flag-Werte gesetzt.

8.2 Behandlung von Hindernissen und Initialisierung der Anfangssedimenthöhe

Vorgegebene Hindernisstrukturen aus dem NaSt3DGP Nav-Scene-File sollen erhalten bleiben. Hindernisse werden aus dem Nav-Scene-File in ein *Flag*-Feld übersetzt, damit kann die Bestimmung der Hindernishöhe über zwei Schleifen erfolgen. Ergebnis dieses *Flag*-Durchlaufs ist das zweidimensionale Feld *hinhoehe* im Datentyp `Plane` sein, welches die Anzahl der Hinderniszellen beinhaltet. Algorithmus 8.1 zeigt die Erstellung von *hinhoehe* durch Abzählen, der als Hindernis ($Flag \neq 0$) gekennzeichneten Zellen.

Da sich die Hindernisstruktur während des eigentlichen Sedimenttransports nicht ändert, wird dieser Schritt in der Initialisierungsphase durchgeführt. Das hieraus resultierende Feld *hinhoehe*, dient im weiteren Verlauf zur Unterscheidung, ob die Sedimenthöhe *Hoehe* über der Hindernishöhe liegt und damit eine Sedimenttransportberechnung nötig ist.

Mit dem berechneten Feld *hinhoehe* wird anschließend die Anfangssedimenthöhe initialisiert. Hierbei wird durch den Parameter *sedhoehe* der Anteil der *Y*-Länge des (*S.dimension*[1]) gesamten Gebietes mit Sediment gefüllt und das Feld *Hoehe* belegt. Auf diese Weise gilt für die Sedimenthöhe:

Algorithm 8.1 Berechnung der Hindernishöhe *hinhoehe* aus dem vorhandenen *Flag*-Feld. Einmaliger Aufruf vor der eigentlichen Strömungs-/Sedimentberechnung

```

1: for  $i = 1$  to gridp[0] do
2:     for  $k = 1$  to gridp[2] do
3:          $counter = 0$ 
4:         for  $j = 1$  to gridp[1] do
5:             if  $[flag]_{i,j,k}$  then
6:                  $counter ++$ 
7:             end if
8:         end for
9:          $[hinhoehe]_{i,k} = DY[0] \cdot counter$ 
10:    end for
11: end for

```

$$initHoehe = sedhoehe \cdot S.dimension[1] \quad (8.1)$$

Im Folgenden wird, wenn die Hindernishöhe *hinhoehe* niedriger als *initHoehe* ist, das *Hoehe*-Feld mit *initHoehe* belegt. Somit wird die ursprüngliche Geometrie bis zu einer Höhe *initHoehe* mit Sediment gefüllt.

Algorithm 8.2 Belegung des Sedimenthöhenfeldes abhängig von der vorgegebenen Geometrie

```

1:  $initHoehe = sedhoehe \cdot S.dimension[1]$ 
2:
3: for  $i = 1$  to gridp[0] do
4:     for  $k = 1$  to gridp[2] do
5:         if  $[hinhoehe]_{i,k} < initHoehe$  then
6:              $[Hoehe]_{i,k} = initHoehe$ 
7:         end if
8:     end for
9: end for

```

Da das ursprüngliche Flagfeld als *integer*-Datenfeld vorliegt, können einzelne *Flag*-Werte mit Bitweise-Operatoren ein- und ausgeschaltet werden, damit wird lediglich die gewünschte Information in Form eines Bits und nicht der komplette *integer*-Wert geändert. Eine Abfrage der einzelnen Informationen des *Flag*-Feldes geschieht ebenfalls über Bitweise-Vergleichsoperatoren.

Nach der Auffüllung durch Sediment wird in der Prozedur *INITFLAG* diese neue Geo-

metrie in das vorhandene *Flag*-Feld geschrieben. Jede neu hinzugekommene Zelle erhält den Flagwert, der für ein Hindernis steht. Im darauf folgenden Schritt wird auf Fluid-Nachbarschaftsbeziehungen geprüft. Zuerst werden in allen *Flag*-Werten, die alten Himmelsrichtungen und eventuelle Rutschbedingungen gelöscht um anschließend die neue Geometrie zu setzen. Als einzige Ausnahme werden die *Flag*-Werte *inout* beziehungsweise *inflow* beibehalten. Hintergrund dieser Ausnahme ist, dass eine *inout* Fläche, welche durch unterschiedliche Sedimenthöhen eventuell bedeckt und danach wieder frei werden könnte, ihre Eigenschaft als Ausflussfläche beibehalten soll. In der Generierung der lokalen Einfluss- und Ausfluss-Randlisten werden die soeben beschriebenen Zellen abgefangen, da sie nicht in die Fluidberechnung eingehen dürfen. Nach erfolgreichem Setzen der richtigen *Flag*-Werte, steht NaSt3DGP eine neue Geometrie zur Verfügung, die einen Schritt der eigentlichen Fluidberechnung zulässt.

Algorithm 8.3 Neusetzen des Flagfeldes

```

1: for  $i = 1$  to gridp[0] do
2:   for  $k = 1$  to gridp[2] do
3:     if  $[flag]_{i,j,k} = \text{Hindernis}$  then
4:       if  $[flag]_{i\pm 1,j\pm 1,k\pm 1} \neq \text{Fluid}$  then
5:         lösche Nachbarn
6:         if Sediment soll als slip behandelt werden = true then
7:           lösche noslip-Bedingung
8:         end if
9:       end if
10:      if  $[flag]_{i\pm 1,j\pm 1,k\pm 1} = \text{Fluid}$  then
11:        setze für  $[flag]_{i,j,k}$  Nachbarn
12:        if Sediment soll als slip behandelt werden = true then
13:          setze slip-Bedingung
14:        end if
15:      end if
16:    end if
17:  end for
18: end for

```

Da im nächsten Schritt die Schubspannung in einer bestimmten Höhe berechnet werden soll, wird, im Anschluss an das Neusetzen der jeweiligen *Flag*-Werte, das Feld *Hoeheindex* berechnet. Hierin wird die Anzahl der Hinderniszellen vom „Boden“ (*XZ*-Ebene) abgespeichert. Vorteil dieses Feldes ist, dass zu jedem Zeitpunkt die Sedimentoberfläche durch einen **integer** Wert wiedergegeben werden kann und so ein Zugriff auf

die Oberflächen *Flag*-Werte beziehungsweise die angrenzenden Geschwindigkeiten möglich wird. Die direkteste Art der Berechnung ist direktes Abzählen der Hinderniszellen vom „Boden“ aus.

8.3 Berechnung der Schubspannung

Die bereits beschriebene Problematik des großen empirischen Einflusses auf die Formeln für die Berechnung der Schubspannung, setzt sich in der Implementierung fort. Eine mögliche Diskretisierung der beschriebenen Gleichung 7.1 sieht wie folgt aus:

Algorithm 8.4 Berechnung der Schubspannung aus der Strömungsgeschwindigkeit

```

1: //  $\rho$  Dichte des Wassers,  $f = 64/Re$  Koeffizient nach Chanson (1999),
2: //  $dist$  Abstand zu Sedimentoberfläche ( $\tau_{\Delta y}$ )
3: // Abrunden auf ganze Zahl
4:  $sumi = \lfloor dist/dely \rfloor$ 
5: // Berechnung der Interpolationsgewichte
6:  $a = dist - (sumi \cdot dely - 1/2 \cdot dely)$ 
7:  $b = ((sumi + 1) \cdot dely - 1/2 \cdot dely) - dist$ 
8: for  $i = 1$  to  $gridp[0]$  do
9:   for  $k = 1$  to  $gridp[2]$  do
10:    // Berechnung der Geschwindigkeiten  $U$  und  $W$  über Sediment
11:    if  $[hinhoehe]_{i,k} < initHoehe$  then
12:       $U_1 = (U_{i-1,Hoeheindex_{i,k+sumi,k}} + U_{i,Hoeheindex_{i,k+sumi,k}})/2$ 
13:       $U_2 = (U_{i-1,Hoeheindex_{i,k+sumi+1,k}} + U_{i,Hoeheindex_{i,k+sumi+1,k}})/2$ 
14:       $W_1 = (W_{i,Hoeheindex_{i,k+sumi,k-1}} + W_{i,Hoeheindex_{i,k+sumi,k}})/2$ 
15:       $W_2 = (W_{i-1,Hoeheindex_{i,k+sumi+1,k-1}} + W_{i,Hoeheindex_{i,k+sumi+1,k}})/2$ 
16:       $U = (U_1 \cdot b + U_2 \cdot a)/dely$ 
17:       $W = (W_1 \cdot b + W_2 \cdot a)/dely$ 
18:       $[TAU_X]_{i,k} = sgn(U) \cdot \rho \cdot f/8 \cdot U^2$ 
19:       $[TAU_Z]_{i,k} = sgn(W) \cdot \rho \cdot f/8 \cdot W^2$ 
20:    end if
21:  end for
22: end for

```

In dieser Variante wird die Fließgeschwindigkeit in einem, bei Programmstart festgelegten, Abstand vom Sedimentbett $\tau_{\Delta y}$ benutzt, um die Schubspannung zu berechnen. Dass die Wahl des Abstands $\tau_{\Delta y}$ von Fall zu Fall gewählt werden muss, ist neben der Wahl der Geschiefel-formel der größte empirische Einfluss im gesamten Sedimentmodell. Wenn die Sedimentoberfläche mit Rutschbedingungen behandelt werden soll, ist

die Wahl $\tau_{\Delta y} = 0$ plausibel und gibt die Geschwindigkeit an der Sedimentoberfläche wieder. Wenn Haftbedingungen für die Sedimentoberfläche benutzt werden, ist $\tau_{\Delta y} \neq 0$ und die Geschwindigkeiten für U und W werden durch lineare Interpolation aus den beiden nächsten Werten bestimmt. Durch dieses Vorgehen wird bei einer Verfeinerung des Gitters jedesmal dieselbe Geschwindigkeit benutzt und damit die Vergleichbarkeit der Ergebnisse gewährleistet. Abgespeichert werden die errechneten Werte wiederum im global verfügbaren Datentyp `Plane`.

8.4 Geschiebetransportberechnung

Aus den zuerst berechneten Größen $[\text{TAU}_X]$ und $[\text{TAU}_Z]$ wird im nächsten Schritt der Sedimenttransport mit der Meyer-Peter Müller Formel errechnet. Auch in diesem Fall entstehen zwei zweidimensionale Felder $[Q_{BX}]$ und $[Q_{BZ}]$ des Datentyps `Plane`, welche Werte des Typs `double` beinhalten.

Algorithm 8.5 Berechnung des Geschiebetransports aus den Schubspannungen mit der Meyer-Peter Müller Formel

```

1:  $A1 = \sqrt{(\rho_s - \rho_w) / \rho_w \cdot g \cdot d_{50}^3}$ 
2:  $A2 = (\rho_s - \rho_w) \cdot g \cdot d_{50}$ 
3: for  $i = 1$  to gridp[0] do
4:   for  $k = 1$  to gridp[2] do
5:      $[Q_{BX}]_{i,k} = [Q_{BZ}]_{i,k} = 0.$ 
6:     if  $\tau_c$  überschritten then
7:        $[Q_{BX}]_{i,k} = \text{sgn}([\text{TAU}_X]_{i,k}) \cdot A1 \cdot (4 \cdot \text{fabs}([\text{TAU}_X]_{i,k}) / A2 - \tau_c)^{3/2}$ 
8:        $[Q_{BZ}]_{i,k} = \text{sgn}([\text{TAU}_Z]_{i,k}) \cdot A1 \cdot (4 \cdot \text{fabs}([\text{TAU}_Z]_{i,k}) / A2 - \tau_c)^{3/2}$ 
9:     end if
10:  end for
11: end for

```

Die Berechnung des Geschiebetransports beinhaltet die Abfrage, ob die kritische Schubspannung erreicht wurde und setzt, wenn dies nicht der Fall ist, den Transport $q_s = 0$. Problematisch wird dieses Vorgehen, wenn die Geschwindigkeiten sich im kritischen Bereich bewegen, wodurch sich in manchen Zellen Transport einstellt und in Nachbarzellen die kritische Schubspannung noch nicht erreicht wird. Hierdurch kann es zu chaotischen Transporten kommen, so dass in solchen Geschwindigkeitsbereichen auf Formeln ohne kritische Schubspannung zurückgegriffen werden sollte.

8.5 Höhenveränderung durch Exner-Gleichung

Mit Hilfe der berechneten Geschiebetransportfelder $[Q_{BX}]$ und $[Q_{BZ}]$ und dem in Kapitel 3 beschriebenen Exner-Modells lässt sich anschließend die eigentliche Höhenveränderung des Sedimentbettes berechnen.

Das erste benutzte Diskretisierungsverfahren gestaltet sich als expliziter Eulerschritt sowohl im Ort als auch in der Zeit (FTFS). Mit diesem robusten Verfahren erster Ordnung kann eine generelle Machbarkeit am leichtesten getestet werden ohne die typische Stabilitätsproblematik. Als Zeitschrittweite der Höhenveränderung kommt Δt des Strömungslösers zum Einsatz, da bereits die Zeitschrittweitensteuerung des NaSt3DGP-Codes durch die Sediment-CFL-Bedingung angepasst wurde.

$$\begin{aligned}
 [Hoehe]_{i,k}^{n+1} &= [Hoehe]_{i,k}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left((1 + \alpha) \left([Q_{BX}]_{i+1,k}^n - [Q_{BX}]_{i,k}^n \right) + (1 - \alpha) \left([Q_{BX}]_{i,k}^n - [Q_{BX}]_{i-1,k}^n \right) \right) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta z} \cdot \left((1 + \beta) \left([Q_{BZ}]_{i,k+1}^n - [Q_{BZ}]_{i,k}^n \right) + (1 - \beta) \left([Q_{BZ}]_{i,k}^n - [Q_{BZ}]_{i,k-1}^n \right) \right)
 \end{aligned}$$

mit den zugehörigen Koeffizienten

$$\alpha = \operatorname{sgn} \left([Q_{BX}]_{i,k}^n \right) \quad \beta = \operatorname{sgn} \left([Q_{BZ}]_{i,k}^n \right)$$

welche die Richtung kontrollieren und bei negativer Transportrichtung auf Rückwärtsdifferenzen umschalten und umgekehrt. Die Aufteilung in *DIFFX* und *DIFFZ* lässt eine einfachere Implementierung des FTCS-Verfahrens zu. Wie sich im folgenden Abschnitt zeigt, ändern sich lediglich *DIFFX* und *DIFFZ*, so dass beispielsweise eine *if*-Abfrage, gesteuert über einen Befehlsparameter beim Programmaufruf, die Wahl des Diskretisierungsverfahrens umschalten kann.

Algorithm 8.6 Berechnung der Sedimenthöhe nach dem FTFS-Schema

```

1: for  $i = 1$  to gridp[0] do
2:   for  $k = 1$  to gridp[2] do
3:     if  $[hinhoehe]_{i,k} < [Hoehe]_{i,k}$  then
4:        $dx = 2 \cdot delx, \quad dy = 2 \cdot dely$ 
5:        $\alpha = sgn([Q_{BX}]_{i,k}), \quad \beta = sgn([Q_{BZ}]_{i,k})$ 
6:        $DIFFX = (1 + \alpha) \cdot ([Q_{BX}]_{i+1,k} - [Q_{BX}]_{i,k}) + (1 - \alpha) \cdot ([Q_{BX}]_{i,k} - [Q_{BX}]_{i-1,k})$ 
7:        $DIFFZ = (1 + \beta) \cdot ([Q_{BZ}]_{i,k+1} - [Q_{BZ}]_{i,k}) + (1 - \beta) \cdot ([Q_{BZ}]_{i,k} - [Q_{BZ}]_{i,k-1})$ 
8:
9:        $[Hoehe]_{i,k} = [Hoehe]_{i,k} - delt/dx \cdot DIFFX - delt/dz \cdot DIFFZ$ 
10:
11:     end if
12:   end for
13: end for

```

Als zweites Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung wird mit einem expliziten Euler in der Zeit und zentralen Differenzen im Ort (**Hoehe**) gerechnet. Als Zeitschrittweite kann wiederum Δt des Strömungslösers benutzt werden, da durch die zusätzlich eingeführte CFL-Bedingung bereits die Stabilitätsanforderung aus der Sedimentberechnung berücksichtigt worden ist.

$$[Hoehe]_{i,k}^{n+1} = [Hoehe]_{i,k}^n - \Delta t \cdot \frac{[Q_{BX}]_{i+1,k}^n - [Q_{BX}]_{i-1,k}^n}{2\Delta x} - \Delta t \cdot \frac{[Q_{BZ}]_{i,k+1}^n - [Q_{BZ}]_{i,k-1}^n}{2\Delta z}$$

Algorithm 8.7 Berechnung der Sedimenthöhe nach dem FTCS-Schema

```

1: for  $i = 1$  to gridp[0] do
2:   for  $k = 1$  to gridp[2] do
3:     if  $[hinhoehe]_{i,k} < [Hoehe]_{i,k}$  then
4:        $dx = 2 \cdot delx, \quad dy = 2 \cdot dely$ 
5:
6:        $DIFFX = [Q_{BX}]_{i+1,k} - [Q_{BX}]_{i-1,k}$ 
7:        $DIFFZ = [Q_{BZ}]_{i,k+1} - [Q_{BZ}]_{i,k-1}$ 
8:
9:        $[Hoehe]_{i,k} = [Hoehe]_{i,k} - delt/dx \cdot DIFFX - delt/dz \cdot DIFFZ$ 
10:    end if
11:  end for
12: end for

```

Die Vorzeichenauswertung der $[Q_{BX}]_{i,k}$ und $[Q_{BZ}]_{i,k}$ fallen in dieser Diskretisierung weg, so dass die etwas umständliche Berechnung der *DIFFX* und *DIFFZ* aus Algorithmus 8.6 deutlich vereinfacht wurde.

Nach erfolgter Berechnung der neuen Sedimenthöhe stellt sich das Problem der Anpassung der Höhe an die Fluid-NaSt3DGP-Geometrie, welche als neues Gebiet in den Strömungslöser eingeht.

8.6 Gefällsbegrenzer

Granulare Medien, wie Sande oder Kiese lassen sich nicht beliebig aufhäufen. Durch Rutschungsprozesse in Verbindung mit interner Reibung bilden sich in der Natur natürliche Hangwinkel, auch Schüttwinkel genannt. Diese Prozesse stellen in ihrer Komplexität ein eigenes Forschungsgebiet dar und sollen hier durch einen iterativen Neigungsbegrenzer reproduziert werden.

8.6.1 Natürliche Schüttwinkel

Sich natürlich einstellende Neigungswinkel hängen von unterschiedlichsten Kriterien ab. Beeinflussende Faktoren sind unter anderen: Form und Größe des Korns, Art des Materials oder der Einfluss kohäsiver Medien. Diese Beispiele werden als Hauptverantwortliche angesehen und werden aus diesem Grund im Folgenden näher beschrieben. Als kohäsive Medien sind beispielsweise Wasser oder andere Flüssigkeiten wie Öl oder ähnliche zu nennen. Oberflächenspannung, Wasserstoff-Brückenbindungen und direkte chemische Verbindungen dieser Fluide halten die einzelnen Körner zusammen und dienen als Bindemittel. So erhöht sich der maximal erreichbare Winkel im Vergleich zu trockenem Granulat. Klumpen- und Krustenbildung können sogar die Eigenschaft eines granularen Mediums völlig aufheben.

Art des Materials des zugrunde liegenden Stoffes, aus welchem die Körner bestehen, beeinflussen ebenfalls die Schüttwinkel. Kristalline Materialien, wie Zucker oder Salz, bilden scharfkantige Strukturen in ihrer Oberflächenform aus. Quarzsande können hingegen durch Erosion glatt geschliffene Oberflächen besitzen. Dementsprechend entstehen unterschiedliche Kornrauigkeiten und damit erhöht oder verringert sich die innere Reibung der einzelnen Körner untereinander. Folgen sind verkantete Sedimentverbände und Konglomerate, welche zu stabilen Gebilden führen können, die unempfindlich gegen Er-

schütterungen oder Erosion sind. Somit verhindern diese Eigenschaften eine allgemeine Aussage über den zu erwartenden Hangwinkel.

Die dritte und wichtigste Komponente ist die Form und Größe der einzelnen Körner. Größere oder kantigere Körner verankern sich stärker ineinander, als rundlichere Körner. Der Rundungsgrad des Kornes hängt hierbei nicht von der Art des Materials oder der Korngröße ab und kann somit unabhängig vom Ausgangsstoff angewandt werden. Homogene Korngrößen bilden die typischen Hangwinkel aus, wohingegen Mischungen unterschiedlicher Kornfraktionen Schwankungen unterliegen.

Die aufgeführten Eigenschaften vereinen sich im komplizierten Zusammenspiel mehrerer Prozesse, welche ein Abrutschen einer „Sedimentportion“ zur Folge haben. Zufällig verteilte Kohäsion und struktureller Zusammenhalt können den Schüttwinkel, selbst über den kritischen Winkel hinaus, für einen kurzen Moment stabil halten. Folglich sind kurzfristig größere Winkel möglich. Jedoch wird dieser Zustand durch kleinste Veränderung des Systems aus dem Gleichgewicht gebracht und führt zu einem schlagartigen Abrutschen des Sedimentes. Auf dieselbe zufällige Art und Weise rutschen manche Sedimentteile weiter ab als andere. Ein exaktes Einhalten der Schüttwinkel ist nicht zu erwarten. Im Mittel pendelt der Hangwinkel um den vorgegebenen Winkel. Auf einer mittleren bis groben Betrachtungsskala sind diese Überlegungen empirisch durch Versuche (Möller et al., 2002) validiert worden. Im kleinskaligen Betrachtungsmaßstab jedoch lässt sich dieses Konzept nicht anwenden, da hier das einzelne Korn zu großen Einfluss hat. Zur numerischen Berechnung und Simulation dieser Schüttwinkel werden unter anderem sehr aufwändige und rechenintensive Moleküldynamikmodelle verwendet (Lee & Herrmann, 1993).

Tabelle 8.1: Typische Hangwinkel zusammengefasst nach Möller et al. (2002)

Sand	trocken	20 – 30°
	nass (je nach Wassergehalt)	20 – 45°
Kiese	rund bis kantig	30 – 50°
Schluffe und Tone	Form- und Oberflächenabhängig	20 – 60°

8.6.2 Slope-Limiter Algorithmus

Da es im numerischen Algorithmus des Sedimenttransports nicht um die Prozesse innerhalb der granularen Medien geht, soll ein zufriedenstellendes Verfahren zur Begrenzung des Hangwinkels implementiert werden. Auf rechteckigen Gitterzellen ergeben sich für jeden Wert des Feldes *Hoehe* acht mögliche Nachbarn. Jeweils vier Kanten- und vier Ecknachbarwerte müssen auf Überschreiten des Hangwinkels überprüft werden. Direktes Vergleichen der jeweiligen Nachbarwerte lässt sich über folgende Bedingung durchführen:

$$\begin{aligned} \left| [Hoehe]_{i,k} - [Hoehe]_{i\pm 1,k} \right| &< \tan(\alpha) \cdot \Delta x \\ \left| [Hoehe]_{i,k} - [Hoehe]_{i,k\pm 1} \right| &< \tan(\alpha) \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Da es sich bei den Ecknachbarn um einen größeren Abstand handelt muss Δx für den Vergleich der Ecknachbarn durch $\Delta xz = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$ ersetzt werden. So dass sich folgende Bedingung exemplarisch für die Ecken ergibt:

$$\left| [Hoehe]_{i,k} - [Hoehe]_{i\pm 1,k\pm 1} \right| < \tan(\alpha) \cdot \Delta xz$$

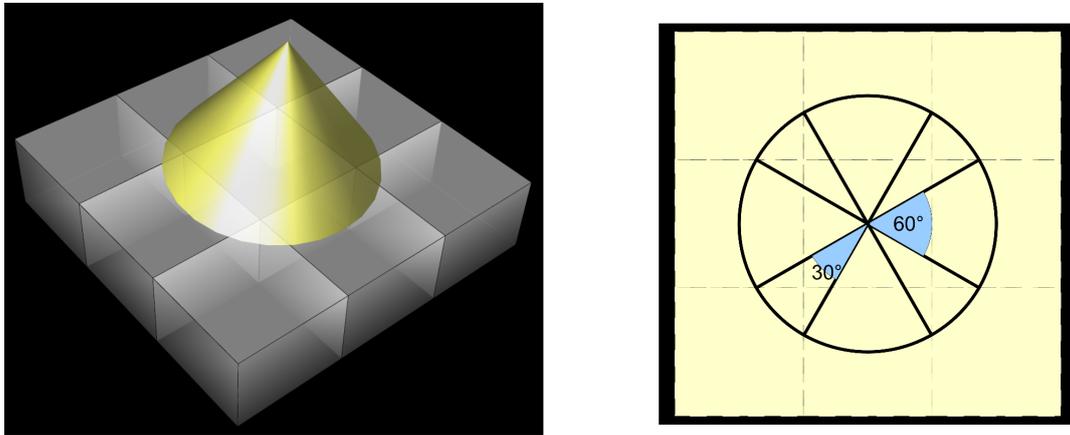


Abb. 8.2: Anteile des durch abrutschende Sedimentmassen entstandenen Schüttkegels. Kantennachbarn bilden ein gleichseitiges Dreieck, woraus ein Anteil von $\frac{1}{6}$ für Kantennachbarn und $\frac{1}{12}$ für Ecknachbarn entsteht.

Ausgehend von diesen Anforderungen an das Gefälle der Höhenwerte wird im nächsten Schritt das gesamte Feld *Hoehe* durchgegangen und die jeweilige Bedingung geprüft. Falls es zu einer Überschreitung der Höhengrenze kommt, wird die überschüssige Höhen-

differenz iterativ nach dem Schema aus Abbildung 8.2 auf die jeweiligen Zellen verteilt. Kantennachbarn erhalten somit $\frac{1}{6}$ und Ecknachbarn $\frac{1}{12}$ der Höhenmassen. Um mögliche Überschneidungen von Zellen zu vermeiden, welche von zwei oder mehr unterschiedlichen Nachbarzellen Sediment erhalten, wird dieser Vorgang iterativ durchgeführt. Der resultierende Mehraufwand im iterativen Verteilungsvorgang hält sich in Grenzen und wird durch die Laufzeiten der anderen numerischen Algorithmen dominiert.

Zusammenfassend stellt Algorithmus 8.8 die einzelnen Vorgänge und deren Reihenfolge dar. Zu beachten ist, dass das Feld *Hoehe* nicht direkt zur Speicherung der Ergebnisse benutzt wird, sondern die resultierenden neuen Höhenwerte in einem Hilfsfeld *HI* gespeichert werden und erst nach einem kompletten Durchlauf des Feldes *Hoehe* die Werte aus *HI* in die eigentliche *Hoehe* zurückgeschrieben werden. Nötig wird dieser Schritt, damit nicht im Verteilungsalgorithmus auf bereits veränderte Werte zugegriffen wird. Dies hätte Asymmetrien in der Hangneigung und eine nicht gewollte Verschiebung der Sedimentmasse in negative *X* beziehungsweise *Z*-Richtung zur Folge.

Abbildung 8.3 zeigt die unterschiedlichen Ergebnisse für die Hangwinkel von 25° bis 60° , nach Anwendung des Slope-Limiters auf einen „Sedimentturm“. Visualisiert wurde das Höhenfeld in Paraview, welches lineare Interpolation zwischen den Stützpunkten verwendet.

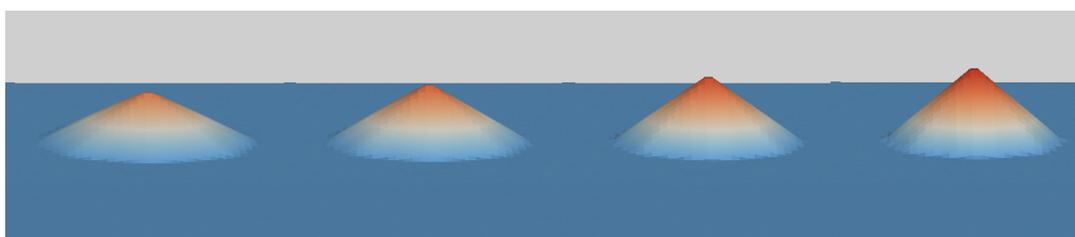
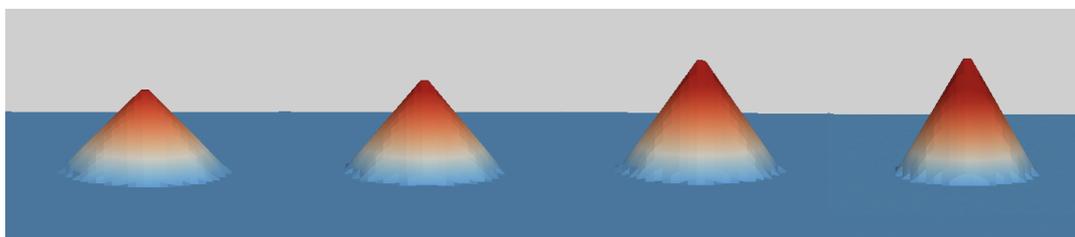
(a) $25^\circ - 40^\circ$ (b) $45^\circ - 60^\circ$

Abb. 8.3: Ergebnisse des Slope-Limiters auf einen Sedimentturm für die Winkel $25^\circ - 60^\circ$ in 5° -Schritten

Algorithm 8.8 Slope-Limiter Algorithmus exemplarisch für eine Kante und eine Ecke

```

1:  $\tan SL = \tan(45^\circ)$ 
2:  $\text{deltax} = DX[0]$ 
3:  $\text{deltaxz} = \text{sqrt}(DX[0]^2 + DZ[0]^2)$ 
4:  $[HI] = [Hoehe]$ 
5: for  $i = 1$  to  $\text{gridp}[0]$  do
6:   for  $k = 1$  to  $\text{gridp}[2]$  do
7:     if  $[\text{hinhoehe}]_{i,k} < [Hoehe]_{i,k}$  then
8:       if  $([Hoehe]_{i,k} - [Hoehe]_{i-1,k}) > \tan SL \cdot \text{deltax}$ 
9:         und  $[\text{hinhoehe}]_{i-1,k} < [Hoehe]_{i-1,k}$  then
10:           $\text{diff} = [Hoehe]_{i,k} - [Hoehe]_{i-1,k}$ 
11:           $[HI]_{i,k} - = 1./6. \cdot \text{diff}$ 
12:           $[HI]_{i-1,k} + = 1./6. \cdot \text{diff}$ 
13:        end if
14:        if  $([Hoehe]_{i,k} - [Hoehe]_{i-1,k-1}) > \tan SL \cdot \text{deltaxz}$ 
15:          und  $[\text{hinhoehe}]_{i-1,k-1} < [Hoehe]_{i-1,k}$  then
16:             $\text{diff} = [Hoehe]_{i,k} - [Hoehe]_{i-1,k-1}$ 
17:             $[HI]_{i,k} - = 1./12. \cdot \text{diff}$ 
18:             $[HI]_{i-1,k-1} + = 1./12. \cdot \text{diff}$ 
19:          end if
20:        end if
21:      end for
22:    end for
23:   $[Hoehe] = [HI]$ 

```

Ebenso zeigt der einstellbare Hangwinkel α bei unterschiedlichen Werten, dass sich ein flacheres Gefälle einstellt und sich somit unterschiedlich steile Hügel ausbilden (Abbildung 8.3). Abbildung 8.4 illustriert deutlich den gewünschten Effekt, dass Zellen, welche von zwei unterschiedlichen Nachbarn gleichzeitig Sediment erhalten, berücksichtigt werden und keine Asymmetrien der Nachbarn entstehen. In den vorangegangenen Überlegungen wird von einem vollständigen und abrupten Abrutschen des überschüssigen Sedimentes ausgegangen, dabei wird eine lokale Stabilisierung durch Benetzungseffekte und ähnliche „klebende“ Vorgänge vernachlässigt. Diese Einschränkungen behindern die korrekte Darstellung der Sedimentformen jedoch nicht, da der hier vorgestellte Algorithmus lediglich die entstehenden Winkel prinzipiell begrenzen und nicht zufällige Phänomene wiedergeben soll. Die Interaktion zwischen Strömung und Sedimentbett wird durch diese Art Begrenzer auf die Schubspannung τ beschränkt, folglich wird keine direkte Wechselwirkung zwischen Teilchen und Fluid modelliert. Während des eigentlichen Transportes

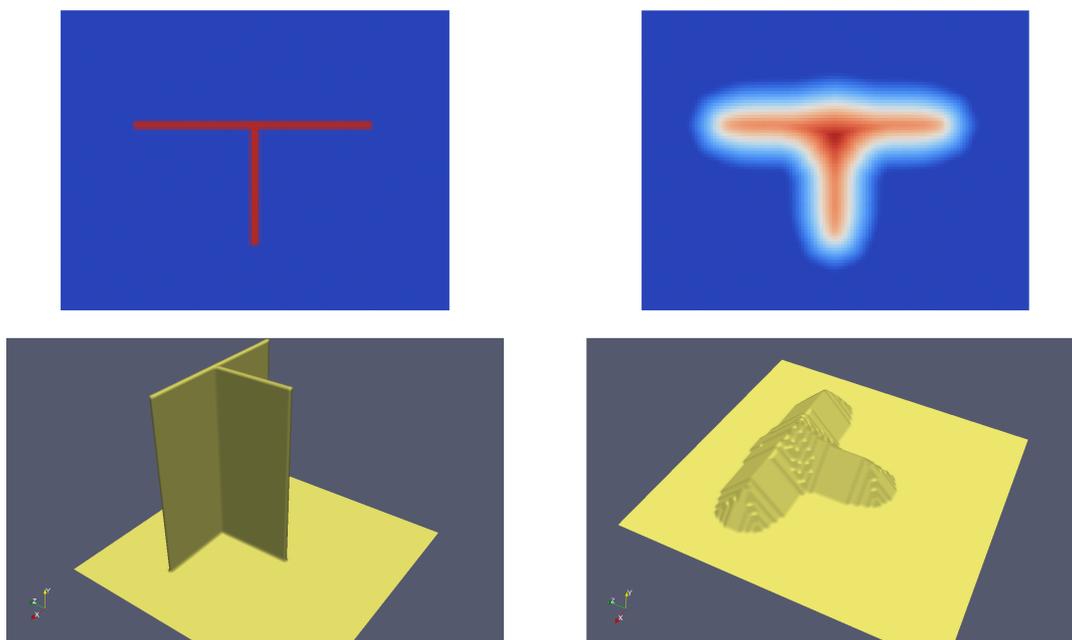


Abb. 8.4: Ergebnis eines aufgetürmten Sandhaufens in T-Form vor und nach der iterativen Massenverteilung durch den Slope-Limiter Algorithmus (Visualisierung des Flag-Feldes $\alpha = 45^\circ$)

sind die Veränderungen des Gerinnebettes nicht so rapide, so dass Winkel entstehen könnten, welche eine Korrektur der Sedimentoberfläche durch den Slope-Limiter von mehreren angrenzenden Nachbarzellen gleichzeitig nötig machen würde. Lediglich in der Initialisierungsphase eines Haufen ähnlich einer Düne (Abschnitt 9.5) steigt der Aufwand des Gefällsbegrenzers kurzfristig an und bleibt während der Berechnung auf wenige Durchläufe beschränkt

8.7 Anpassung des Flag-Feldes

Mit der neu berechneten Sedimenthöhe wird das, für NaSt3DGP relevante, Gebiet verändert. Hierzu muss das bestehende Flag-Feld verändert werden, um eventuell freigewordene Sedimentzellen dem Strömungslöser als Fluidzellen kenntlich zumachen und umgekehrt. Aus der Sedimenthöhe *Hoehe* wird durch Runden das *integer*-Feld *Hoeheindex* berechnet:

$$[Hoeheindex]_{i,k} = \left\lfloor \frac{[Hoehe]_{i,k}}{\Delta y} \right\rfloor$$

Algorithm 8.9 Neubelegung des *Flag*-Feldes durch Runden der Höhe

```

1: for  $i = 1$  to gridp[0] do
2:   for  $k = 1$  to gridp[2] do
3:      $[Hoeheindex]_{i,k} = \lfloor [Hoehe]_{i,k} / DY[0] + 0.5001 \rfloor$ 
4:     if  $[hinhoehe]_{i,k} < [Hoehe]_{i,k}$  then
5:       for  $j = 1$  to  $[Hoeheindex]_{i,k}$  do
6:          $[flag]_{i,j,k} = OBSTACLE$ 
7:       end for
8:       for  $j = [Hoeheindex]_{i,k} + 1$  to gridp[1] do
9:          $[flag]_{i,j,k} = 0$ 
10:      end for
11:    end if
12:  end for
13: end for

```

Mit Hilfe von *Hoeheindex* kann jede Zelle, für die $j \leq [Hoeheindex]_{i,k}$ gilt, belegt werden:

$$[flag]_{i,j,k} = Hindernis$$

In einem weiteren Schritt werden alle Zellen, für die $j > [Hoeheindex]_{i,k}$ gilt

$$[flag]_{i,j,k} = Fluid$$

auf Fluidzellen gesetzt. Dieser Schritt verhindert, dass nach Verringerung der Sedimenthöhe noch ältere Flags die Berechnung des Strömungslösers beeinflussen.

Ähnlich wie beim Mapping des Gebietes des *scene*-Files des NaSt3DGP auf das gewählte Gitter kann es dazu kommen, dass Zellen entstehen, welche Fluidzellen auf gegenüberliegenden Seiten als Nachbarn haben. Dies würde zum Zusammenbruch des Drucklösers führen und wird bereits in *navsetup* mit einer *Flag*-Feld-Korrektur abgefangen. Diese Prozedur muss hier in jedem Durchlauf nach dem eigentlichen Mapping des Sedimentfeldes auf das *Flag*-Feld aufgerufen werden. Eine weitere Veränderung wird nach der Parallelisierung notwendig, da der Neuaufwurf der Korrekturprozedur nicht auf Grenzzellen der Nachbargebiete wirken würde, muss diese Funktion abermals geändert werden.

Um Mehraufwand zu vermeiden, wird das *Flag*-Feld erst nach den fertigen Korrekturen der Hindernisse vervollständigt. Damit werden Nachbarschaftsbeziehungen und Haftbedingungen erst anschließend im Gebiet separat gesetzt. Fertig gesetzte Sediment-

zellen erhalten im nächsten Schritt entweder Rutsch- oder Haftbedingungen als Randbedingung. Für Sedimentzellen sind Haftbedingungen voreingestellt. Hintergrund ist die Vorstellung, dass in direkter Umgebung des Bodens die Geschwindigkeit verschwindet. Um die nun neugesetzten Zellen für die Berechnung durch NaSt3DGP zur Verfügung zu stellen, werden die lokalen Listen in NaSt3DGP zuerst gelöscht und dann anhand der jeweiligen *Flag*-Werte neu aufgebaut.

Aktualisierungsintervalle

Wenn durch das beschriebene Mapping das Flag-Feld im Vergleich zum Flag-Feld im vorhergehenden Schritt sich verändert hat, müssen die freigewordenen oder hinzugekommenen Hinderniszellen mit Werten für den Druck und die Geschwindigkeiten belegt werden.

Dieses Problem kann nun auf zwei unterschiedliche Arten gelöst werden. Der erste Weg besteht darin, dass alle Strömungsfelder und die Zeit auf Null gesetzt werden. Dies verlangt allerdings eine anschließende erneute Berechnung der Strömung über einen genügend großen Zeitraum, so dass sich wieder ein stationärer beziehungsweise quasi-stationärer Strömungszustand ausbildet, um dann wieder den Sedimenttransport zu starten.

Ein weiterer Neustart wird notwendig, sobald sich das Flag-Feld erneut ändert. Somit wäre der Aufwand, einen zufriedenstellenden Strömungszustand zu erreichen enorm und steigt mit der Ausbildung von komplexen Sedimentstrukturen und schnellen Sedimenttransport. Da sich in den ersten neuen Zeitschritten kein vollständiger Strömungszustand entwickeln kann, wird der Sedimenttransport für einige Schritte *stroemschritte* oder eine festgelegte Zeit *sedstart* ausgesetzt. *stroemschritte* und *sedstart* lassen sich ebenfalls über Befehlsparameter *-f* beim Aufruf von *navcalc* steuern. Je länger der Sedimenttransport ausgesetzt wird, desto besser wird sich die Strömungssituation an die neue Geometrie anpassen. Weitere Nachteile hierin sind, dass lediglich stationäre beziehungsweise quasi-stationäre Strömungszustände berechenbar sind und damit jegliche Dynamik des Sedimentbettes nicht erfasst beziehungsweise verzerrt dargestellt werden kann.

Die zweite Variante besteht darin, das bereits berechnete Strömungsfeld weiter zu nutzen und so zu modifizieren, dass es zu der neuen Geometrie passt. Wäre dies möglich,

würde sich das Problem des aufwendigen Neustarts erledigen und ebenso die Wahl der Variablen *stroemschritte* und *sedstart* umgehen. Als erste Idee bietet es sich an, das berechnete Strömungsfeld weiterzubnutzen und sowohl in den hinzugekommenen Gebietszellen als auch in den abgezogenen Gebietszellen alle Geschwindigkeiten auf Null zu setzen. Die neuen Werte für den Druck des gesamten Fluidgebietes werden mit Null initialisiert.

Aus diesen Veränderungen ergibt sich dieselbe Situation, wie zu Beginn einer CFD-Simulation, in welcher ein Geschwindigkeitsfeld vorgegeben ist. Da im Bereich des unveränderten Gebietes das Geschwindigkeitsfeld sehr nah der Lösung ist, muss der eigentliche Strömungslöser lediglich im Umfeld der neu gesetzten Geschwindigkeiten die Lösung länger iterieren. Zur Gewinnung eines besseren Strömungsfeldes für den Sedimenttransport, wird wiederum für eine bestimmte Anzahl an Zeitschritten der Sedimenttransport ausgesetzt. Bereits nach wenigen Zeitschritten hat sich die Anzahl der benötigten Iterationen in der Praxis halbiert. Ein weiterer Vorteil ist eine bessere Erfassung der Sedimentbettdynamik.

Beide Varianten verändern die Geschwindigkeits- und Druckfelder derart, dass die Diskretisierungsvariante in NaSt3DGP in der Zeit nach Adams-Bashforth nicht mehr benutzt werden kann. Grund für den Verlust des Verfahrens 2. Ordnung ist, dass die Geschwindigkeiten aus dem vorigen Zeitschritt sinnvoll angepasst werden müssten. Hierfür kommen jedoch die Geschwindigkeiten an der ursprünglichen Sedimentoberfläche nicht in Frage, da durch die Randbedingungen entgegengesetzte Geschwindigkeiten vorliegen. Dementsprechend wird in allen weiteren Experimenten mit der Euler Diskretisierung 1. Ordnung gearbeitet.

In den Experimenten wird die dynamischere Variante mit *stroemschritte* = 2 und laufender Aktualisierung der neuen Flag-Zellen benutzt, da die gleichzeitig zur Strömung ablaufende Veränderung des Sedimentbettes die natürlichen Abläufe am besten abbildet.

Zusammenfassend kann der entstandene Ablauf des Algorithmus in folgendem Pseudocode zusammengefasst werden, in welchem jede der beschriebenen Prozeduren zum Einsatz kommt:

Algorithm 8.10 Gesamter Sedimenttransportcode in Pseudocode

- 1: *navsetup* Generierung der sedimentfreien Geometrie
 - 2: Auffüllung der Geometrie mit Sediment *initHoehe* unter Beachtung der Hindernisstruktur *hinhoehe*
 - 3: *INITFLAG* Mapping der Sedimenthöhe auf die Nav-Geometrie, Berechnung des Feldes *Hoeheindex* und anschließendes Neusetzen aller nötigen *Flag*-Werte, Eventuelle Korrektur der *inout*- bzw. *inflow*-Randwertlisten
 - 4: **while** $t < t_{end}$ **do**
 - 5: *NaSt3DGP* Übergabe der neuen Geometrie an *NaSt3DGP* und Berechnung des Geschwindigkeits- und Druckfeldes
 - 6: *CALC – TAU* Berechnung der Schubspannungen τ_x und τ_z mit Hilfe der Geschwindigkeiten im Abstand τ_{dy} zur Sedimentoberfläche
 - 7: *CALC – QB* Berechnung des Geschiebetransports q_{bx} und q_{bz} aus den Schubspannungen mit Hilfe der Geschiebeformeln aus Abschnitt 7.2
 - 8: *CALC – HOEHE* Höhenberechnung nach Exnergleichung durch die Diskretisierungsverfahren aus Abschnitt 8.5
 - 9: *SLOPE – LIMITER* Iterative Verteilung der Sedimenmassen bis kritischer Hangwinkel unterschritten ist (nach Abschnitt 8.6)
 - 10: *INITFLAG* Mapping der neuen Sedimenthöhe auf die Nav-Geometrie, Berechnung des Feldes *Hoeheindex* und anschließendes Neusetzen aller nötigen *Flag*-Werte, Eventuelle Korrektur der *inout*- bzw. *inflow*-Randwertlisten
 - 11: **end while**
-

8.8 Parallelisierung

Wie üblich bei Strömungssimulationen und numerischen Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ist eine Parallelisierung des vorgestellten Codes unumgänglich. Mit NaSt3DGP besteht bereits ein paralleler Navier-Stokes-Löser, somit ist eine Parallelisierung des vorgestellten Sedimentcodes notwendig.

8.8.1 Veränderungen des Strömungslösers

Um unnötigen Aufwand in der Anpassung des sequentiellen Algorithmus' an eine parallele Berechnung zu vermeiden, müssen kleinere Änderungen im Strömungslöser vorgenommen werden.

Ursprünglich wird die Strategie der Gebietszerlegung auf das Fluidgebiet in allen drei Raumdimensionen angewendet. Um minimalen Kommunikationsaufwand zu garantieren, wird im Initialschritt eine optimale Zerlegung des Gebietes auf die, zur Verfügung stehenden Prozessoren, berechnet. Wenn eine optimale Zerlegung des Gebietes eine Partitionierung in Y -Richtung vorgibt, könnte es je nach Sedimentdicke zu einem Überlappen in ein anderes Gebiet in Y -Richtung kommen. Da sich hierdurch komplizierte Kommunikationsschritte ergäben, wird der bestehende Gebietszerlegungsalgorithmus derart eingeschränkt, dass lediglich in X - und Z -Richtung zerlegt wird. Somit ergeben sich Kommunikationsschritte an den Grenzen der jeweiligen Gebiete. Weiterhin werden die angrenzenden Sedimenthöhen ausgetauscht und in die jeweiligen Ghost-Zellen der Nachbargebiete geschrieben. Im Gegensatz zur üblichen 2D-Kommunikationsroutine des NaSt3DGP-Lösers müssen als Besonderheit die Eckzellen der jeweiligen Gebiete mit den Überecknachbarn ausgetauscht werden.

Dieser Schritt garantiert einen Sedimentaustausch zwischen jeweiligen Nachbargebieten. Im Speziellen liefert die Übereckkommunikation korrekte Informationen für den Slope-Limiter-Algorithmus.

8.8.2 Kommunikation

Exemplarisch werden alle Kommunikationsschritte in Abbildung 8.5 dargestellt und sind auf die anderen Fälle analog zu übertragen.

Die in Abbildung 8.5 dargestellten Kommunikationswege gelten für alle auszutauschenden Felder (Q_{BX} , Q_{BZ} , TAU_X , TAU_Z und $Hoehe$). Alle fünf Datenfelder werden mit

derselben Routine ausgetauscht, dementsprechend werden alle Felder neben der Kantenkommunikation auch eine Übereckkommunikation unterzogen. Eigentlich ist bei der Berechnung der Exner-Gleichung eine Übereckkommunikation nicht nötig, da jedoch der Gefällsbegrenzer alle acht Nachbarn benötigt, muss für die *Hoehe* ein Überecktausch geschehen. Dieses Zuviel an Kommunikation ist allerdings in der Laufzeit mit sechs Kommunikationsschritten pro Ecke gering und wird durch den Vorteil einer gemeinsamen Kommunikationsroutine sowohl für die Felder Q_{BX} , Q_{BZ} , TAU_X und TAU_Z als auch für die *Hoehe* wieder kompensiert. Die Felder *hinhoehe* und *Hoeheindex* müssen im Laufe des Algorithmus nicht weiter kommunizieren, da sie entweder zu Beginn initialisiert wurden oder im jeweiligen Gebiet aus der bereits übertragenen *Hoehe* separat berechnet wurden.

Im sequentiellen Fall reicht es aus, die Flag-Korrektur-Prozedur einmalig nach dem Neusetzen des *Flag*-Feldes aufzurufen, da sich die Ghost-Zellen im Gebiet nicht verändern. Nach dem Gebietszerlegungsprinzip ergibt sich jedoch die Situation, dass im parallelisierten Verfahren in jedem Gebiet die *Flag*-Korrektur aufgerufen wird und alle Werte korrigiert werden. In den Ghost-Zellen werden jedoch immer noch die alten Werte benutzt. Dieser Umstand kann dazu führen, dass an den Gebietsrändern in den Ghostzellen noch Hindernisse gespeichert sind, welche jedoch im zugehörigen Nachbargebiet durch die dortige *Flag*-Korrektur beseitigt worden sind. Was zu einem Zusammenbruch des Drucklösers führen würde. Wenn in allen Gebieten die Korrekturprozedur durchgelaufen ist, werden anschließend die Gebietsränder ausgetauscht, um dann einen weiteren Durchlauf zu starten. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis in jedem Teilgebiet diese Korrekturroutine keine „falschen“ Zellen mehr korrigieren muss.

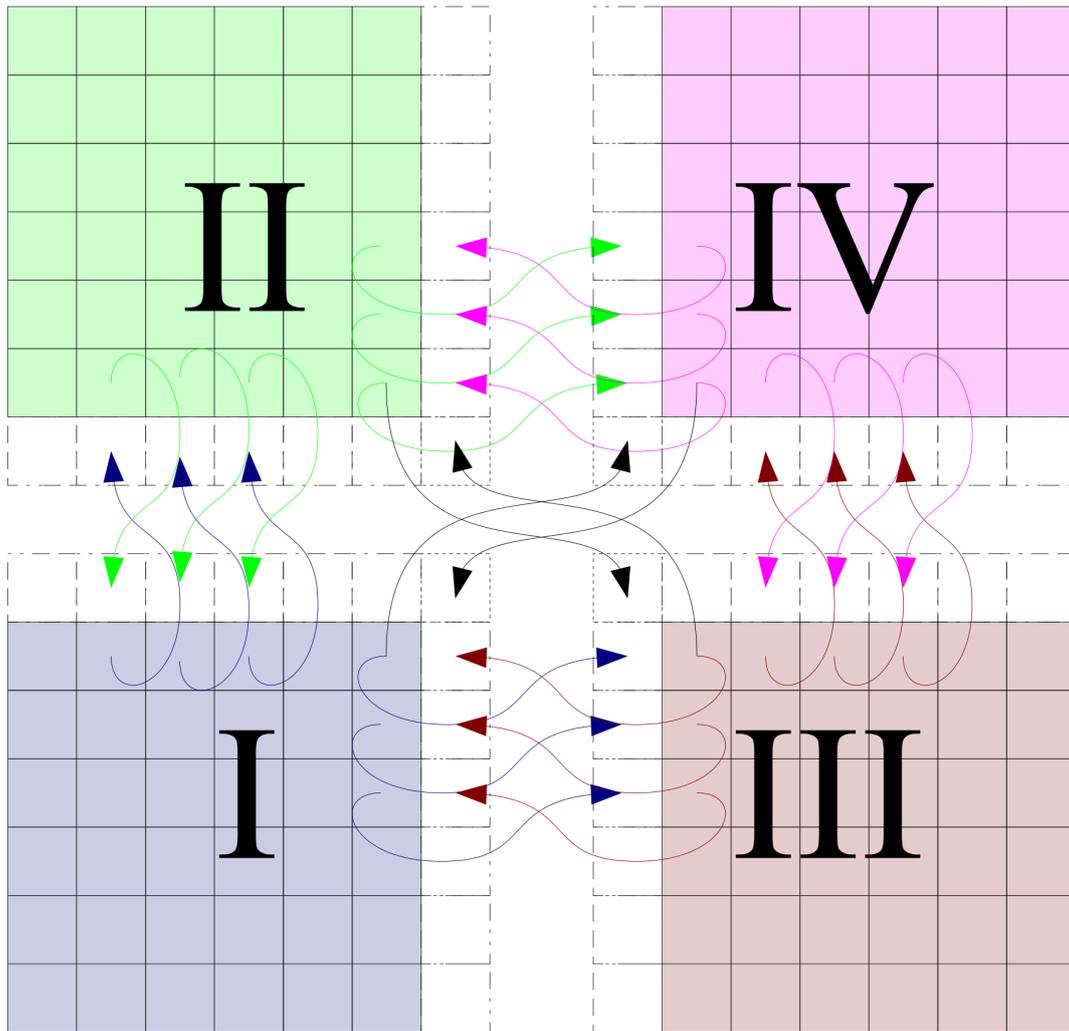


Abb. 8.5: Schematische Kommunikation von Übereckgebieten. Die gespeicherten Werte werden an die jeweiligen Nachbarn übergeben inklusive der Eckwerte.

9 Konvergenzanalyse und Ergebnisse

9.1 Konvergenzanalyse

Um den erstellten Algorithmus zu testen, werden an ausgewählten Beispielen numerische Versuche und Konvergenzanalysen durchgeführt. Als grundlegendes Beispiel aus der Fluidodynamik wird Driven-Cavity mit Sedimenttransport berechnet und untersucht. Weitere Tests werden an folgenden Beispielen durchgeführt.

- Doppelte Stufe
- Rückwärtige Stufe mit Ausflussrand
- Dünenentwicklung
- Fluviale Hindernismarke an überströmten Hindernis

Zuerst gilt es, die Konvergenzordnungen beider Verfahren zu bestimmen, um im späteren Verlauf Vergleiche zu ziehen. Alle vorgestellten Beispiele werden auf Grund des enormen Aufwands mit dem parallelisierten Löser berechnet. Die Visualisierung des Strömungszustandes und der Sedimentoberfläche wurde mit Paraview durchgeführt. Die Konvergenz wird in Matlab mit folgender Herangehensweise analysiert: zuerst werden drei Auflösungen mit der Gittermaschenweite Δx , $\Delta x/2$ und $\Delta x/4$ berechnet, um danach die gröberen Gitter auf das nächste Feinere zu interpolieren. Auf Grund der fehlenden analytischen Lösung, wird der Idee gefolgt, dass die Abnahme der Fehler auf den feiner werdenden Gittern der Konvergenzordnung entspricht. Matlab stellt mit der Routine `interp2(xih,yih,hoehe,xih2,yih2)` bereits ein Interpolationsverfahren zur Verfügung. Bilineare Interpolation interpoliert die jeweiligen Lösungen auf die nächst feineren Gitter. Aus den entstandenen interpolierten Lösungen auf den drei Gittern lassen sich mit Hilfe der folgenden Formel die Konvergenzordnungen p in den jeweiligen Normen berechnen:

$$p = \frac{\log \frac{\|h_{\frac{\Delta x}{2}} - h_{\frac{\Delta x}{4}}\|}{\|h_{\Delta x} - h_{\frac{\Delta x}{2}}\|}}{\log 2} \quad (9.1)$$

Als Normen werden die *max*-, L_1 - und die L_2 -Norm benutzt. Da in vorstehender Gleichung 2 als Basis dient, wird bei Halbierung der Exponent negativ. Somit gilt, dass im weiteren Verlauf p mit umgekehrten Vorzeichen angegeben wird. Dies bedeutet, dass eine Konvergenzrate p mit positiven Vorzeichen eine Fehlerreduktion darstellt und ein negatives p einen größer werdenden Fehler.

Vor der eigentlichen Bestimmung der Konvergenzordnung steht die theoretische Betrachtung des Lösers und der zu erwartenden Konvergenzordnung. NaSt3DGP bietet für alle Teile der Navier-Stokes-Gleichungen Diskretisierungsschemata zweiter Ordnung an. Da alle Beispiele mit „QUICK“ berechnet wurden, bezieht sich die folgende Arbeit auf das QUICK-Schema. Um eine Konvergenz zweiter Ordnung zu gewährleisten musste des Weiteren $\Delta t \leq \mathcal{O}(\Delta x^2)$ gewählt werden. Folglich ergibt sich aus nachstehender Gleichung eine Gesamtkonvergenzrate von $p = 2$:

$$\begin{aligned} |u - u_h| &\leq C_{Zeit} \cdot \Delta t + C_{Ort} \cdot \Delta x^2 \\ |u - u_h| &\leq C_{Zeit} \cdot \Delta x^2 + C_{Ort} \cdot \Delta x^2 = C_{gesamt} \cdot \Delta x^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Da die Geschwindigkeiten die wichtigste Eingangsgrößen des Sedimenttransport darstellen, müssen die unterschiedlichen Randbedingungen für das Sediment diskutiert werden.

Rutschbedingungen an der Sedimentoberfläche

Vor dem Hintergrund, dass Grenzschichten nicht genügend fein aufgelöst werden können, gibt es, wie bereits im Kapitel 7.1 vorgestellt, die Möglichkeit Rutschbedingungen (*slip*) für die gesamte Sedimentoberfläche zu setzen. In die Berechnung der zugehörigen Schubspannungen fließen in dem Fall die Geschwindigkeiten an der Kontaktfläche zwischen Sediment und Fluid ein. QUICK als Verfahren zweiter Ordnung, hat die Einschränkung, dass Randgeschwindigkeiten mit dem Donor-Cell-Schema (DC) berechnet werden. Die Konsequenz ist eine Konvergenz an den Rändern der Ordnung $p = 2 - \alpha$, wobei α das Gewicht zwischen zentralen Differenzen und vollem Upwind im DC-Verfahren ist. Alle

Beispiele wurden mit einem $\alpha = 0.5$ berechnet. Folglich ist eine Konvergenzordnung der Sedimenthöhenfunktion von $p = 1.5$ zu erwarten.

Haftbedingungen an der Sedimentoberfläche

Die zweite Möglichkeit für Randbedingungen besteht in der Belegung mit Haftbedingungen (*noslip*). In diesem Fall wäre die Benutzung der Strömungsgeschwindigkeiten auf der Sedimentoberfläche sinnlos, da Haftbedingungen $u = 0$ an den Rändern fordern. Dieser Überlegung folgend müssen andere Geschwindigkeiten in einem Abstand von $\tau_{\Delta y}$ gewählt werden. Wenn $\tau_{\Delta y}$ genügend groß ist, werden die in diesem Abstand vorliegenden Geschwindigkeiten, nicht mit dem Donor-Cell-Schema, sondern bereits mit QUICK berechnet. Somit kann eine Konvergenzordnung von $p = 2$ erwartet werden.

Zusätzlich zu diesen Einschränkungen, führen die vorgestellten Diskretisierungsverfahren FTFS und FTCS zu weiteren Einschränkungen der Konvergenzrate, damit ist aus der Kombination des NaSt3DGP-Codes und der Exner-Diskretisierung jeweils die geringere Konvergenzrate zu erwarten:

$$p_{kombi} = \min(p_{NaSt3DGP}, p_{Exner}) \quad (9.3)$$

Nach den vorangegangenen Überlegungen lassen sich die jeweiligen Kombinationen in nachstehender Tabelle 9.1 zusammenfassen:

Tabelle 9.1: Zu erwartende Konvergenzrate p_{kombi}

	FTFS (1. Ordnung)	FTCS (2. Ordnung)
<i>slip</i> (Ordnung 1.5)	1.0	1.5
<i>noslip</i> (Ordnung 2.0)	1.0	2.0

Bisher wurden lediglich die Einflüsse der beiden Diskretisierungsarten der Exner-Gleichung auf die Konvergenz betrachtet, ohne die Approximation der Sedimenthöhe durch das *Flag*-Feld zu berücksichtigen. Alle Überlegungen bleiben solange zutreffend, bis sich das *Flag*-Feld ändert. Veränderungen der Höhenfunktion h und anschließendes Mapping der Höhenfunktion auf das Gebiet des NaSt3DGP-Lösers führen vom einen auf den

nächsten Zeitschritt zu unterschiedlichen Gebieten. Entscheidend ist, dass das Mappingverfahren die Sedimenthöhenfunktion konstant auf das *Flag*-Feld abbildet. Aus diesem Grund, kann im dynamischen Prozess des Sedimenttransportes nicht mehr von den oben genannten Konvergenzraten ausgegangen werden, viel mehr ist ein Abrutschen dieser Raten auf niedrigere Werte zu erwarten. Das starre Auf- und Abrunden im Mappingprozess kann bei veränderten *Flag*-Feldern auf den jeweiligen Auflösungen zu abrupten Einbrüchen der Konvergenzraten führen. Im Speziellen sollte sich dieser Effekt in der Maximumsnorm niederschlagen, so dass Knicke und und plötzliches Einbrechen im Verlauf der Raten auf den Effekt der unterschiedlichen Geometrien zurückzuführen sind.

9.2 Driven Cavity

Als erstes Beispiel wird wie oben angeführt die Driven-Cavity untersucht, welches als klassisches Strömungs- und häufiges Benchmark-Problem anerkannt ist. Hierzu wird die bestehende Driven-Cavity Situation von einem quadratischen in ein rechteckiges Gebiet transferiert. Das Resultat dieser Änderung ist eine längere Gerinnesohle, auf welcher der zu untersuchende Betttransport stattfindet. Als zweidimensionales Beispiel wird Driven-Cavity auf eine feste Anzahl von acht Zellen in Z-Richtung begrenzt. Ansonsten wird das Gebiet wie folgt gestaltet:

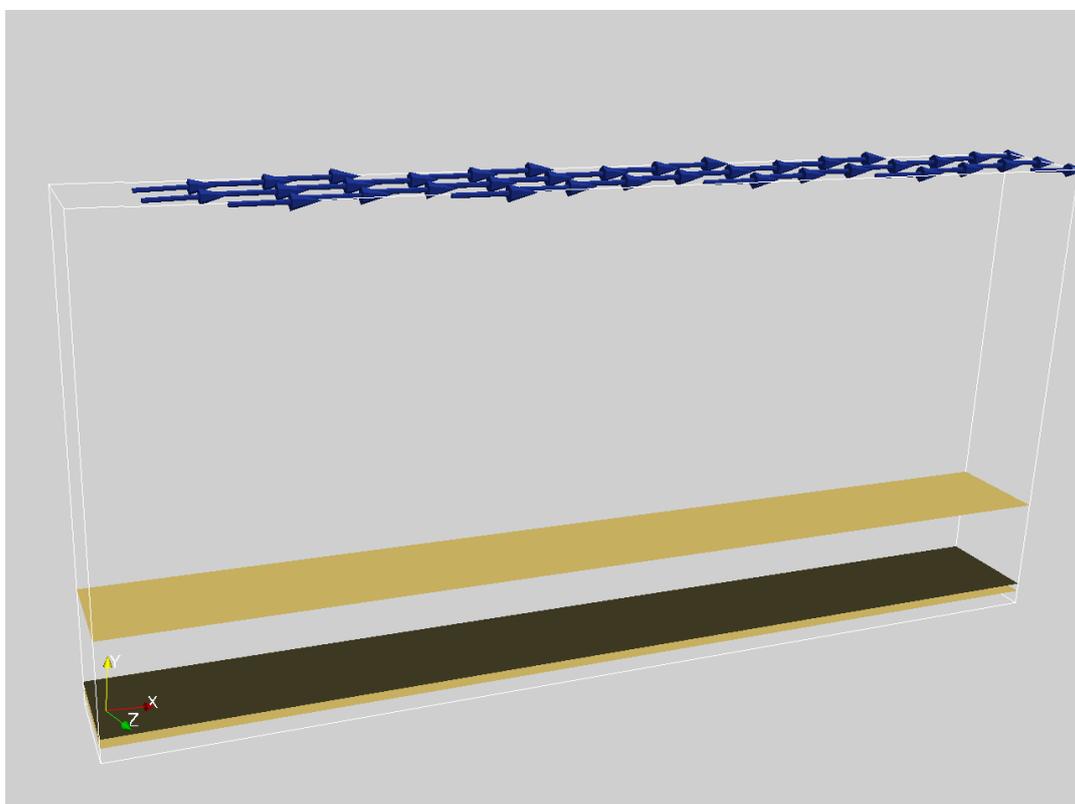


Abb. 9.1: Driven-Cavity Ausgangskonfiguration: $1.0m \times 0.5m$ (X/Y), 25 % Sedimenthöhe und Anfangsgeschwindigkeit am oberen Rand (1.0/0.0/0.0)

Die Tabelle 9.2 zeigt alle Eingangswerte sortiert nach Fluid- und Sedimentparametern. Nach zweifacher Verfeinerung des Gebietes lässt sich zu jedem Zeitpunkt eine Konvergenzanalyse durchführen. Das Beispiel in vorstehender Konfiguration wird jeweils in den Auflösungen $32 \times 16 \times 8$, $64 \times 32 \times 8$ und $128 \times 64 \times 8$ berechnet. In den feinsten und aufwändigsten Berechnungen konnte in der Auflösung ($128 \times 64 \times 8$) nach 72 Stunden auf

Tabelle 9.2: Parameter für Fluidberechnung und Sedimenttransport für Driven-Cavity

NaSt3DGP - Parameter		
itermax	Anzahl maximaler Iterationen	10000
ε	Fehlergenauigkeit für das Druckresiduum	$1e - 10$
α	0.0=central differences, 1.0=upwind	0.5
Δt	Zeitschrittweiten in den Auflösungen:	
	$32 \times 16 \times 8$	0.002
	$64 \times 32 \times 8$	0.0005
	$128 \times 64 \times 8$	0.000125
Re	Reynoldszahl	100
Gx, Gy, Gz	Volumenkräfte	0
	Zeitdiskretisierung	Euler 1st
	Diskretisierung des konvektiven Terms	QUICK
	Drucklöser	BiCGStab
Sedimenttransport - Parameter		
τ_{dy}	Abstand zu Sedimentoberfläche	0,05 m
α	kritischer Winkel für Hangneigung	40°
ρ_s	Sedimentdichte (Quarzsand)	2650,0 kg/m ³
d_{50}	mittlerer Korndurchmesser	0,001 m
τ_c	kritische Schubspannung	0,047 N/m ²
	Diskretisierungsschema der Exner-Gleichung	1. FTFS (Euler 1st/Euler 1st) 2. FTCS (Euler 1st/Central 2nd)
	Geschiebeformel	Meyer-Peter Müller
	Randbedingung für die Sedimentoberfläche	slip

32 Prozessoren mit dem FTFS-Schema eine Simulationsdauer von 11,4s erreicht werden. Demgegenüber steht das FTCS-Schema, welches 13,1s in 72 Stunden erreichte. In beiden Fällen war der limitierende Faktor nicht der Sedimenttransport, sondern der Fluidlöser. Um eine Konvergenzanalyse durchführen zu können, ist auf jedem Gitter eine konstante Zeitschrittweite $\Delta t \leq \frac{Re}{2} \cdot \Delta x^2$ zwingend notwendig. Dementsprechend musste die variabel gesteuerte Zeitschrittweite aufgegeben werden. Teilweise verlängerte sich dadurch die Berechnungsdauer um das vierfache im Vergleich zur CFL-gesteuerten Zeitschrittweite. Zusätzlich mit dem Sicherheitsfaktor 0.5 multipliziert, ergaben sich die endgültigen Zeitschrittweiten $\Delta t = 0.002$ ($32 \times 16 \times 8$), $\Delta t = 0.0005$ ($64 \times 32 \times 8$) und $\Delta t = 0.000125$ ($128 \times 64 \times 8$). Da auf allen Gittern Veränderungen der Sedimentoberfläche zu beobachten waren, wurde genügend Dynamik erzeugt, um den Einfluss der Geometrieänderung zu untersuchen.

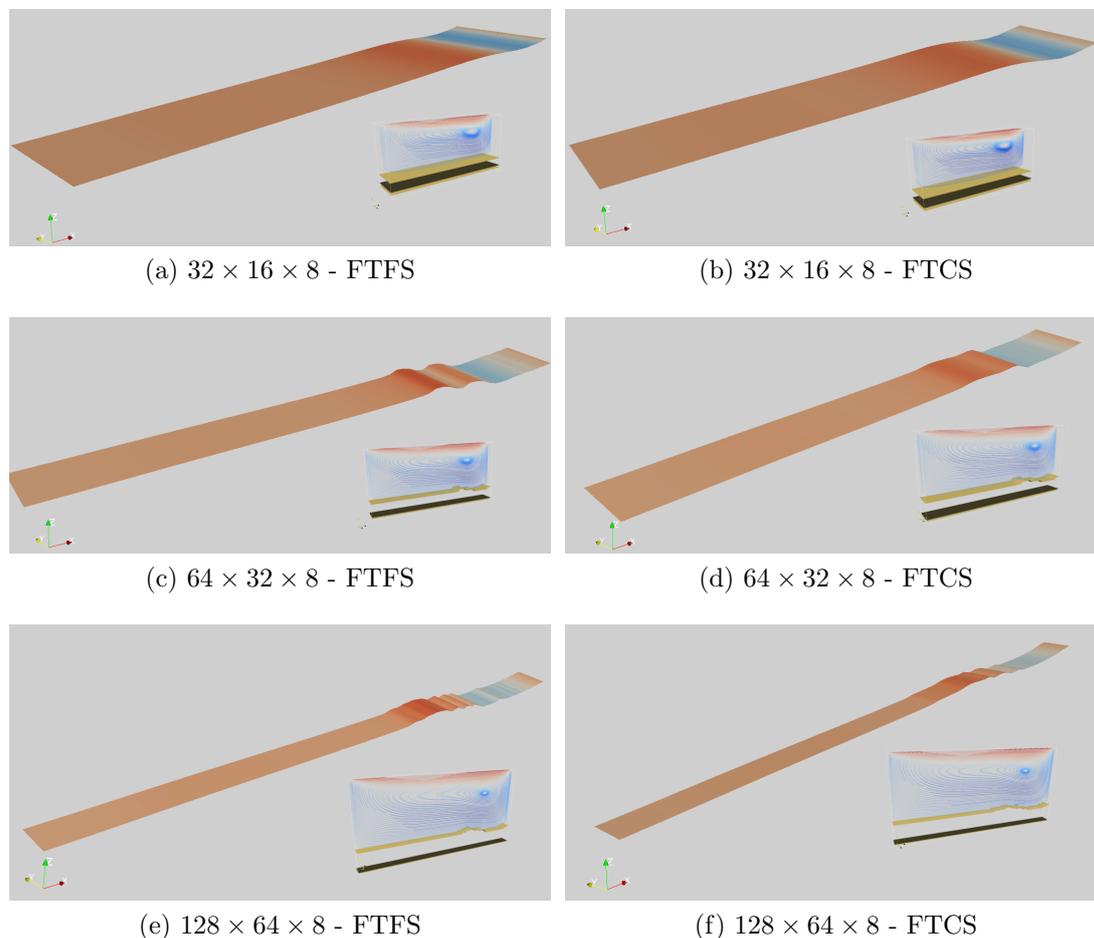


Abb. 9.2: Driven-Cavity nach 10 s in den drei benutzten Auflösungen

Abbildung 9.2 stellt nach 10s die einzelnen Sedimentoberflächen gegenüber. In allen Fällen zeigt sich, dass Erosion eintritt und das erodierte Material transportiert wird. Die Erosion tritt dabei, durch die abwärtige Strömung am rechten Rand auf. Zum anderen bedingt der rückwärtige Wirbel das Auftreten der Erosion in der unteren rechten Ecke des Gebietes. Die dadurch entstehende Ablagerung eines Sedimentkörpers ist ebenfalls in allen Auflösungen zu erkennen. Optisch betrachtet führt FTFS zu leichten Oszillationen im Bereich der Akkumulationen, FTCS hingegen zeigt ein deutlich glatteres Ergebnis. Abbildung 9.5 zeigt in der Auflösung $64 \times 32 \times 8$, dass sich mit der Zeit die Erosionsform am rechten Ende weiter eintieft und das abgetragene Sediment in negativer X -Richtung weiter transportiert wird. Die Aufschüttung der Düne veranlasst eine weitere Erosionsform im Verlauf der Berechnung. Interessanterweise induziert diese Erosionsform, und

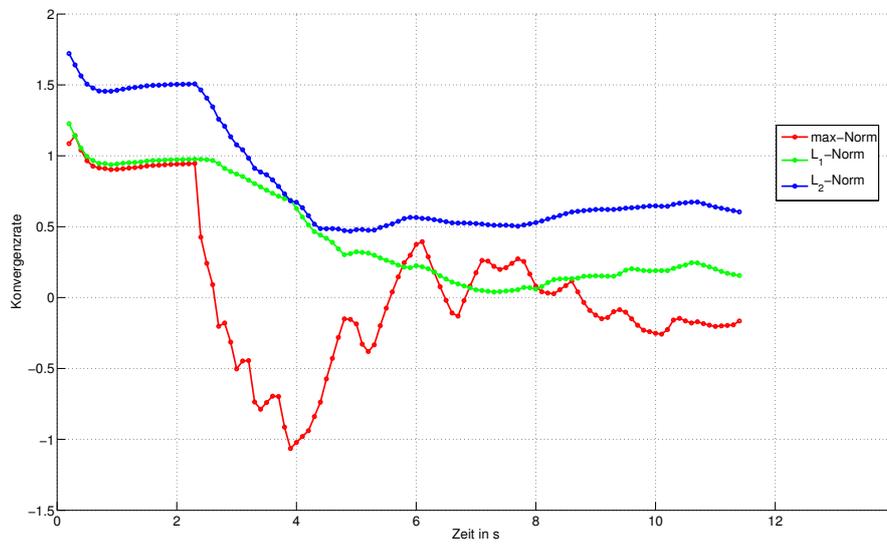
der damit verbundene Transport nach 70s, eine weitere Aufschüttungsform in der linken Hälfte des Gebietes.

Diskussion der Konvergenz

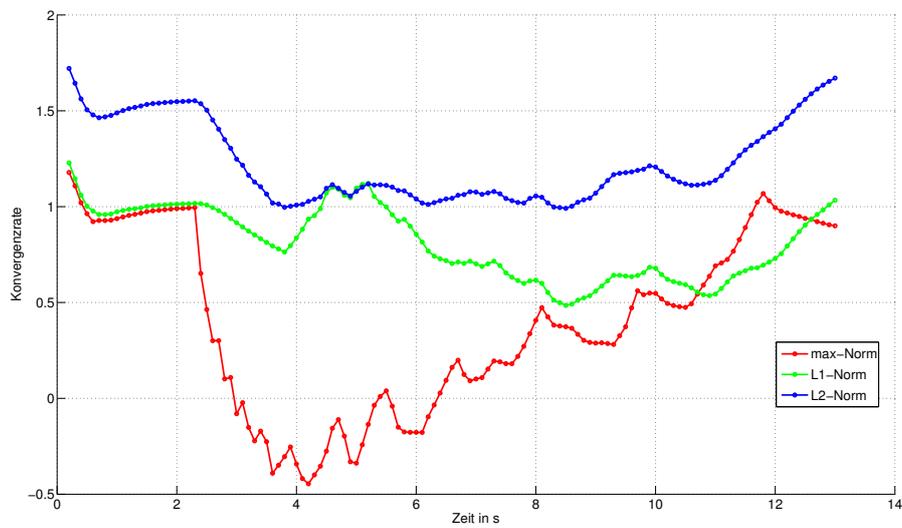
Die Berechnung des zweidimensionalen Beispiels Driven-Cavity wurde mit *slip*-Randbedingungen durchgeführt. Aus den in Kapitel 9.1 diskutierten Gründen sind Konvergenzordnungen von $p = 1.0$ und $p = 1.5$ für den Bereich der unveränderten Flag-Geometrien zu erwarten. Abbildung 9.3 zeigt die gemessenen Konvergenzraten der Sedimenthöhenfunktion und deren zeitliche Entwicklung. Eine erste Erkenntnis der Berechnung ist ein abruptes Einbrechen der Raten zum Zeitpunkt der ersten Geometrieänderung nach ca. 2.2 s.

Einer anschließenden Stabilisierung der Raten folgt ein Anstieg, bis nach ca. 12 s das Ausgangsniveau wieder erreicht und sogar überschritten wird. Das schlechteste Verhalten zeigt die max-Norm, welche am empfindlichsten auf das sich verändernde *Flag*-Feld reagiert. Zu erklären ist diese Entwicklung damit, dass, bedingt durch die unterschiedlichen Auflösungen, Geometrieänderungen nicht auf allen Gittern gleichzeitig einsetzen. Daraus ergibt sich ein lokaler Fehler von einem auf das folgende Gitter, welcher in der max-Norm am deutlichsten durchschlägt. Dementsprechend muss die max-Norm als ungeeignet angesehen werden, wenn es um die Konvergenzbetrachtungen des Sedimenttransportes geht. In der L_1 -Norm und L_2 -Norm verteilen sich diese Fehler besser, so dass Knicke glatter ausfallen. Im Zeitraum der unveränderten Geometrie konvergieren das FTFS- und das FTCS-Verfahren sowohl in der max- als auch in der L_1 -Norm mit Ordnung $p = 1$. Die Konvergenzrate gemessen in der L_2 -Norm beträgt $p = 1.5$ und liegt damit eine halbe Ordnung über der Rate in der L_1 -Norm. Mit einsetzender Sedimentdynamik fallen in beiden Verfahren die Raten.

Aus Abbildung 9.3a ist eine Konvergenzrate der L_1 -Norm der Größenordnung von $p = 0.3$ und für die L_2 -Norm von $p = 0.5$ für das FTFS-Verfahren zu entnehmen. Einen deutlich besseren Verlauf zeigt das FTCS-Schema in Abbildung 9.3b. In diesem Fall sinken die Raten in der L_1 -Norm auf $p = 0.5$ und auf $p = 1.0$ in der L_2 -Norm.

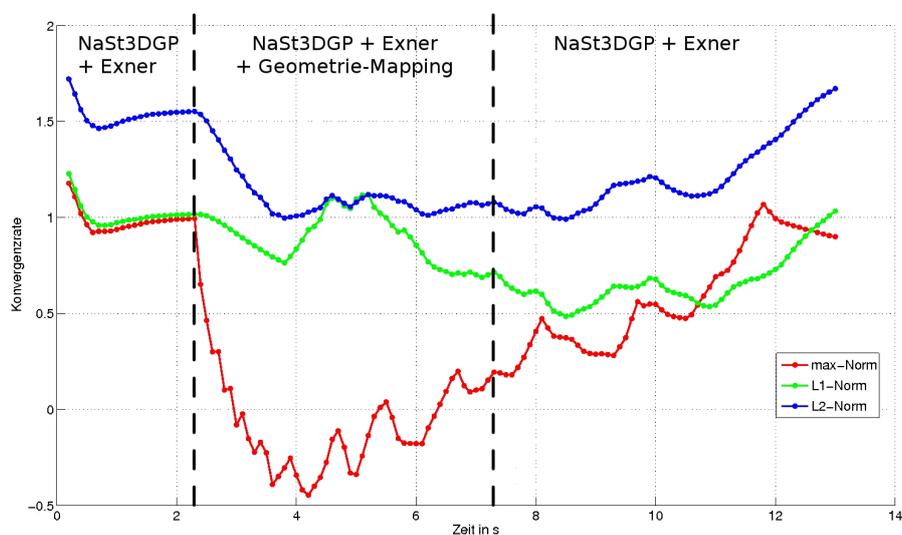


(a) FTFS



(b) FTCS

Abb. 9.3: Entwicklung der Konvergenzraten am Beispiel der Driven-Cavity



(a) Konvergenzraten der Sedimenthöhe

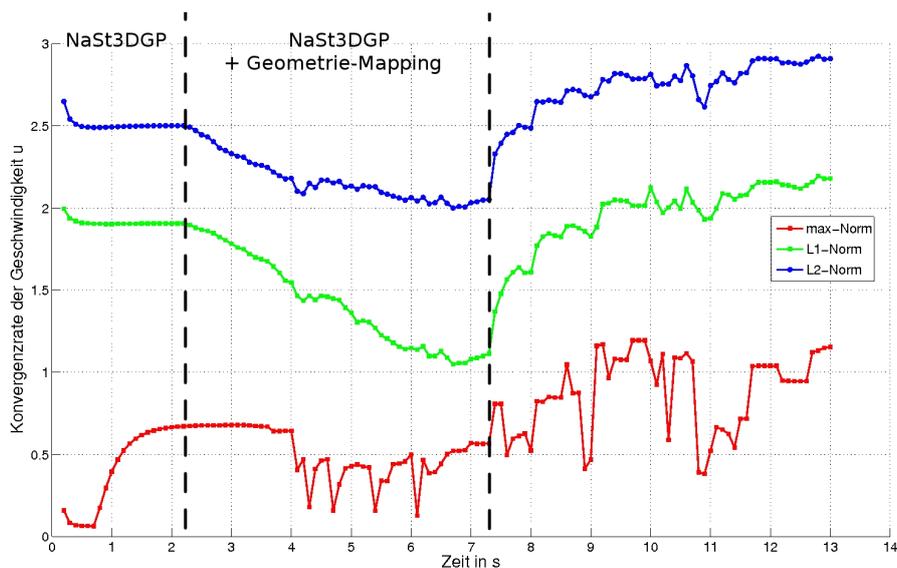
(b) Konvergenzraten der Geschwindigkeiten u

Abb. 9.4: Einfluss und Aufteilung der einzelnen Konvergenzraten im Beispiel FTCS

Eine differenziertere Untersuchung der Konvergenzraten im Bereich der hohen Sedimentdynamik soll am Beispiel FTCS anhand von Abbildung 9.4 erfolgen. Abbildung 9.4 schlüsselt den Einfluss entsprechend der Faktoren auf, die in Kapitel 9.1 diskutiert wurden: NaSt3DGP, Exner-Diskretisierung und Geometriemapping.

Wie bereits dargelegt, eignet sich die max-Norm nicht zur Bestimmung der Konvergenzrate. Aus diesem Grund werden im Folgenden lediglich die L_1 - und L_2 -Norm betrachtet.

Beim Start der Berechnung werden die Geschwindigkeiten benutzt, die NaSt3DGP in der vorgegebenen Geometrie berechnet. Da es sich um die Randgeschwindigkeiten, und damit um eine Donor-Cell-Diskretisierung mit $\alpha = 0.5$, handelt, beträgt die Konvergenzrate der Sedimenthöhenfunktion $p = 1.5$ in der L_2 -Norm und $p = 1$ in der L_1 -Norm. Am Knickpunkt aller Graphen entsteht auf dem feinsten Gitter die erste Geometrieänderung. Daraus resultierend ist ein Abfall der Raten zu beobachten. Anschließend verringert sich die Differenz zwischen L_1 -Norm und L_2 -Norm, bis die ursprüngliche Differenz $p = 0.5$ aufgehoben ist. Hintergrund dieses Verhaltens ist ein dominierender Einfluss der Geometrieapproximation, welcher insbesondere den Verlauf der L_2 -Norm beeinflusst. Ein späteres Ansteigen der Raten ist dadurch zu erklären, dass durch die Anpassung der Geometrie und dem Erreichen eines stationären Strömungszustandes die Oberfläche sich einer optimierten Form angepasst hat. Diese optimierte Form wird durch die kritische Grenzscherbspannung τ_c bestimmt. Wenn sich die Form der Sedimentoberfläche derart entwickelt hat, dass die Geschwindigkeiten nicht stark genug sind, um τ_c zu überschreiten, dominieren erneut die Konvergenzraten des NaSt3DGP.

Besonders deutlich ist dieser wechselnde Trend, wenn zusätzlich die Konvergenz der Geschwindigkeit u betrachtet wird. In Abbildung 9.4b sind beide Knickpunkte deutlich zu erkennen. Wie in Abbildung 9.4a verdeutlicht, werden die Raten zu den gleichen Zeitpunkten durch die Geometrieänderung gestört. Bis zur ersten *Flag*-Feldänderung konvergiert u mit der Ordnung $p = 2$ in der L_1 -Norm und $p = 2.5$ in der L_2 -Norm, gefolgt von einem langsamen Abfall der Raten während der dynamischen Geometrieänderung. Mit nachlassender Intensität der Sedimentdynamik steigen die Raten wieder auf ihr ursprüngliches Niveau. Eine mögliche Erklärung für einen Anstieg auf höhere Raten im Vergleich zu den Werten zu Beginn der Berechnung, könnte die Anpassung der Geometrie sein, welche eventuelle Singularitäten der Randbedingungen in den Ecken der Driven-Cavity glättet und weniger stark ins Gewicht fallen lässt. Ein weiteres Indiz für diesen Erklärungsansatz findet sich in der max-Norm, welche zu Beginn stark durch die Singularitäten in den Ecken beeinflusst ist und nach erfolgter Anpassung des Gebietes über das Ausgangsniveau steigt.

Zusammenfassend zeigt sich, dass mit steigender Ordnung der benutzten Verfahren die Konvergenzraten besser werden. Die Strömungssituation wird durch QUICK ausreichend genau aufgelöst, so dass Verbesserungen in der Diskretisierung der Exner-Gleichung und vor allem im Mapping der Sedimenthöhenfunktion zu suchen sind. Verfahren höherer Ordnung, wie Level-Set oder ähnliche Modellierungsansätze für freie Oberflächen, sollten eine Verbesserung bringen. Dies sollte eine Anhebung der Konvergenzraten im dynamischen Abschnitt zur Folge haben. Verbesserungsmöglichkeiten für die Diskretisierung des Exner-Modells wären ENO- oder WENO-Verfahren. Beide Varianten haben höhere Ordnungen und würden die Einbrüche der Konvergenzraten mit einsetzender Sedimentdynamik abschwächen.

Tabelle 9.3: Massenerhaltung nach 10 s

Auflösung	$32 \times 16 \times 8$	$64 \times 32 \times 8$	$128 \times 64 \times 8$
FTFS Masse in %	100.02976	99.91856	99.97296
Zeitschritte	5000	20000	80000
Massendifferenz pro Zeitschritt	3.72e-09	-2.545e-09	-2.1125e-10
FTCS Masse in %	100	100	100
Zeitschritte	5000	20000	80000
Massendifferenz pro Zeitschritt	0.0	0.0	0.0

Zusätzlich zur Konvergenz ist die Massenerhaltung ein wichtiges Kriterium bei der Bewertung der Qualität der implementierten Verfahren. Bedingt durch die Konfiguration der Driven-Cavity wird kein Sediment über den Rand heraus- oder hereintransportiert. Etwaige Verluste wären damit auf numerische Effekte zurückzuführen. Tabelle 9.3 zeigt deutlich, dass in allen Auflösungen mit dem Schema FTFS die Masse mit zeitlichem Fortschreiten nicht erhalten wird. Allerdings sind die Abweichungen im 0.02 – 0.1% Bereich, angesichts der großen Anzahl an Zeitschritten liegt dies im akzeptablen Rahmen. Werden die Massendifferenzen pro Zeitschritt betrachtet, zeigt sich, dass in jedem Zeitschritt der mittlere Massenverlust in der Größenordnung $1 \cdot 10^{-9}$ liegt und damit im Bereich der, in NaSt3DGP eingestellten, Fehlerschranke $\varepsilon = 10^{-10}$. Ein deutlich besseres Ergebnis ergibt FTCS, in allen Fällen bleibt die Ausgangsmasse erhalten. Dass die Massenerhaltung exakt 100% beträgt, ist unrealistisch und ist auf derart geringe Verluste zurückzuführen, dass diese innerhalb der Rechengenauigkeit liegen.

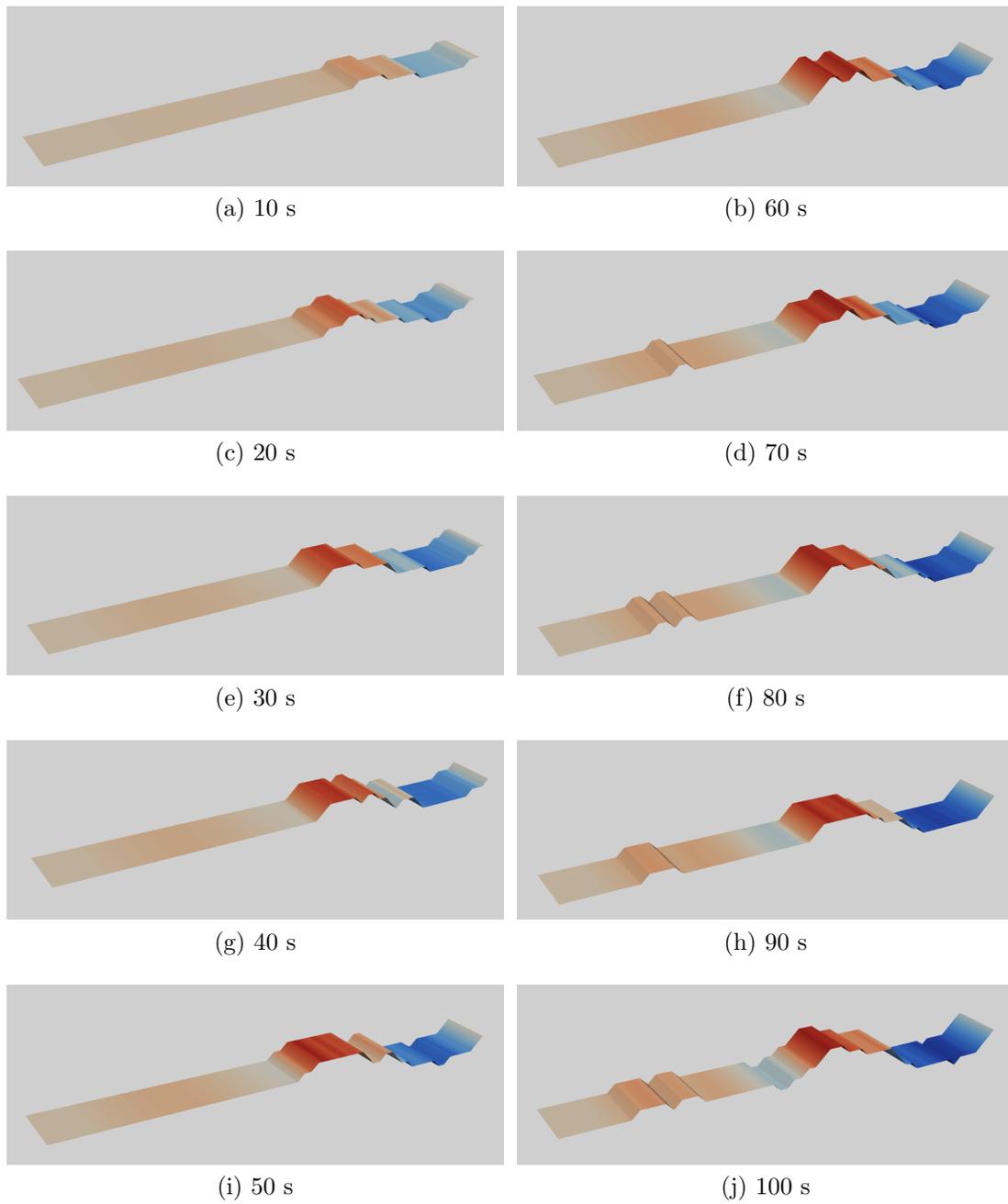


Abb. 9.5: Driven-Cavity nach 100s in der Auflösung $64 \times 32 \times 8$ (FTCS)

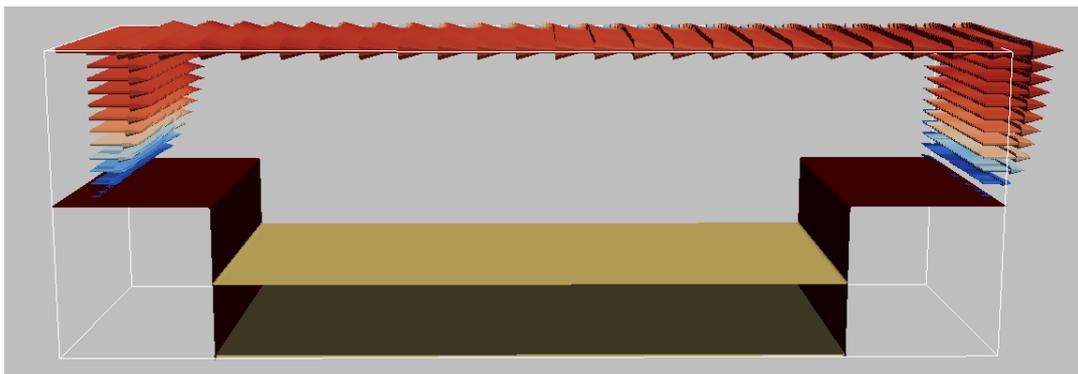
Tabelle 9.4: Fehleranalyse und Entwicklung der Konvergenzrate der Sedimenthöhenfunktion bis 10 sek in 1 sek-Schritten.

FTFS	$\ h_{32} - h_{64}\ _{\infty}$	$\ h_{64} - h_{128}\ _{\infty}$	$\ h_{32} - h_{64}\ _1$	$\ h_{64} - h_{128}\ _1$	$\ h_{32} - h_{64}\ _2$	$\ h_{64} - h_{128}\ _2$	max-Rate	L_1 -Rate	L_2 -Rate
1.0s	0.00028956	0.00015425	0.00005896	0.00003058	0.00001170	0.00000422	0.90856085	0.94735161	1.47027786
2.0s	0.00135862	0.00070702	0.00027149	0.00013824	0.00005599	0.00001974	0.94231793	0.97367495	1.50447222
3.0s	0.00253770	0.00345972	0.00050724	0.00028066	0.00010517	0.00005106	-0.44713562	0.85385711	1.04245399
4.0s	0.00372267	0.00734131	0.00074426	0.00050214	0.00015463	0.00009963	-0.97970004	0.56772431	0.63416093
5.0s	0.00687981	0.00864215	0.00099855	0.00080077	0.00022104	0.00015846	-0.32902135	0.31843465	0.48022434
6.0s	0.01218926	0.00927326	0.00128359	0.00110456	0.00030908	0.00020983	0.39446203	0.21671649	0.55873730
7.0s	0.01557693	0.01298716	0.00159859	0.00154397	0.00040413	0.00028213	0.26232489	0.05015982	0.51845289
8.0s	0.01669101	0.01622888	0.00193167	0.00182976	0.00048634	0.00033444	0.04050747	0.07819832	0.54022082
9.0s	0.01669877	0.01851898	0.00247022	0.00222277	0.00060577	0.00039355	-0.14926252	0.15228122	0.622222663
10.0s	0.01745837	0.02087563	0.00279527	0.00244983	0.00068919	0.00044111	-0.25790076	0.19030564	0.64374349
FTCS	$\ h_{32} - h_{64}\ _{\infty}$	$\ h_{64} - h_{128}\ _{\infty}$	$\ h_{32} - h_{64}\ _1$	$\ h_{64} - h_{128}\ _1$	$\ h_{32} - h_{64}\ _2$	$\ h_{64} - h_{128}\ _2$	max-Rate	L_1 -Rate	L_2 -Rate
1.0s	0.00029600	0.00015362	0.00005956	0.00003020	0.00001185	0.00000419	0.94621679	0.97990747	1.50121858
2.0s	0.00137703	0.00069287	0.00027325	0.00013530	0.00005652	0.00001932	0.99090366	1.01398371	1.54902919
3.0s	0.00256789	0.00260849	0.00051021	0.00027452	0.00010610	0.00004568	-0.02263256	0.89419049	1.21577721
4.0s	0.00376468	0.00503230	0.00074845	0.00040610	0.00015596	0.00007734	-0.41869003	0.88207950	1.01197058
5.0s	0.00584263	0.00691143	0.00101008	0.00046590	0.00021117	0.00009841	-0.24236568	1.11638445	1.10152922
6.0s	0.00865671	0.00979169	0.00133081	0.00075650	0.00028340	0.00013986	-0.17773970	0.81489536	1.01882869
7.0s	0.01030824	0.00956594	0.00166975	0.00103644	0.00035290	0.00016879	0.10781877	0.68799274	1.06401421
8.0s	0.01282785	0.00924161	0.00184392	0.00121667	0.00040205	0.00019433	0.47306267	0.59983346	1.04887740
9.0s	0.01237045	0.01011704	0.00192588	0.00128356	0.00042401	0.00019720	0.29011038	0.58537019	1.10442843
10.0s	0.01536766	0.01072732	0.00213867	0.00136667	0.00048689	0.00021439	0.51860789	0.64605348	1.18334540

9.3 Doppelte Stufe



(a) Startkonfiguration: *slip* - Bedingungen, Anfangsgeschwindigkeit am linken sowie rechten Rand (1.0/0.0/0.0)



(b) Startkonfiguration: *noslip*-Bedingungen (Parabolische Einströmprofile von $u = 0.0$ auf $u = 1.0$ und „Ziehendes“ Band an oberer Fläche)

Abb. 9.6: Doppelte Stufe Ausgangskonfiguration: $3.0m \times 1m \times 1m$ (X/Y/Z) und 25 cm Sedimenthöhe

Driven-Cavity als zweidimensionales, abgeschlossenes System ohne Ein- oder Ausströmrandbedingungen ist als grundlegendes Beispiel anerkannt. Jedoch ist durch die Einschränkungen (Rutschbedingungen und „ziehendes,, Band am oberen Rand) die Komplexität sehr gering. Um den implementierten Sedimenttransportlöser intensiver zu testen, wird eine Geometrie mit Hindernissen erstellt, welche als Erweiterung zur Driven-Cavity Ein- und Ausströmrandbedingungen am linken und rechten Rand vorgegeben hat. Im einzelnen ist die Konfiguration in Abbildung 9.6 dargestellt und zeigt zwei Stufen am linken und rechten Ende des Gebietes. Über beiden Stufen werden einheitliche Geschwindigkeiten gesetzt, so dass auf Grund der gleich großen Randflächen, die am linken Rand

eingeströmte Masse am rechten Rand wieder ausströmen kann. Dies gewährleistet, dass keine, aus NaSt3DGP resultierenden, Massenverluste das Ergebnis beeinflussen können. Seitliche Flächen werden, wie die obere Fläche, mit *slip*-Bedingungen belegt.

Als zweite Erweiterung wird die beschriebene Konfiguration in einem zweiten Experiment mit Haftbedingungen belegt. Über den Stufen werden parabolische Ein- und Ausströmprofile gesetzt und zusätzlich der obere Rand mit einem, ähnlich zur Driven-Cavity, „ziehendem Band“ belegt.

Alle weiteren Parameter sind in Anlehnung an die Driven-Cavity gewählt worden und in der Tabelle 9.5 zusammengestellt. Eine Änderung besteht in der Reynoldszahl, welche mit $Re = 500$ gewählt wird, um einen Wirbel hinter der linken Stufe entstehen zu lassen. Hieraus soll rückwärtiger Transport hinter der Stufe und im weiteren Verlauf am Separationspunkt Vorwärtstransport erzeugt werden. Dass in diesem Beispiel eine kleinere Korngröße ($d_{50} = 0,0001\text{ m}$) gewählt wurde, dient der Generierung einer stärkeren Sedimentdynamik. Ein kleineres Sediment verringert die Berechnungsdauer bis zur Veränderung der Geometrie. Folglich wird die Bestimmung der Konvergenzrate nach kürzeren Berechnungszeiträumen möglich im Vergleich zum Beispiel der Driven-Cavity. Aus der Verkleinerung der Korngröße resultiert eine Verstärkung des Geschiebetransports um etwa den Faktor $n = 100$. Bis zur Veränderung des *Flag*-Feldes wäre, wie bereits zuvor diskutiert, der Einfluss des NaSt3DGP Strömungslösers vorherrschend.

Abbildung 9.7 zeigt sowohl die entstandene Strömungs- als auch die Sedimentsituation nach 10s, sowohl mit *slip* als auch *noslip*-Randbedingungen. Deutlich sind die grundsätzlichen Gemeinsamkeiten beider Varianten zu erkennen. Zum einen entsteht in beiden Fällen sowohl rückwärtiger als auch vorwärtsgerichteter Transport. Unmittelbar hinter der Stufe entsteht durch den Wirbel eine Vertiefung. Im wasserbaulichen Sinne wird beim Überströmen einer Stufe beziehungsweise eines Wehrs, von einem Tosbecken gesprochen. Die Transportrichtung in diesem, sich langsam bildenden, Tosbecken ist in negativer *X*-Richtung. Auf diese Weise sammelt sich direkt hinter der linken Stufe das abgetragene Sediment aus dem Tosbecken. Hinter dem Wirbel kommt es zur Separation der Strömung und der Umkehr der Richtung des Sedimenttransports in positive *X*-Richtung. Durch diesen Transportprozess akkumuliert sich das abgetragene Sediment vor der rechten Stufe und bildet eine Sedimentationsform.

Tabelle 9.5: Parameter für Fluidberechnung und Sedimenttransport für das Beispiel der Doppelte Stufe

NaSt3DGP - Parameter		
itermax	Anzahl maximaler Iterationen	10000
ε	Fehlergenauigkeit für das Druckresiduum	$1e - 8$
α	0.0=central differences, 1.0=upwind	0.5
Δt	Zeitschrittweiten in den Auflösungen:	
	$75 \times 25 \times 25$	0.008
	$150 \times 50 \times 50$	0.002
	$300 \times 100 \times 100$	0.0005
	$72 \times 24 \times 24$	0.008
	$144 \times 48 \times 48$	0.002
	$288 \times 96 \times 96$	0.0005
Re	Reynoldszahl	500
cfl	Sicherheitsfaktor für CFL-Bedingung	0.5
Gx, Gy, Gz	Volumenkräfte	0
	Zeitdiskretisierung	Euler 1st
	Diskretisierung des konvektiven Terms	QUICK
	Drucklöser	BiCGStab
Sedimenttransport - Parameter		
τ_{dy}	Abstand zu Sedimentoberfläche	0,05 m
α	kritischer Winkel für Hangneigung	40°
ρ_s	Sedimentdichte (Quarzsand)	2650,0 kg/m ³
d_{50}	mittlerer Korndurchmesser	0,0001 m
τ_c	kritische Schubspannung	0,025 N/m ²
	Diskretisierungsschema der Exner-Gleichung	1. FTFS (Euler 1st/Euler 1st) 2. FTCS (Euler 1st/Central 2nd)
	Geschiebeformel	Meyer-Peter Müller
	Randbedingung für die Sedimentoberfläche	<i>noslip</i> und <i>slip</i>

Deutlich zu erkennen sind die unterschiedlichen Auswirkungen der beiden Randbedingungen. Im *slip*-Fall traten über die gesamte Z -Richtung keine Veränderungen auf. Somit führen Rutschbedingungen auf Grund des symmetrischen Aufbaus der Geometrie zu einem ähnlichen Verhalten wie im Driven-Cavity Beispiel. Anders verhält es sich, wenn *noslip*-Randbedingungen gesetzt werden. An den Seitenrändern herrschen geringere Geschwindigkeiten, welche zu geringerem Transport und damit zu geringeren Veränderungen der Sedimentoberfläche führen. Mit zunehmendem Abstand zu den Seiten, steigt die Fließgeschwindigkeit wieder an und stärkerer Transport setzt ein. Diese un-

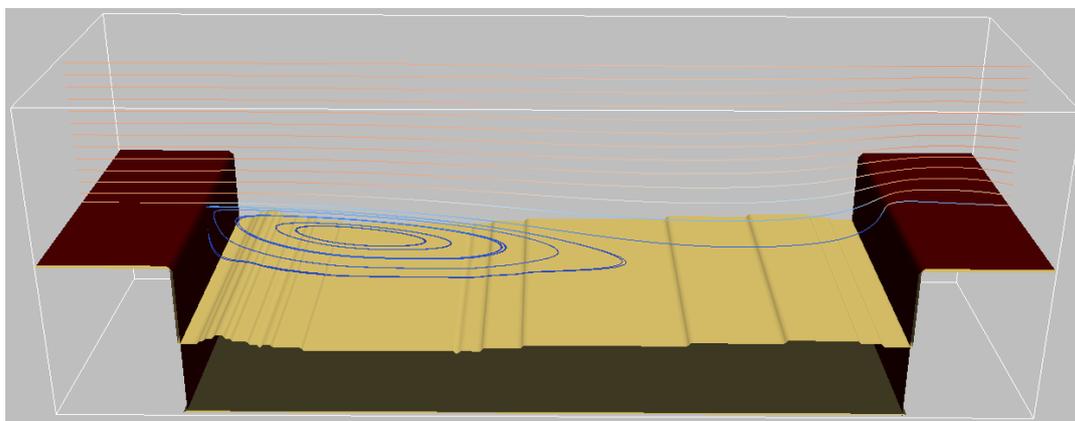
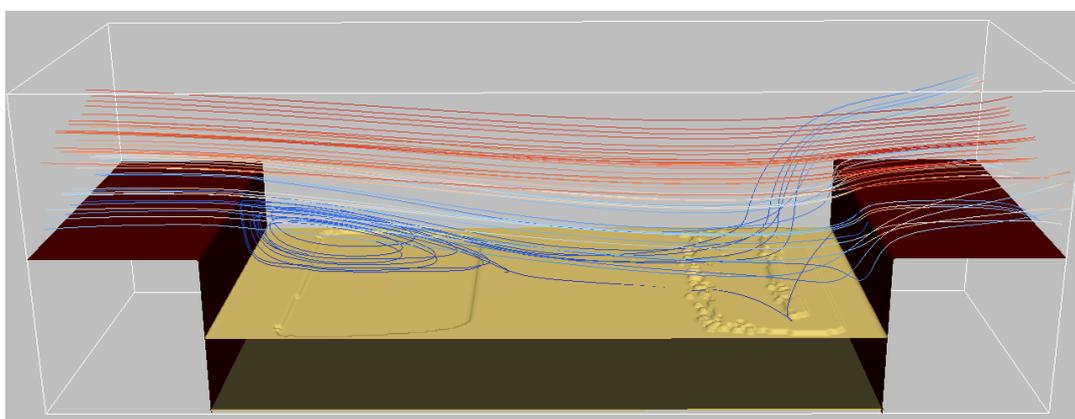
(a) *slip*-Ränder in der Auflösung $300 \times 100 \times 100$ (b) *noslip*-Ränder in der Auflösung $288 \times 96 \times 96$

Abb. 9.7: Strömungs- und Sedimentsituation nach 10s

terschiedlichen Transportraten lassen die Vertiefung hinter der linken Stufe in der Mitte tiefer werden als an den Rändern. Aus denselben Gründen wird die Sedimentationsform vor der Ausströmstufe zur Mitte hin höher. Die zeitliche Entwicklung bis zu diesem Stadium, ist in Abbildung 9.8 zusammengefasst. In beiden Fällen wird deutlich, dass der dynamische Sedimenttransport zu Beginn der Simulation stattfindet. Nach bereits 5s sind nur noch geringe Veränderungen der Sedimentoberfläche zu erkennen. Ursächlich ist eine Strömung, die zu Beginn starken Sedimenttransport verursacht, bis die Sedimentoberfläche durch die Strömung angepasst wurde. Anschließend stellt sich ein stationärer Zustand ein, wodurch die Schubspannungen geringer werden. Des Weiteren lässt sich diese Eigenschaft in Abbildung 9.9 nachvollziehen. Dargestellt ist die Schubspannung τ , wobei $\tau = 0$ bedeutet, dass die kritische Grenzschubspannung τ_c nicht überschrit-

ten wurde. Bereits nach 5s sind die Geschwindigkeiten so gering, dass kein Transport im Beispiel mit Haftbedingungen vorliegt. Ebenfalls gesunken ist die Schubspannung im *slip*-Beispiel, jedoch herrscht in einzelnen Abschnitten noch Transport.

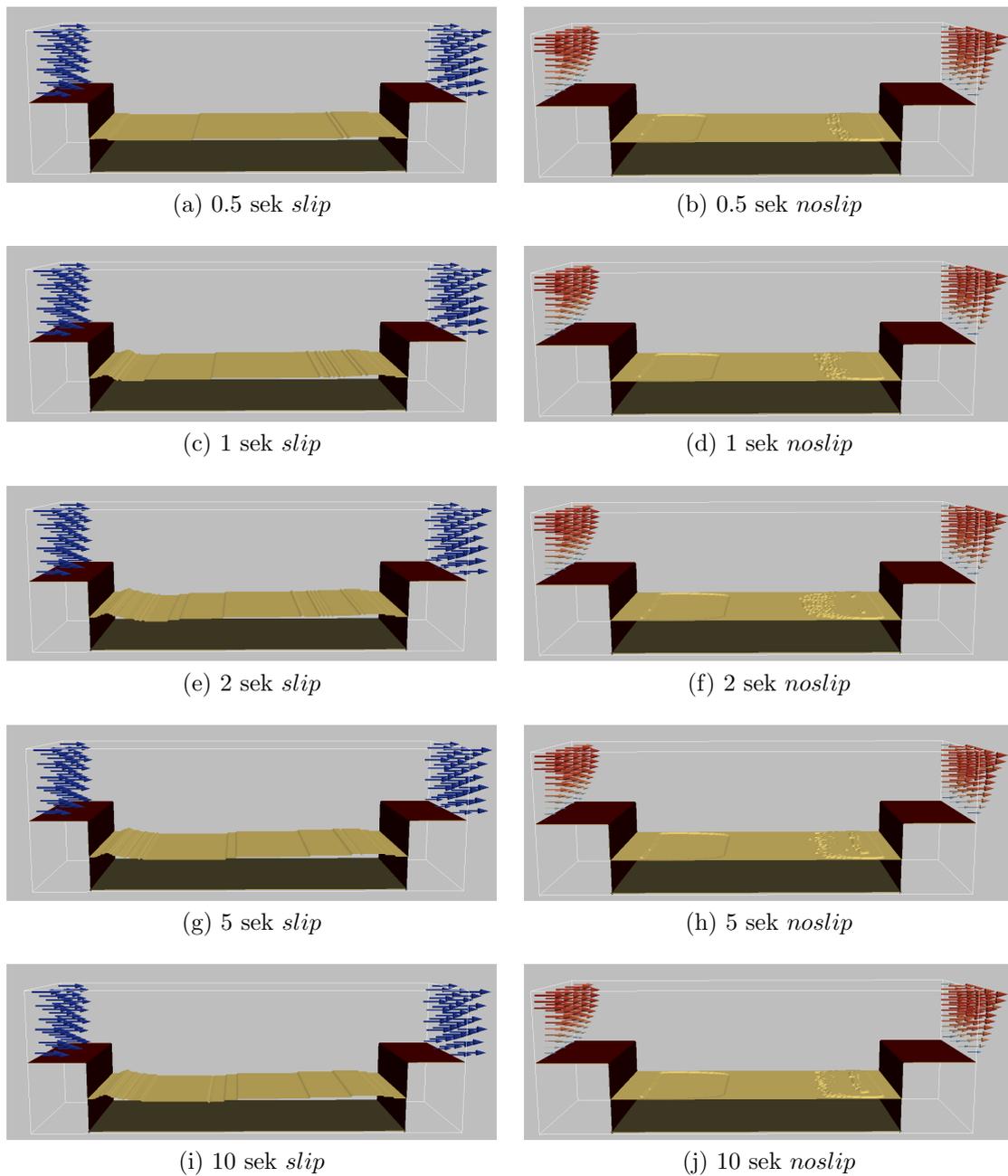
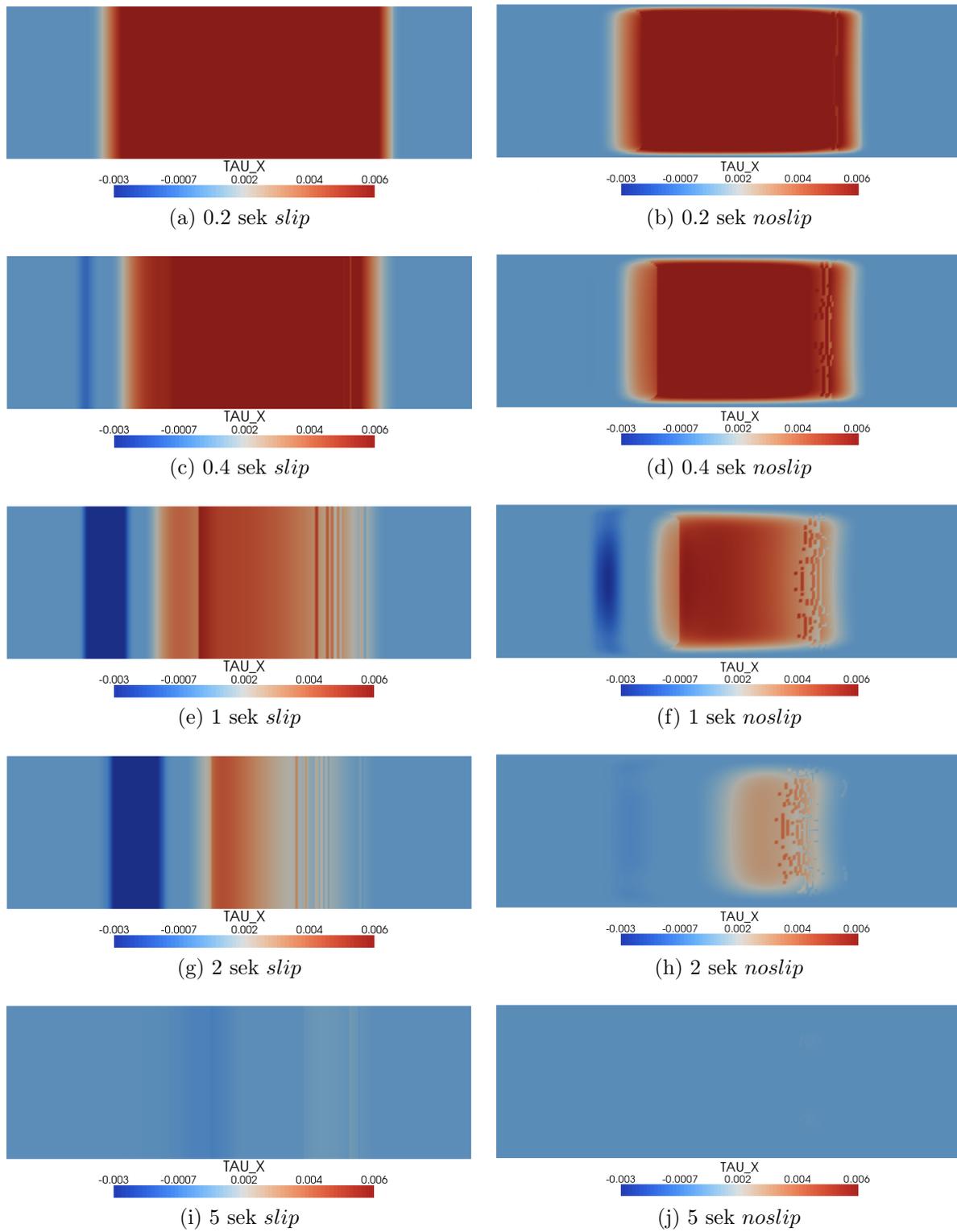


Abb. 9.8: Die Entwicklung der Sedimentoberfläche der doppelten Stufe unter Haftbedingungen

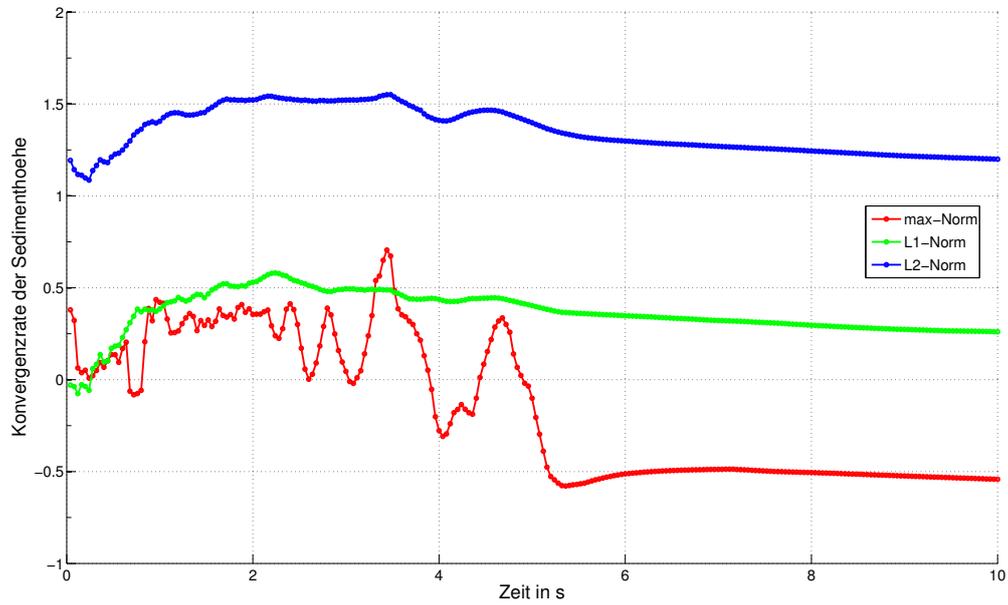
Abb. 9.9: Die Entwicklung der Schubspannung ($288 \times 96 \times 96$)

Konvergenzanalyse

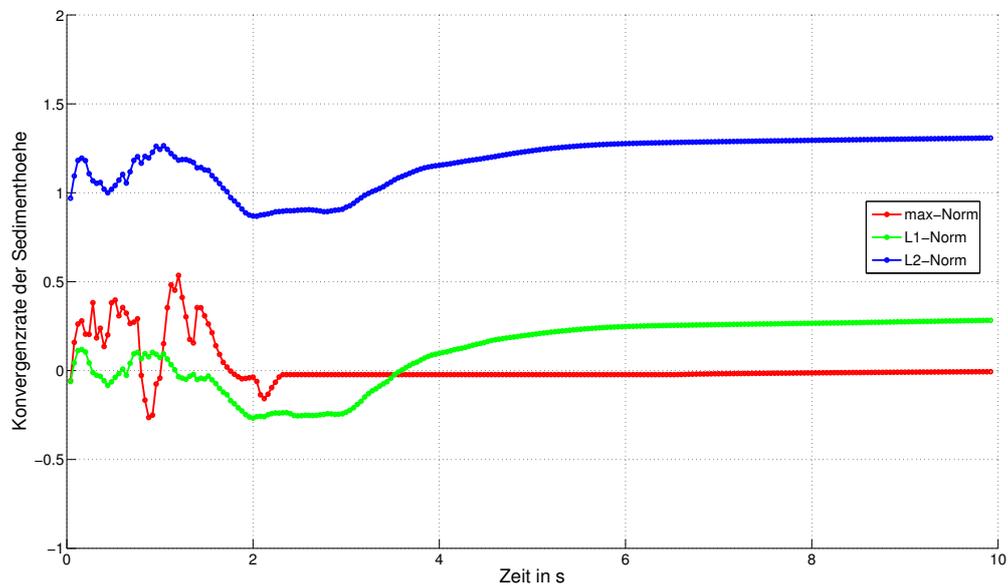
Die doppelte Stufe wurde mit beiden möglichen Randbedingungen berechnet. Die, in Kapitel 9.1, diskutierten Kombinationen aus Randbedingungen und Diskretisierungsschemata (Tabelle 9.1) können somit in diesem Beispiel getestet werden. Grundsätzlich zeigen sowohl die Raten in Abbildung 9.10 als auch in Abbildung 9.11 ein ähnliches Verhalten. Alle Raten brechen mit der ersten Veränderung der Geometrie ein und steigen im weiteren Verlauf auf ein konstantes Niveau an. Die Berechnungen mit Rutschbedingungen zeigen, während der dynamischen Phase des Sedimenttransports weniger Schwankungen. Dieses schlechtere Verhalten mit stärkeren Einbrüchen in den Berechnungen mit Haftbedingungen ist wiederum durch die Veränderungen der Geometrie zu erklären. Im zweidimensionalen Beispiel der Driven-Cavity konnten sich Veränderungen lediglich in der X -Richtung ergeben. Eine ähnliche Konfiguration ist durch die doppelte Stufe mit Rutschbedingungen gegeben, so dass die Fehler ebenfalls auf eine Richtung beschränkt sind. Die dreidimensionale doppelte Stufe mit Haftbedingungen kann auf den unterschiedlichen Gitterauflösungen sowohl in die X -Richtung als auch in die Z -Richtung Fehler generieren. Dementsprechend fallen Fehler aus der Geometrieapproximation stärker ins Gewicht und lassen die Raten stärker abfallen. Dieser Umstand erklärt die schlechten Raten zu Beginn der Berechnung. In diesen Fällen waren die Geometrieveränderungen derart stark, dass die Fehler sogar größer wurden und keine Konvergenz mehr zu beobachten ist. Dass sich trotzdem eine stationäre Situation einstellt, ist durch die abklingende Dynamik im Transport zu begründen und zeigt wiederum die Anpassung der Geometrie an die vorhandene Strömungssituation.

Tabelle 9.6: Vergleich zwischen prognostizierter Konvergenzrate p_{kombi} und gemessener Werte in der L_2 -Norm

	FTFS (1. Ordnung)	FTCS (2. Ordnung)
<i>slip</i>	1.2	1.3
Prognose	1.0	1.5
<i>noslip</i>	1.2	2.1
Prognose	1.0	2.0

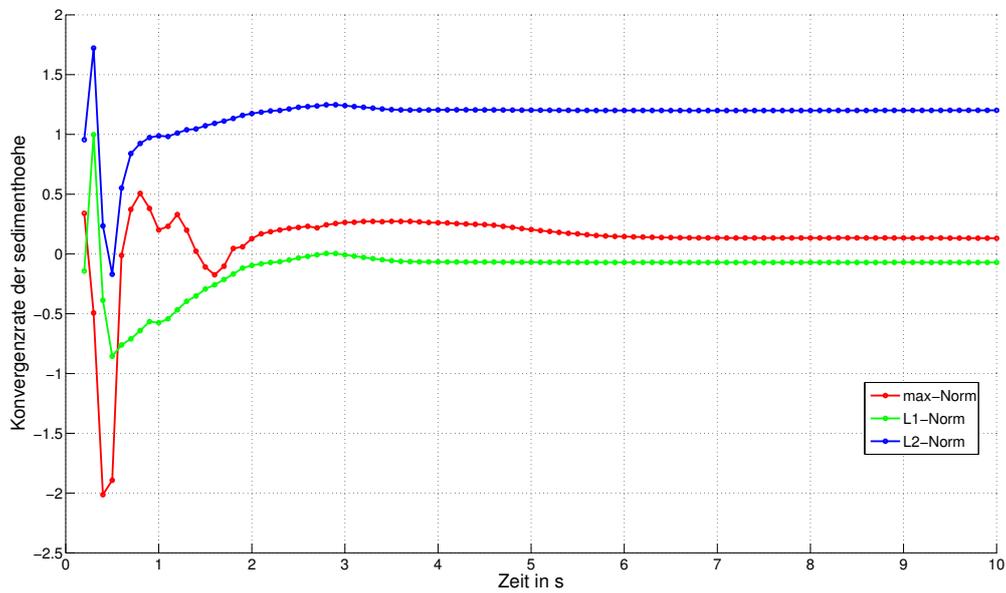


(a) FTFS mit Rutschbedingungen

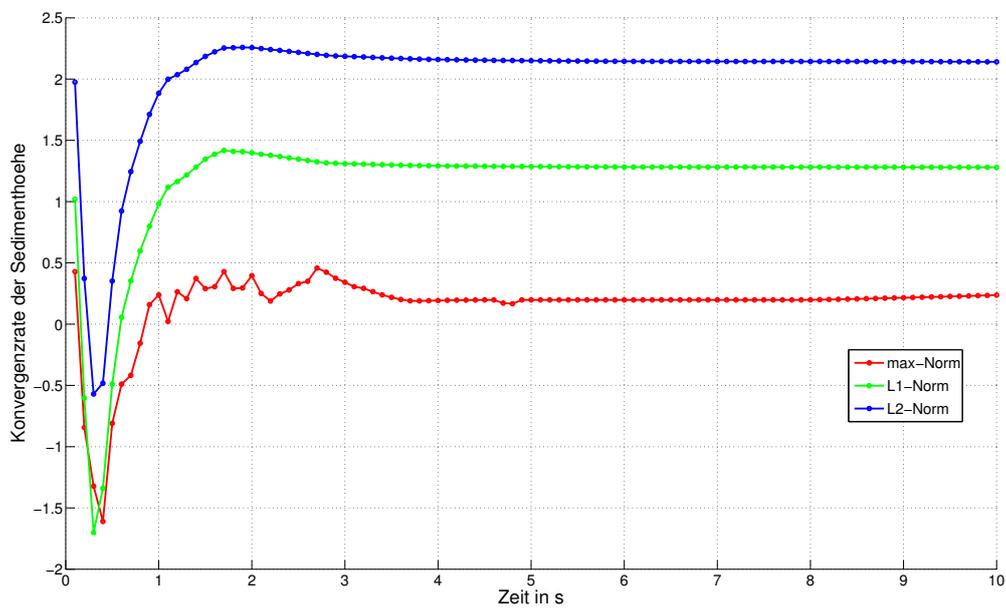


(b) FTCS mit Rutschbedingungen

Abb. 9.10: Entwicklung der Konvergenzraten am Beispiel der doppelten Stufe



(a) FTFS mit Haftbedingungen



(b) FTCS mit Haftbedingungen

Abb. 9.11: Entwicklung der Konvergenzraten am Beispiel der doppelten Stufe

Die unterschiedlichen Normen zeigen ein, zur Driven-Cavity, vergleichbares Verhalten. Es zeigt sich, dass die Raten, gemessen in der max-Norm, wiederum am stärksten auf die Veränderungen reagieren. Dementsprechend werden ausschließlich die L_1 -Norm und L_2 -Norm betrachtet. Durchgängig liegt die Rate gemessen in der L_2 -Norm über der L_1 -Norm. Die Differenzen der Werte liegen in der Spanne von 0.8 bis 1.3. Eine Annäherung im Bereich des dynamischen Transports ist, im Gegensatz zur Driven-Cavity, nicht zu beobachten. Die prognostizierten Größenordnungen aus Kapitel 9.1 werden lediglich von der L_2 -Norm wiedergegeben und sind in Tabelle 9.6 der Prognose gegenüber gestellt.

Im prinzipiellen Verlauf sind die Versuche der Doppelten Stufe mit der Driven-Cavity vergleichbar. In beiden Fällen kommt es zu einem Zusammenbruch der Konvergenz, wenn der Sedimenttransport dominierend ist. Jedoch stabilisieren sich alle Werte mit zeitlichem Fortschreiten. Dass die Stabilisierung der Raten nach 5s fast abgeschlossen ist, wurde bereits in Abbildung 9.9 am Verlauf der Schubspannung beobachtet und stimmt mit dem Verlauf der Graphen überein. Im Versuch mit *noslip*-Rändern sind stabile Konvergenzraten bereits nach 5s erreicht, wohingegen die Werte des Beispiels mit *slip*-Rändern erst nach 6s unverändert bleiben. Auch dieses Phänomen ist aus Abbildung 9.9 bekannt und begründet die Theorie, dass, nach erfolgter Anpassung der Sedimentoberfläche an den Strömungszustand, die kritische Grenzschubspannung τ_c nicht mehr überschritten wird und ein stabiler Zustand sich einstellt.

Dass die Unterschiede in den jeweiligen Auflösungen zum Teil enorm sein können, zeigen die Abbildungen 9.12 und 9.13 nach 10s. Dargestellt sind die unterschiedlichen Sedimentoberflächen in den drei jeweils verwendeten Auflösungen. Auf den größten Gittern treten die Sedimentationsformen deutlicher zu Tage als in den feineren Auflösungen. Im Gegensatz hierzu sind die Erosionsformen erst in den feineren Auflösungen zu erkennen.

Desweiteren zeigt der Vergleich der benutzten Diskretisierungsverfahren in den Abbildungen 9.12 und 9.13 abermals stärkere Oszillationen auf Seiten des FTFS-Schemas, sowohl im *slip* als auch im *noslip*-Beispiel. Ein glatteres Ergebnis liefert in beiden Fällen die FTCS-Diskretisierung.

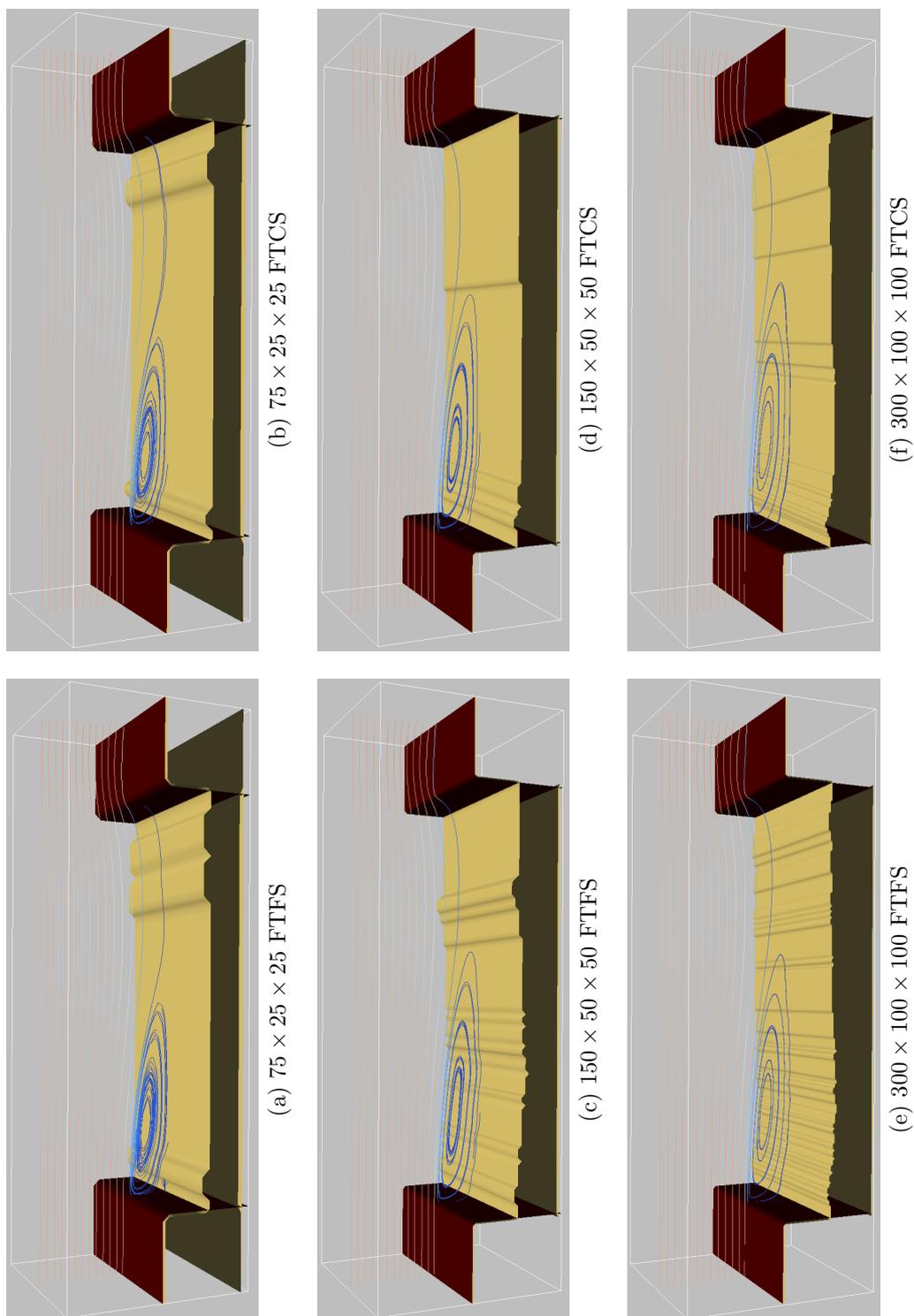


Abb. 9.12: Direkter Vergleich der Diskretisierungsarten FTFS und FTCS am Beispiel der Doppelten Stufe mit *slip* Randbedingungen nach 10s

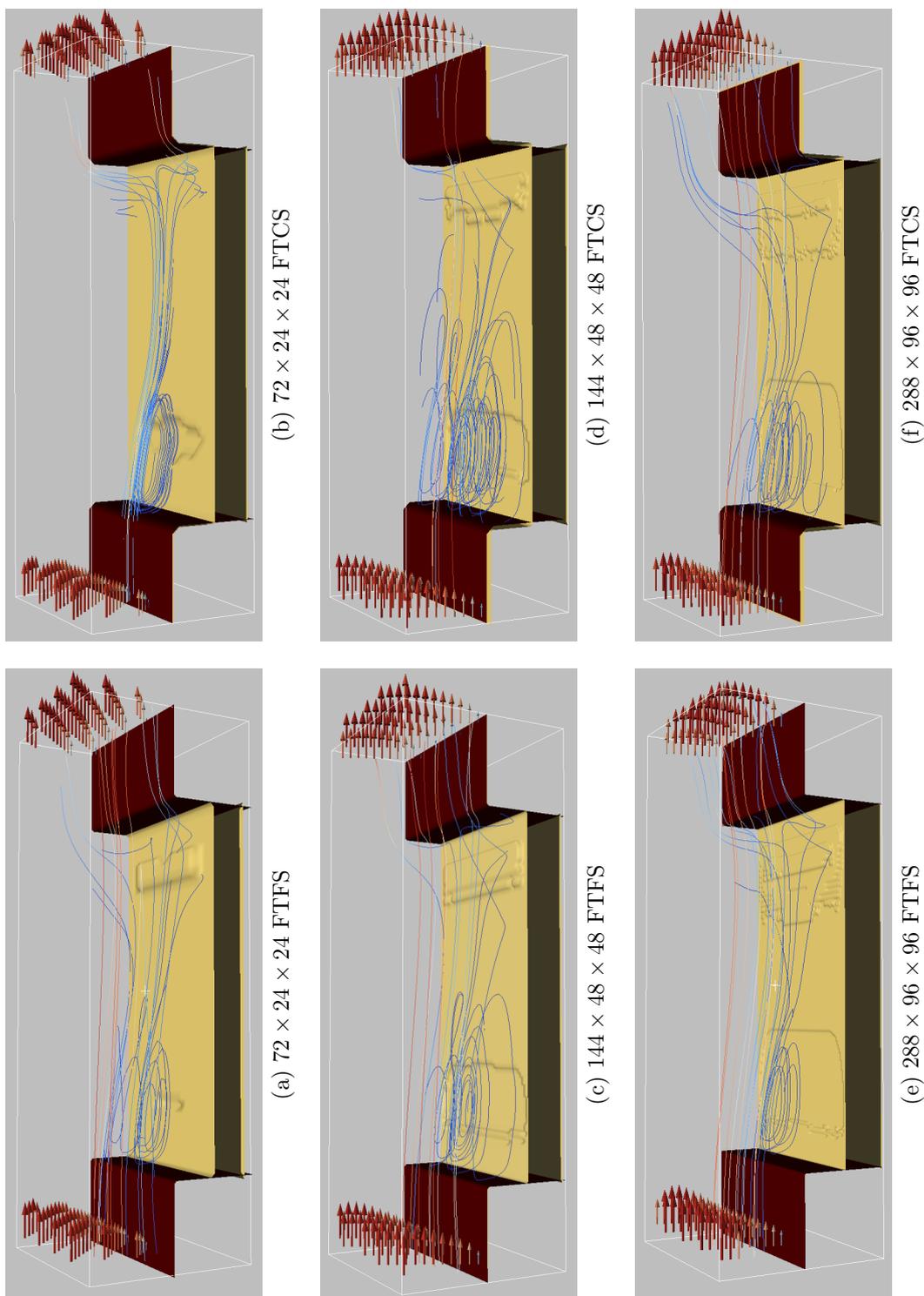
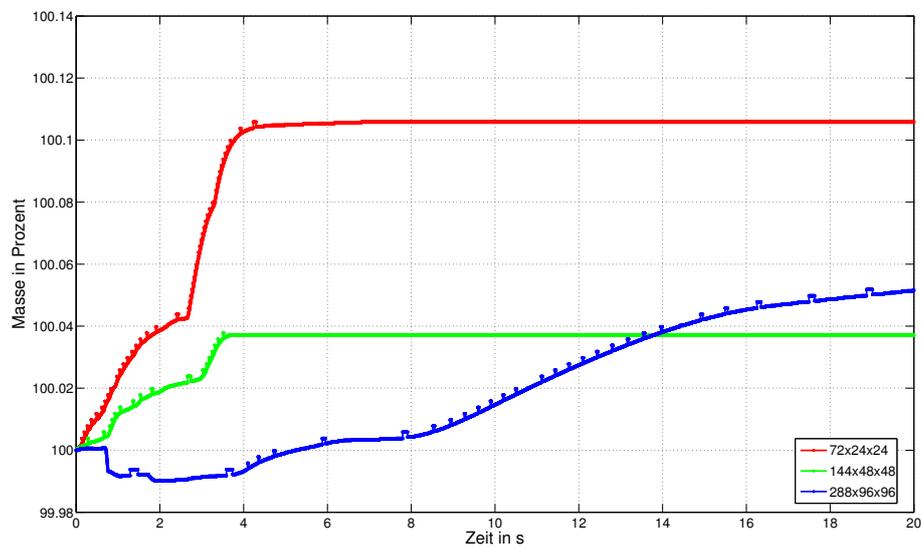
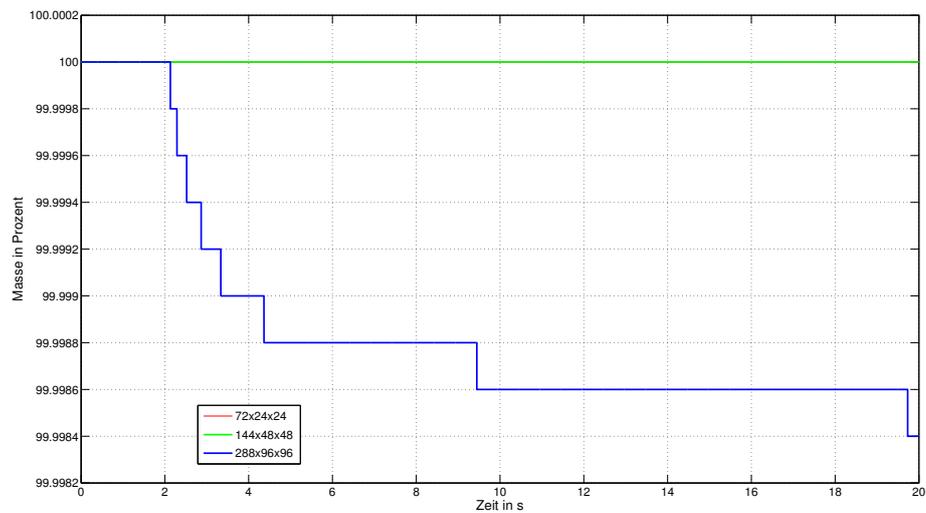


Abb. 9.13: Direkter Vergleich der Diskretisierungsarten FTFS und FTCS am Beispiel der Doppelten Stufe mit *noslip* Randbedingungen nach 20s



(a) FTFS



(b) FTCS

Abb. 9.14: Zeitliche Entwicklung der Sedimentmasse (Haftbedingungen).

Massenunterschiede zeigen sich in beiden Diskretisierungsarten, jedoch liegen sie erneut in Bereichen, welche durch Rechengenauigkeit und Rundungsfehler in der Datenanalyse beeinflusst werden. Demzufolge wird die Massenerhaltung aus Driven-Cavity bestätigt.

9.4 Rückwärtige Stufe mit Ausflussrand

Die nächste Veränderung der Grundkonfiguration besteht darin, dass eine rückwärtige Stufe am Einströmrand (links) erstellt wird, während am gegenüberliegenden rechten Rand Ausflussrandbedingungen *inout* gesetzt werden. Der Effekt dieser Veränderungen soll sein, dass durch herausgetragenes oder abgelagertes Sediment sich der Ausflussrand vergrößern oder verkleinern kann. Wie im *noslip*-Fall der Doppelten Stufe werden auch in diesem Fall die Kanalwände durch Haftbedingungen an den Seitenflächen simuliert. Auf diese Weise wird die Umgebung eines Stauwehrs nachgestellt.

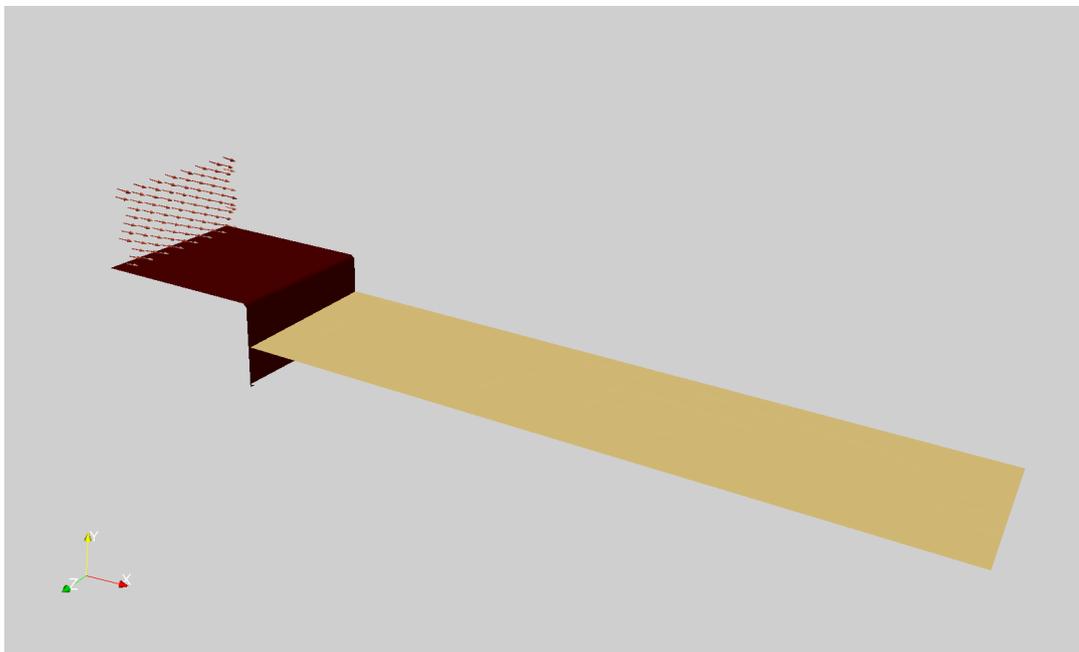


Abb. 9.15: Rückwärtige Stufe: Ausgangskonfiguration: $5.0m \times 1m \times 1m$ (X/Y/Z), 25 cm Sedimenthöhe. Anfangsgeschwindigkeit am linken sowie rechten Rand (1.0/0.0/0.0)

Tabelle 9.7: Parameter für Fluidberechnung und Sedimenttransport der rückwärtigen Stufe

NaSt3DGP - Parameter		
itermax	Anzahl maximaler Iterationen	10000
ε	Fehlergenauigkeit für das Druckresiduum	$1e - 8$
α	0.0=central differences, 1.0=upwind	0.5
Δt_{max}	max. Zeitschrittweite	0.02
Re	Reynoldszahl	500
cfl	Sicherheitsfaktor für CFL-Bedingung	0.2
Gx, Gy, Gz	Volumenkräfte	0
	Zeitdiskretisierung	Euler 1st
	Diskretisierung des konvektiven Terms	QUICK
	Drucklöser	BiCGStab
Sedimenttransport - Parameter		
τ_{dy}	Abstand zu Sedimentoberfläche	0,05 m
α	kritischer Winkel für Hangneigung	40°
ρ_s	Sedimentdichte (Quarzsand)	2650,0 kg/m ³
d_{50}	mittlerer Korndurchmesser	0,0001 m
τ_c	kritische Schubspannung	0,025 N/m ²
	Diskretisierungsschema der Exner-Gleichung	1. FTFS (Euler 1st/Euler 1st) 2. FTCS (Euler 1st/Central 2nd)
	Geschiebeformel	Meyer-Peter Müller
	Randbedingung für die Sedimentoberfläche	<i>noslip</i>

Alle weiteren Parameter sind entsprechend der vorigen Beispiele gewählt worden und in Tabelle 9.7 zusammengestellt. Zusätzlich zum veränderlichen Ausflussrand werden beide Seitenflächen mit *noslip*-Bedingungen initialisiert. Feinsand, als eine typische fluvial transportierte Kornfraktion, dient als Sediment. Korngröße und kritische Schubspannung wurden somit erneut so gewählt, dass eine stärkere Sedimentdynamik generiert wird. Dieses Beispiel kombiniert damit unterschiedliche Randwerte und soll Sedimentaustrag simulieren.

Im zeitlichen Verlauf ist deutlich zu erkennen, dass der, hinter der Stufe entstandene, Wirbel ein kleine Erosionsform ausbildet. Der auftreffende, abwärtsgerichtete Strömungsanteil initiiert hinter dieser Vertiefung eine weitere Erosion des Gerinnebetts. Mit fortschreitender Entwicklung vertieft sich die hintere Erosionsform weiter, wohingegen die, durch den Wirbel, verursachte Vertiefung stabil bleibt. Dies ist ein Zeichen dafür, dass die nötige Grenzschubspannung nicht mehr erreicht wird.

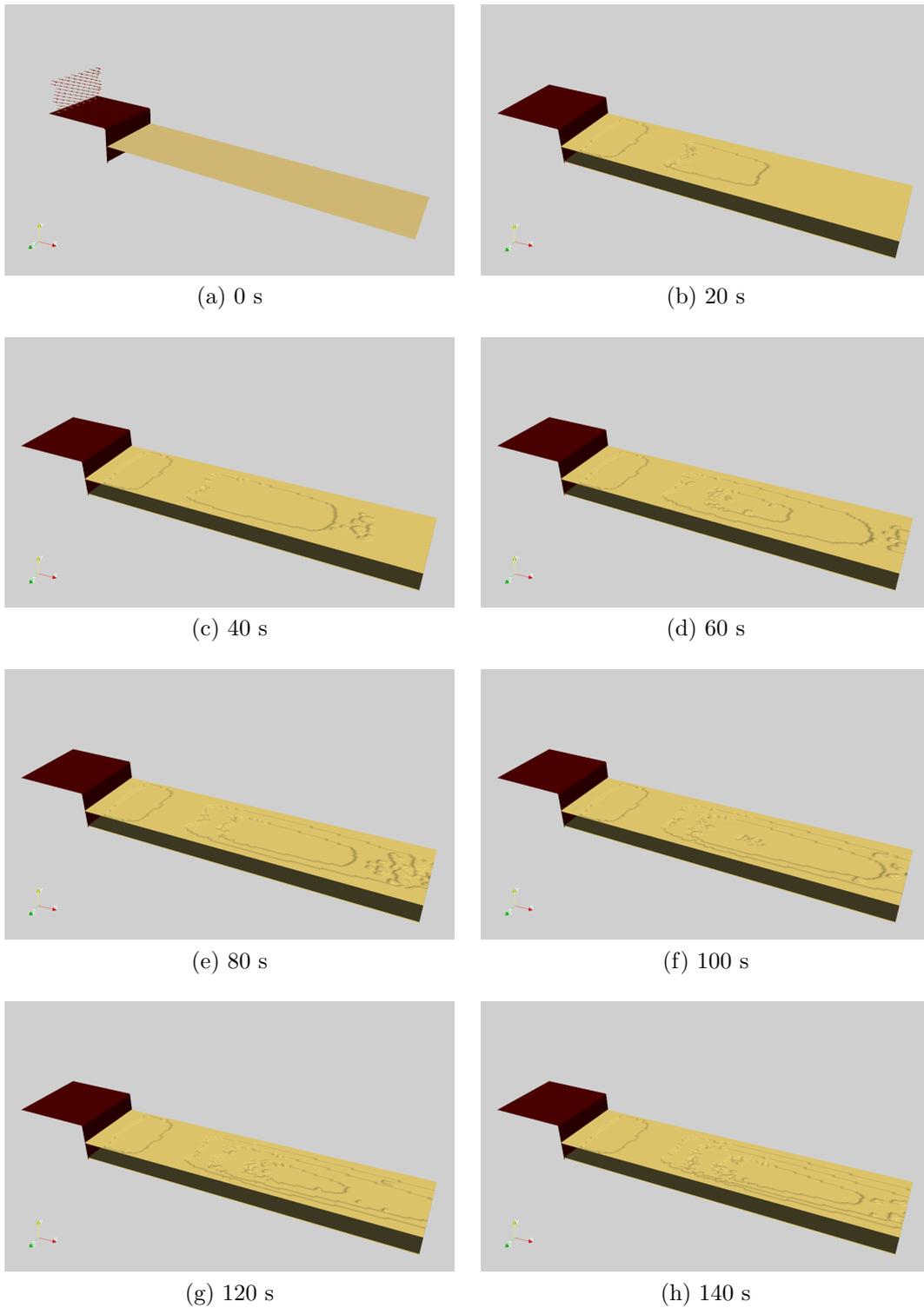


Abb. 9.16: Verlauf der Strömungs- und Sedimententwicklung der rückwärtigen Stufe in der Auflösung $240 \times 48 \times 48$ (FTCS)

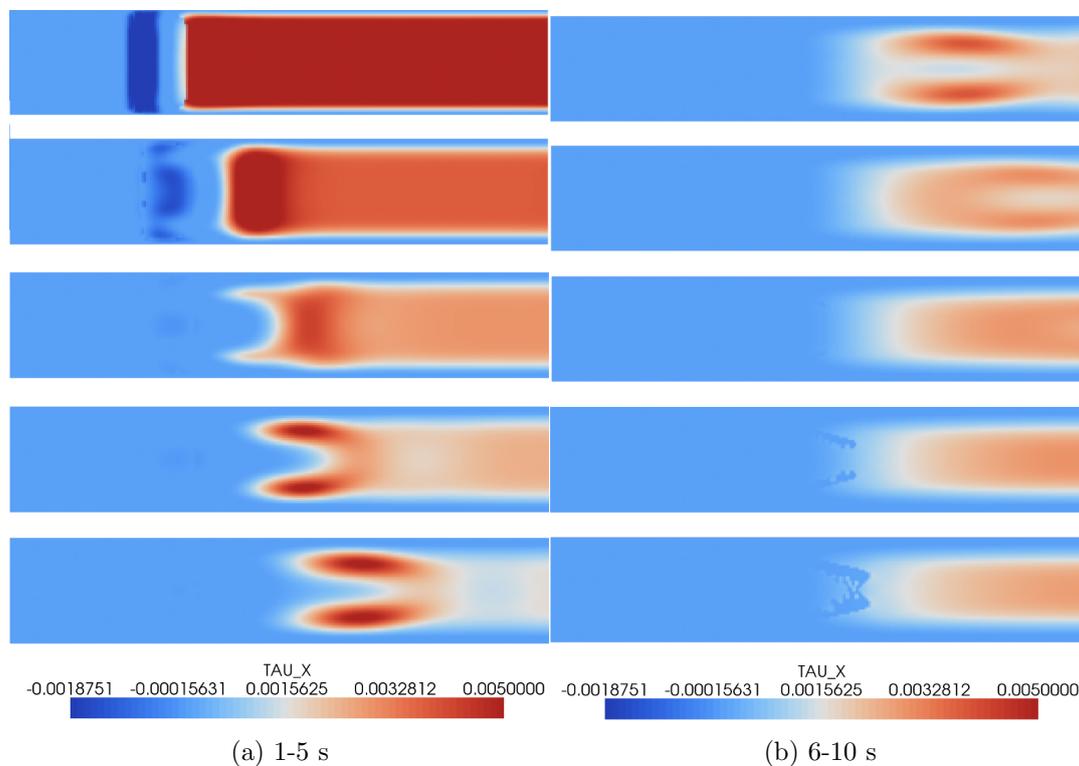


Abb. 9.17: Entwicklung der Schubspannung im Zeitraum 1 – 10s.

Abbildung 9.17 zeigt die Entwicklung der Schubspannung im Zeitraum von 1s bis 10s. Nach 1s ist direkt hinter der Stufe die Schubspannung τ_x negativ. Daraus resultiert rückwärtiger Sedimenttransport während der anfänglichen Ausbildung des Wirbels hinter der Stufe. Nach vollständiger Ausbildung der Vertiefung nach 3s, sinkt die Schubspannung unter die kritische Grenzscherubspannung τ_c . Hinter dem Wirbel liegen die Geschwindigkeiten über den kritischen Transportgeschwindigkeiten. Die weitere zeitliche Entwicklung führt dazu, dass lediglich am hinteren Ende des Gebiets die Schubspannungen noch ausreichend für Sedimenttransport sind. Diese Entwicklung legt die Vermutung nahe, dass durch die Strömung das Gerinnebett derart verändert und damit eine Form entsteht, welche an die Strömung angepasst wird, bis die kritische Schubspannung unterschritten wird und damit das Sedimentbett stabil bleibt. Interessanterweise ist die weitere Entwicklung aus Abbildung 9.16 durch ein Nachrutschen des Sediments geprägt. Wenn der kritische Hangwinkel α überschritten ist, rutscht weiteres Sediment nach.

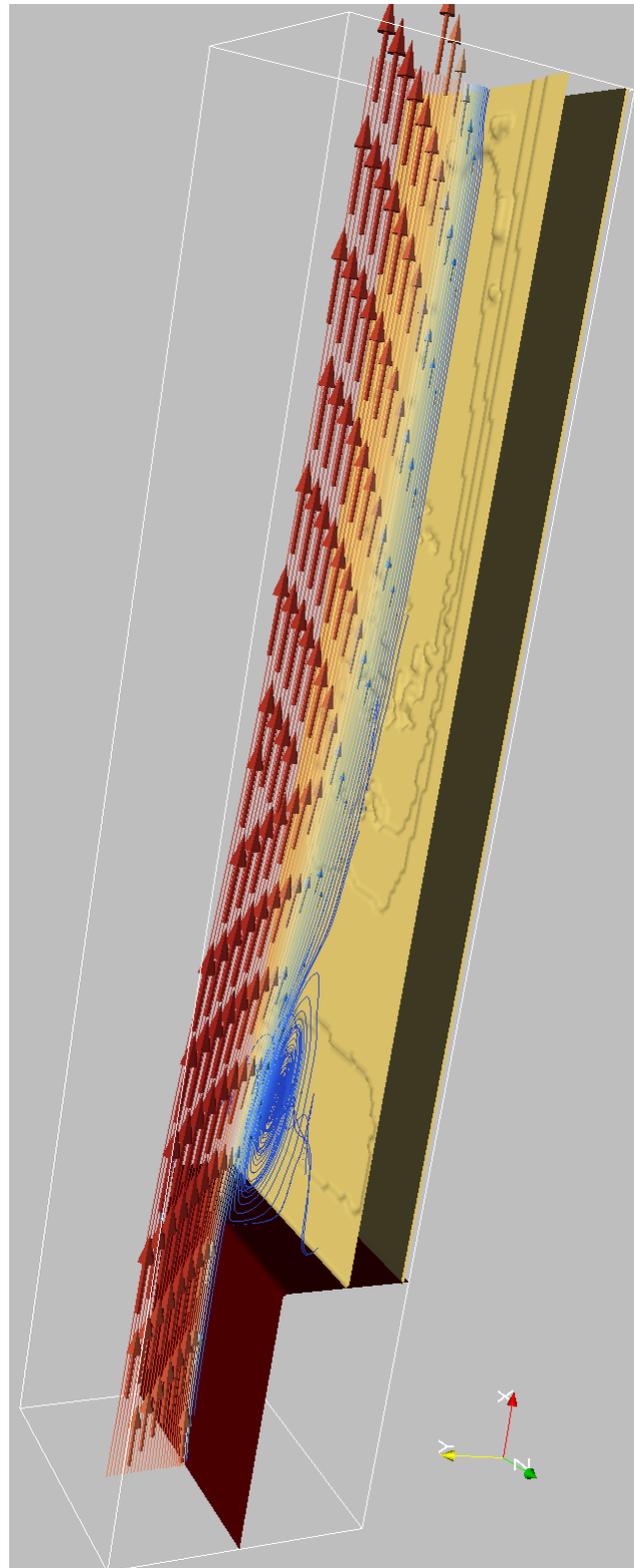


Abb. 9.18: Rückwärtige Stufe nach 150s

9.5 Düne

Die vorhergehenden Beispiele bestätigen die Tauglichkeit des Lösers für unterschiedliche Randbedingungen, mit dem erwarteten besseren Ergebnis des FTCS-Verfahrens. Im Folgenden soll mit dem FTCS-Verfahren, am Beispiel eines durch Strömung transportierten Dünenkörpers, der unterschiedliche Einfluss von Haft- beziehungsweise Rutschbedingungen an den Seitenflächen demonstriert werden. Als Ausgangskonfiguration dient ein parabolisches Einströmprofil am linken Rand und ein, quer zur Strömung gesetzter, Sedimentkörper. Realisiert wird dieser Sedimentkörper dadurch, dass ein rechteckiger Turm aus Sediment in der Nähe des linken Randes vorgegeben wird und anschließend der Slope-Limiter diesen iterativ solange bearbeitet, bis ein Sandhaufen mit einer Hangneigung $\alpha = 40^\circ$ entsteht.

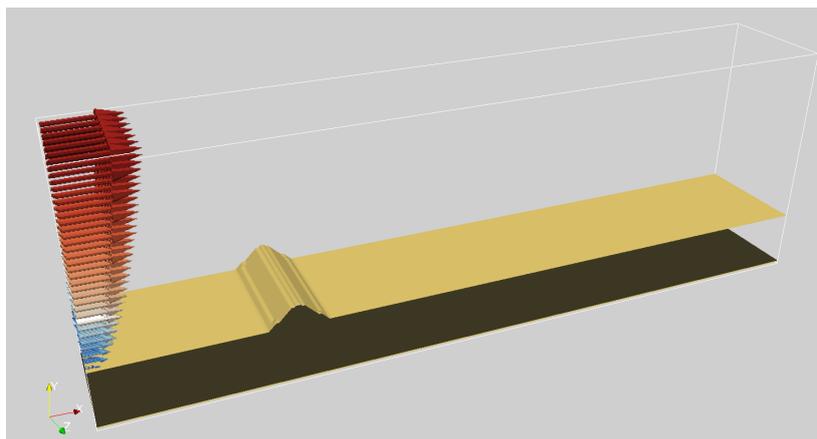


Abb. 9.19: Startkonfiguration, parabolisches Einströmprofil am linken Rand, *inout*-Bedingung am rechten Rand und Sedimenthöhe 25% (Auflösung $300 \times 100 \times 50$)

Anschließend wird dieser Sedimentkörper durch die Strömung transportiert und umgelagert. Je nach vorherrschenden Randbedingungen an den Seitenflächen wird sich entweder ein parabolisches oder gleichförmiges Strömungsprofil in Z -Richtung ausbilden. Ein gleichförmiges Profil sollte zur Folge haben, dass sich der Sandkörper gleichmäßig weiter bewegt, wobei jedoch zu erwarten ist, dass sich auf der, der Strömung zugewandten, Seite ein leicht ansteigendes Gefälle bildet, welches sich bis zur Dünenkante gleichmäßig fortsetzt. Ab dieser Abbruchkante sollte sich ein Abhang bilden, dessen Neigung durch den natürlichen Hangwinkel $\alpha = 40^\circ$ begrenzt wird. Als schematische Darstellung zeigt Abbildung 9.20 die Form einer Düne im Längsprofil und die damit verbundene Strö-

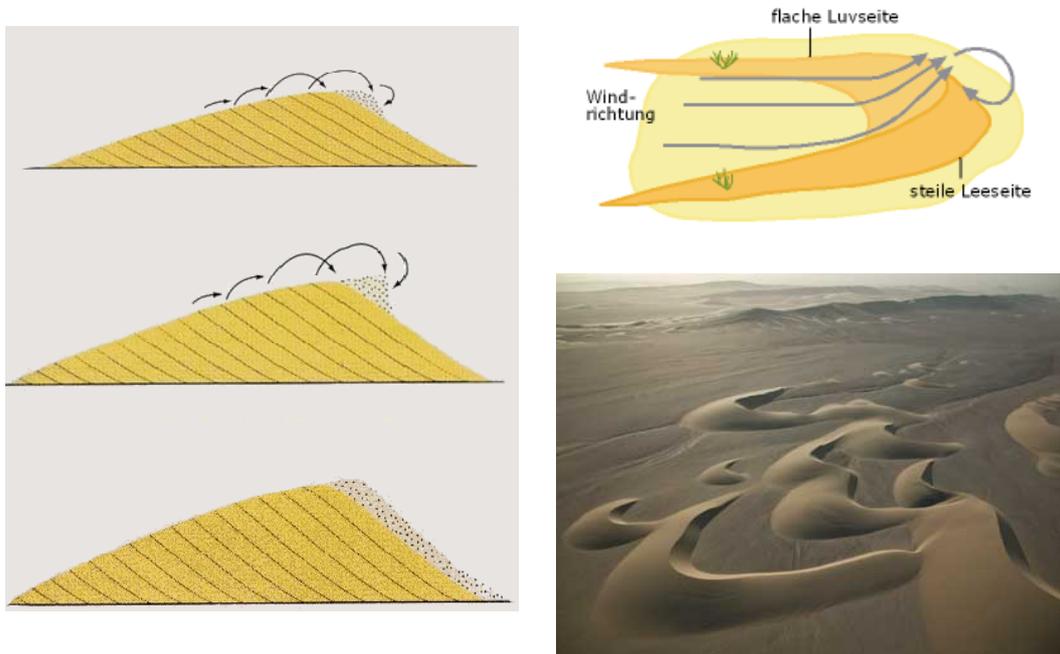


Abb. 9.20: Schematische Darstellung des allgemeinen Sedimenttransports auf einer Düne (links) und Entstehung einer Parabeldüne (rechts) (verändert nach [Press & Siever \(2003\)](#))

mungssituation. Die zu erwartende Form bei gleichmäßiger Strömung aus einer Richtung ist in [Abbildung 9.21](#) dargestellt.

Herrscht ein parabolisches Profil in Z -Richtung sollte in der Mitte des Dünenkörpers ein stärkerer Transport als an den Rändern entstehen. Der Sandkörper, der über die gesamte Z -Achse gleichmäßig verteilt ist, wird zusätzlich zur asymmetrischen Streckung in X -Richtung sichelförmig in Z -Richtung gestreckt. In natürlichen Umgebungen entstehen nach diesem Prinzip Parabeldünen, an deren Seiten der Sand aus unterschiedlichen Gründen weniger schnell transportiert wird, als in der Mitte der Düne.

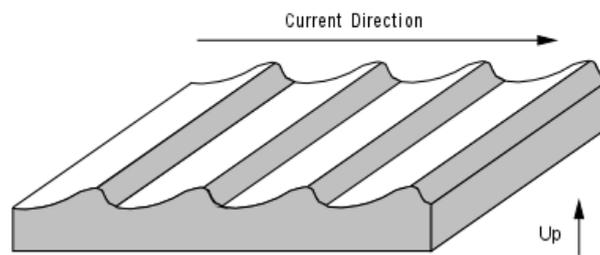
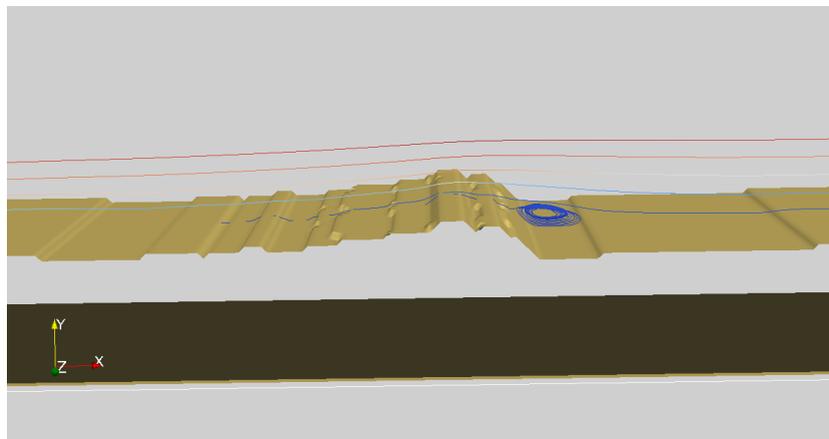
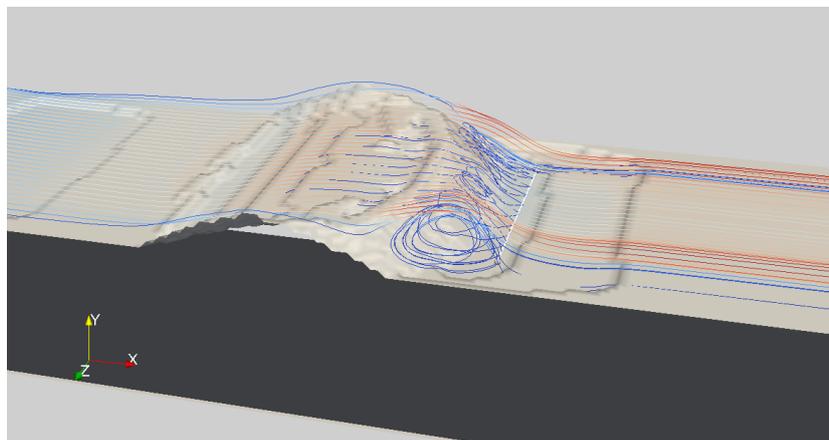
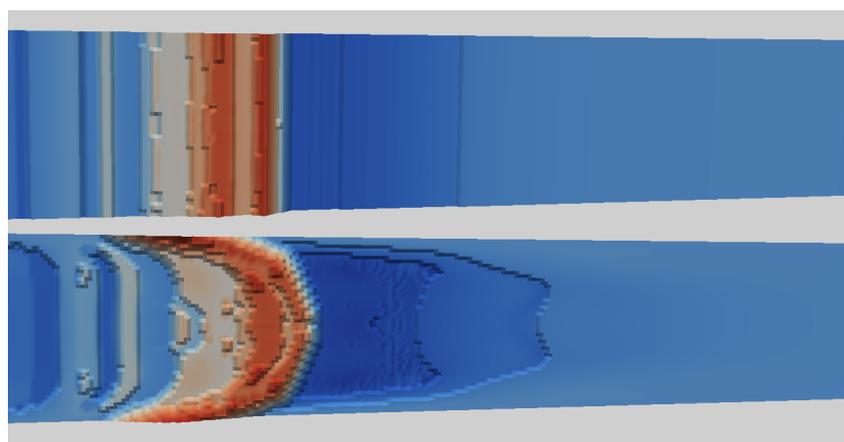


Abb. 9.21: Schema Dünenkörper bei gleichmäßiger Strömung aus einer Richtung, verändert nach Nelson (2000)

Der direkte Vergleich der simulierten Ergebnisse in Abbildung 9.22 zeigt, dass der Sedimentlöser das erwartete Verhalten sehr gut reproduzieren kann. Im Beispiel mit *slip*-Ränder wird der Körper auf der ganzen Breite transportiert und bildet das erwartete asymmetrische Dünenprofil in X -Richtung aus. Abbildung 9.22a zeigt deutlich einen flachen Luv-Hang im Vergleich zum steilen Lee-Hang. Ein gleichmäßiger Transport findet sich in natürlichen Umgebungen, wenn die Geschwindigkeiten über das gesamte Längsprofil gleich sind. Beispielsweise steht die Entstehung von Längsdünen hiermit im Zusammenhang. Im *noslip*-Beispiel ist die dreidimensionale Struktur der Parabeldüne deutlich zu erkennen (Abbildung 9.22b). Auch hier bildet sich ein relativ flacher Luv-Hang und ein, durch den natürlichen Hangwinkel begrenzter, Lee-Hang aus. Da der Körper im Querprofil unterschiedlich weit transportiert wurde, konnte sich die Parabelform ausbilden. Diese Formen entstehen unter natürlichen Umständen, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten an den Rändern der Düne geringer sind. Gründe hierfür können Pflanzen oder ähnliche Hindernisse sein, die zu einer Verminderung der Strömungsgeschwindigkeiten führen. In beiden Fällen zeigt sich, dass durch die Düne die Strömung verändert wird und sich hinter dem Sedimentkörper, ähnlich der rückwärtigen Stufe, ein Wirbel bildet. Durch diesem Wirbel entsteht eine weitere Erosionsform direkt hinter der Düne, in welcher die Sedimenttransportrichtung entgegengesetzt der ursprünglichen Strömung ist.

(a) Dünenkörper mit *slip*-Rändern(b) Dünenkörper mit *noslip*-Rändern

(c) Draufsicht

Abb. 9.22: Vergleich der unterschiedlichen Entwicklung bei *slip*- und *noslip*-Randbedingungen ($300 \times 100 \times 50$)

9.6 Fluviale Hindernismarke



Abb. 9.23: Fluviale Hindernismarke an rechteckigen Hindernis im hydraulischen Versuchskanal der AG Herget

Die zur Konvergenzanalyse herangezogenen Beispiele haben wenig Bezug zu in der Natur vorkommenden Situationen. Die Beispiele rückwärtige Stufe und Dünenbildung illustrieren anschaulich die natürlichen Prozesse, welche an der Bildung von Gerinnebettformen beteiligt sind. Um ein realistisches Beispiel zum Vergleich, heranzuziehen, wurde in den Versuchskanälen der Arbeitsgruppe Herget des Geographischen Instituts der Universität Bonn ein Kolk unter Laborbedingungen erzeugt und ausgemessen. Abbildung 9.23 zeigt ein rechteckiges Hindernis im hydraulischen Versuchskanal. Die Erosionsform vor dem Hindernis wird als Kolk bezeichnet, jedoch ist es üblich die, aus den erodierten Sedimenten aufgebauten, Rücken hinter dem Hindernis im Zusammenspiel mit dem Kolk zu betrachten. Die englische Bezeichnung für die Kombination aus Kolk und Rücken lautet *fluvial obstacle mark*. Dieser Bezeichnung entsprechend hat sich in der deutschen Literatur der Begriff der fluvialen Hindernismarke etabliert. Die resultierende

Form entsteht aus einem komplexen Zusammenspiel mehrerer Wirbelsysteme, die sich vor, hinter und um das Hindernis befinden. Abbildung 9.24 skizziert die entstehenden und Transport verursachenden Wirbel um das Hindernis.

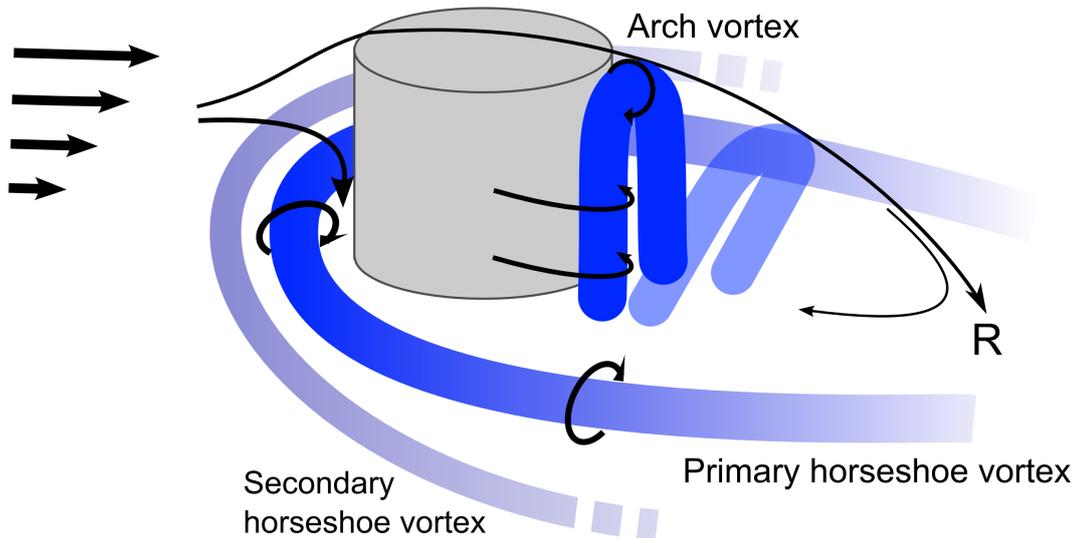


Abb. 9.24: Hufeisenwirbel um zylindrisches Hindernis, verändert nach Euler (2007)

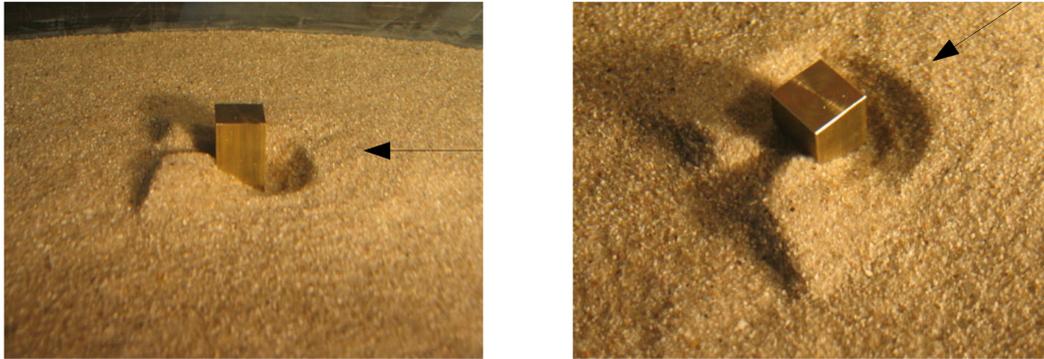
Die in Tabelle 9.8 aufgeführten Werte und Abmessungen sollen als Eingangsparameter für die numerische Simulation dienen. Unter Laborbedingungen kam einheitliches Sediment mit der Korngröße $d = 0.1\text{mm}$ zum Einsatz. Des Weiteren wurde das entstandene vertikale Strömungsprofil ausgemessen und in der numerischen Simulation als Randbedingung benutzt. In der Reynoldszahl wurde als charakteristische Länge die Wassertiefe $H = 10\text{cm}$ und die Einströmgeschwindigkeit $u = 30\text{cm/s}$ benutzt.

Aus dieser Konfiguration entstanden der, in Abbildung 9.25a dargestellte, Kolk vor dem rechteckigen Hindernis und die Sedimentationsformen seitlich hinter dem Hindernis. Die numerische Simulation mit obigen Eingabegrößen ergab, die in Abbildung 9.25b visualisierte, Form. Im Gegensatz zur Realität entstand vor dem Hindernis eine Sedimentationsform und damit kein Kolk. Beide Sedimentrücken hinter dem Hindernis sind gestreckter als die gemessenen Rücken in Abbildung 9.25a. Seitlich neben dem Hindernis reproduzierte die Simulation die Vertiefungen aus den obigen Abbildungen. Dass kein Kolk vor dem Hindernis entstanden ist, sollte mit einem zu starken Transport zu erklären sein. Das Modell berechnet zu starke Transportraten, welche Betttransport vor dem Hindernis verursachen und so den Kolk „zuschütten“. Ebenfalls durch zu hohe Raten ist die

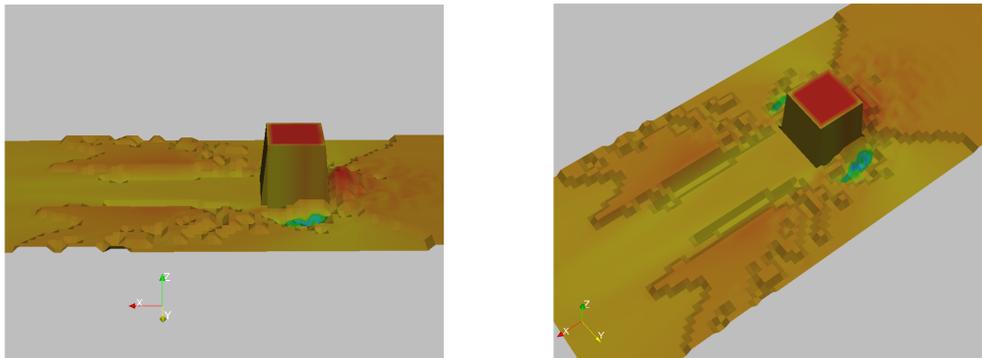
Tabelle 9.8: Parameter für Fluidberechnung und Sedimenttransport für den hydraulischen Versuchskanal

Versuchskanal - Parameter		
L	Länge	40cm
B	Breite	30cm
H	Wassertiefe	10cm
u	Einströmgeschwindigkeit	30cm/s
NaSt3DGP - Parameter		
itermax	Anzahl maximaler Iterationen	10000
ε	Fehlertoleranz für das Druckresiduum	$1e-5$
α	0.0=central differences, 1.0=upwind	1.0
Δt_{max}	max. Zeitschrittweite	0.02
Re	Reynoldszahl	900
cfl	Sicherheitsfaktor für CFL-Bedingung	0.2
Gx, Gy, Gz	Volumenkräfte	0
	Zeitdiskretisierung	Euler 1st
	Diskretisierung des konvektiven Terms	QUICK
	Drucklöser	BiCGStab
Sedimenttransport - Parameter		
τ_{dy}	Abstand zu Sedimentoberfläche	0,01 m
α	kritischer Winkel für Hangneigung	45°
ρ_s	Sedimentdichte (Quarzsand)	2650,0 kg/m ³
d_{50}	mittlerer Korndurchmesser	0,001 m
τ_c	kritische Schubspannung	0,023 N/m ²
		FTCS (Euler 1st/Central 2nd)
	Geschiebeformel	Meyer-Peter Müller
	Randbedingung für die Sedimentoberfläche	slip

flache Form der Rücken zu erklären, da Sedimente abtransportiert werden, anstatt sich aufzuhäufen. Diese Art der Hindernismarke ist durchaus in der Natur zu finden (Euler & Herget, 2010), wurde jedoch unter diesen Voraussetzungen nicht beobachtet. Weitere Variationsmöglichkeiten bieten die Koeffizienten in der Berechnung der Schubspannung τ und anderer Sedimenteigenschaften, wie Rundungsgrad und Oberflächenbeschaffenheit.



(a) Kolk nach 5 min



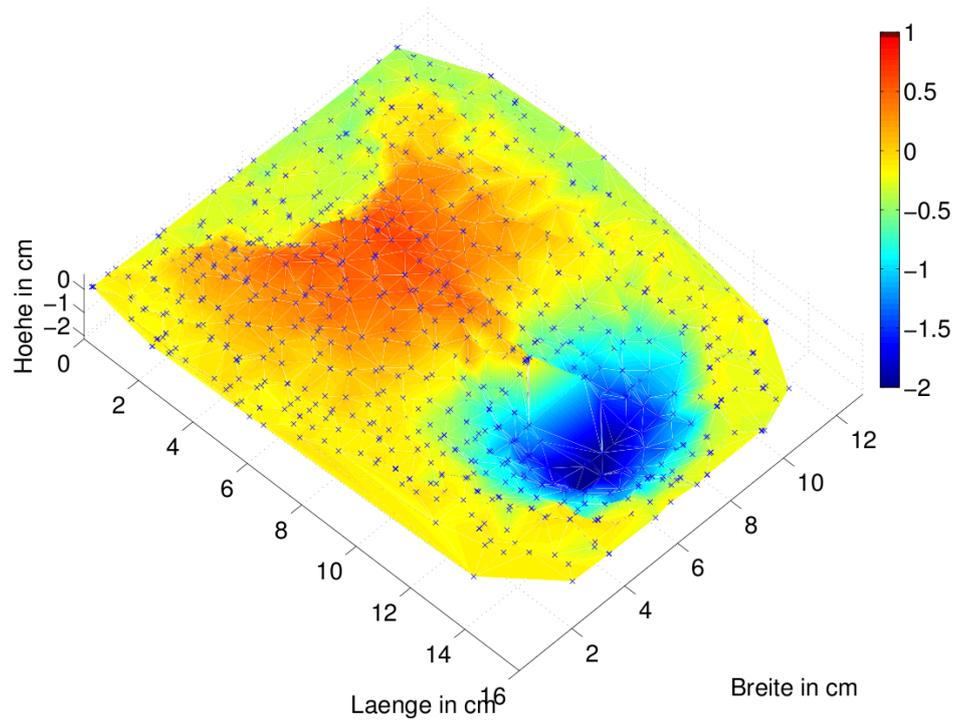
(b) Simuliertes Ergebnis nach 300 s

Abb. 9.25: Vergleich zwischen Kolk aus Versuchskanal und Simulationsergebnis

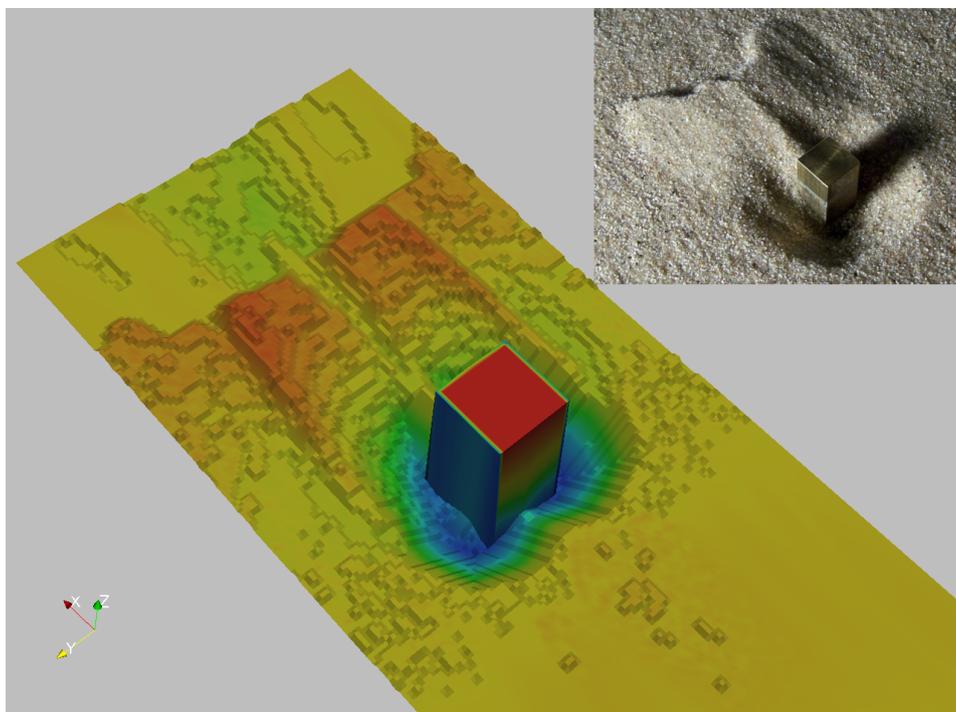
Um die Praktikabilität des Modells zu testen und zur Illustration des Problems der Kolkung an Brückenpfeiler, konnte durch Skalierung des Gebiets, dem Einsatz von feineren Sediment und den, in Tabelle 9.9 zusammengestellten, Parametern eine deutliche Verbesserung des Ergebnisses erreicht werden. In dieser Konfiguration des Lösers entstand der typische Kolk vor einem Hindernis. Abbildung 9.26 stellt die ausgemessene Form (Abbildung 9.26a) der simulierten Form (Abbildung 9.26b) gegenüber. Vor dem Hindernis ist deutlich ein Kolk entstanden, der seitlich zu den Rücken hin ansteigt. Die Sedimentationsform steigt mit der Entfernung zum Hindernis an und ist durch Rutschungsprozesse am hinteren Ende abgegrenzt. Ein steil abfallendes Ende des Rücken schließt diesen mittig ab, wohingegen die seitlichen Enden, wie in der ausgemessenen Hindernismarke, etwas weiterreichen.

Tabelle 9.9: Parameter für Fluidberechnung und Sedimenttransport für den hydraulischen Versuchskanal

Versuchskanal - Parameter		
L	Länge	20m
B	Breite	5m
H	Wassertiefe	5cm
u	Einströmgeschwindigkeit	1m/s
NaSt3DGP - Parameter		
itermax	Anzahl maximaler Iterationen	10000
ε	Fehlertoleranz für das Druckresiduum	$1e - 5$
α	0.0=central differences, 1.0=upwind	1.0
Δt_{max}	max. Zeitschrittweite	0.02
Re	Reynoldszahl	30000
cfl	Sicherheitsfaktor für CFL-Bedingung	0.2
Gx, Gy, Gz	Volumenkräfte	0
	Zeitdiskretisierung	Euler 1st
	Diskretisierung des konvektiven Terms	QUICK
	Drucklöser	BiCGStab
	Auflösung	$400 \times 100 \times 100$
Sedimenttransport - Parameter		
τ_{dy}	Abstand zu Sedimentoberfläche	0,1 m
α	kritischer Winkel für Hangneigung	45°
ρ_s	Sedimentdichte (Quarzsand)	$2650,0 \text{ kg/m}^3$
d_{50}	mittlerer Korndurchmesser	0,0001 m
τ_c	kritische Schubspannung	$0,0001 \text{ N/m}^2$
		FTCS (Euler 1st/Central 2nd)
	Geschiebeformel	Meyer-Peter Müller
	Randbedingung für die Sedimentoberfläche	slip



(a) Ausgemessener Kolk mit Matlab visualisiert



(b) Simulierter Kolk samt Rücken

Abb. 9.26: Kolk nach 120s

10 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Einleitend wurde die numerische Simulation des Kolks an einem Brückenpfeiler thematisiert und als Ziel dieser Arbeit ausgegeben. Zum besseren Verständnis des Sedimenttransports wurde eine genaue Aufschlüsselung der einzelnen Prozesse nötig. Dabei wurde die Aufteilung anhand des Transportweges vorgenommen, indem aufgewirbelte Teilchen von denen, die rollend und schiebend am Boden transportiert werden, getrennt wurden. Für beide Kategorien wurden Modelle vorgestellt und hergeleitet. Die empirisch motivierte Begründung zur Beschränkung auf den Betttransport basiert auf der Beobachtung, dass sich unter Klarwasserbedingungen die gleichen Kolke und Gerinnebettformen bilden wie unter Bedingungen mit Suspension. Dementsprechend kam das Exner-Modell zur numerischen Simulation zum Einsatz. Mit Hilfe eines Mittelungsansatzes und durch Homogenisierung des Sedimentbettes gelang es, eine mathematische Herleitung dieser Formel aufzuzeigen. Die Modellierung der empirischen Einflüsse in dieser Gleichung erfolgte durch Ansätze aus der hydraulischen Praxis. Nach Reduzierung der Empirie fanden anschließend die Konzepte der Schubspannung und des Geschiebetransports Anwendung und dienten als Eingangsgrößen in das Exner-Modell.

Das Problem des maximalen Hangwinkels löste ein massenerhaltender iterativer Verteilungsalgorithmus. Zur Erfüllung der CFL-Bedingung musste eine weitere Sediment-CFL-Bedingung eingeführt werden, die den maximalen Sedimentzuwachs einer Gitterzelle begrenzt. Die Frage der Kopplung der Sedimenthöhenfunktion mit dem Strömungsgebiet konnte durch eine Anpassung der Geschwindigkeiten beantwortet werden. Dies ermöglichte die Anwendung einer direkten numerischen Simulation. Durch Auf- und Abrunden gelang die Approximation der Sedimentoberfläche durch das *Flag*-Feld.

Mit dem parallelisierten Code konnten erstmalig Konvergenzstudien an grundlegenden Beispielen durchgeführt werden. Die gemessenen Konvergenzraten der Sedimenthöhe standen unter dem Einfluss mehrerer einzelner Konvergenzraten. Die Raten aus

NaSt3DGP, der Diskretisierung der Exner-Gleichung und der Geometrieapproximation überlagerten sich zu den gemessenen Raten. Bedingt durch die Anpassung der Sedimentoberfläche an die Strömung stabilisierten sich die Werte nach anfänglichen Einbrechen im weiteren Verlauf wieder. Resultat dieser Untersuchungen ist, dass mit zentralen Differenzen die Einbrüche weniger stark sind als mit dem Upwind Schema erster Ordnung. Überraschenderweise verursachte die Formoptimierung der Sedimentoberfläche nach Erreichen eines stationären Zustandes einen Anstieg der Konvergenzraten über deren Ausgangsniveau hinaus. Besonders deutlich wurde dies im Beispiel Driven-Cavity mit Singularitäten in den Randbedingungen.

Die Vorstellung der Anwendungsbereiche geschah in aufsteigender Folge der Komplexität. Beginnend mit einem zweidimensionalen Beispiel mit homogenen Randbedingungen (Driven-Cavity), über das zwei- und dreidimensionale Beispiel der Doppelten Stufe mit *slip* und *noslip*-Rändern und Ein- und Ausströmrändern in der Rückwärtigen Stufe erhöhte sich die Komplexität. In allen Fällen konnten die Transportprozesse sehr gut reproduziert werden. Der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen wurde abschließend am Beispiel der Dünenentwicklung simuliert und diskutiert. Diese Tests illustrierten überzeugend die Anwendungsbreite des implementierten Modells.

Der als Ziel ausgegebene Kolk um ein Hindernis bildete den Abschluss der untersuchten Phänomene. Anhand von Labormessungen und durch geeignete Anpassung der Eingabeparameter der empirischen Modelle ließ sich die Entstehung des Kolks und des zugehörigen Rückens hinter dem Hindernis in der Simulation beobachten. Hiermit konnte eindrucksvoll demonstriert werden, dass die präsentierte Umsetzung in der Lage ist die Entstehung von Gerinnebettformen numerisch zu simulieren und damit eine sehr gute Annäherung an die Realität zu liefern.

Ausblick

Das grundsätzliche Prinzip der Exner-Gleichung ist in der Lage, die durch Betttransport entstehenden Formen zu reproduzieren. Dass die Laborexperimente von den numerischen Resultaten teilweise abweichen, ist mit der Anfälligkeit der Geschiebeformeln bei Änderung der Parameter verbunden. Damit wird die systematische Untersuchung der zur Verfügung stehenden empirischen Transportmodelle und der damit einhergehenden Verbesserungen eine lohnende Aufgabe. Unweigerlich wird damit die Berechnung der Schubspannung als zweite wichtige Größe zu optimieren sein.

Wie bereits erwähnt, beinhaltet Sedimenttransport neben Geschiebetransport den Suspensionstransport. Die Erweiterung des bestehenden Verfahrens um die Konzentrationsgleichung würde die Gesamtheit des Transports erfassen. Hiermit würde die Beschränkung auf Klarwasserbedingungen entfallen und eine Bandbreite an Anwendungsmöglichkeiten entstehen. Beispielsweise wären Transporte und Sedimentationsprozesse von Ton oder Schluff in Stillwasserbereichen oder Seen denkbare Anwendungen.

In numerischer Hinsicht sind zwei essentiell zu verbessernde Bereiche zu nennen. Eine Diskretisierung der Exner-Gleichung höherer Ordnung mit WENO- oder ENO-Verfahren würde die Verfahren erster und zweiter Ordnung ersetzen. Genauso wichtig wäre der Einsatz genauerer Methoden zur Geometrieapproximation. Eine Qualitätsteigerung der bestehenden konstanten Annäherung der Sedimenthöhenfunktion durch das *Flag*-Feld ließe sich durch VOF- oder Level-Set-Verfahren erreichen. Desweiteren könnte der iterative Gefällsbegrenzer durch ein realistischeres Modell ersetzt und außerdem eine Interaktion zwischen Strömung und abrutschenden Sediment realisiert werden. Das Zusammenspiel dieser Aspekte hätte einen weiteren Anstieg der Konvergenzraten zur Folge. Die Einbrüche mit beginnender Sedimentdynamik wären weniger stark und die höher diskretisierte Exner-Gleichung würde für eine allgemeine Anhebung der Raten sorgen. Ziel müsste das Niveau der NaSt3DGP-Raten sein.

Zusammenfassend stellt sich somit eine Vielfalt von spannenden Fragen und Probleme, die es anzugehen gilt.

Danksagung

Dass diese Diplomarbeit nicht ohne die Hilfe vieler zu stande kommen konnte, ist selbstverständlich. Aus diesem Grund soll an dieser Stelle allen gedankt werden, die mir während der Arbeit an diesem äußerst interessanten Thema mit Rat und Tat zur Seite standen.

Für die geduldige und intensive Betreuung und die Überlassung des Themas danke ich Herrn Prof. Dr. Griebel, der zu jeder Zeit äußerst hilfreiche Denkanstöße und nützliche Hilfestellungen geben konnte. Für die Übernahme der Zweitkorrektur bedanke ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Bartels.

Ein weiteres herzliches Dankeschön für die Nutzung der Infrastruktur des Instituts geht

an Herrn Prof. Dr. Griebel und die Mitarbeiter der Instituts für Numerische Simulation allen voran an Peter Zaspel, Margrit Klitz und Roberto Croce.

Für die Möglichkeit der eigenen Labormessungen im hydraulischen Versuchskanal geht ein großes Dankeschön an Thomas Euler und Prof. Dr. Herget. Dieser praktischen Erfahrung habe ich es zu verdanken, auf das spannende Thema dieser Arbeit gekommen zu sein.

Für eine ausdauernde und akribische Korrektur dieses Meisterwerks der Misshandlung deutscher Sprache danke ich „einfach“ sehr herzlich Christian Kuske und Jutta Adelsberger.

Ebenfalls für eine penible Korrektur, aber darüber hinaus für all das Verständnis und die Unterstützung geht ein großer Dank an Hanna.

Allen voran gilt das größte Dankeschön meiner Familie, die Alles möglich gemacht hat um mich in meinem Studium mit allen Mitteln zu unterstützen.

– Danke –

Abbildungsverzeichnis

1.1	Unterschiedliche Kolke aus Gelände- sowie Laborarbeiten	3
1.2	Schematischer Aufbau des hydraulischen Versuchskanals der AG-Herget am Geographischen Institut Universität Bonn	4
3.1	Unterschiedliche Arten des Sedimenttransportes	9
5.1	Vereinfachtes Schema zur Exner-Gleichung	17
5.2	Isoflächen in der Sedimentschicht (verändert nach Coleman & Nikora (2009))	23
6.1	Beispiele für Gerinnebettformen in aufsteigender Größe	29
6.2	Schematische Darstellung formbildender Strömungssysteme	30
8.1	Schemazeichnung des Algorithmus	42
8.2	Anteile des durch abrutschende Sedimentmassen entstandenen Schüttkegels. Kantennachbarn bilden ein gleichseitiges Dreieck, woraus ein Anteil von $\frac{1}{6}$ für Kantennachbarn und $\frac{1}{12}$ für Ecknachbarn entsteht.	52
8.3	Ergebnisse des Slope-Limiters auf einen Sedimentturm für die Winkel 25° - 60° in 5° -Schritten	53
8.4	Ergebnis eines aufgetürmten Sandhaufens in T-Form vor und nach der iterativen Massenverteilung durch den Slope-Limiter Algorithmus (Visualisierung des Flag-Feldes $\alpha = 45^\circ$)	55
8.5	Schematische Kommunikation von Übereckgebieten	62
9.1	Driven-Cavity Ausgangskonfiguration	67
9.2	Driven-Cavity nach 10 s in den drei benutzten Auflösungen	69
9.3	Entwicklung der Konvergenzraten am Beispiel der Driven-Cavity	71
9.4	Einfluss und Aufteilung der einzelnen Konvergenzraten im Beispiel FTCS	72
9.5	Driven-Cavity nach 100s in der Auflösung $64 \times 32 \times 8$ (FTCS)	75

9.6	Doppelte Stufe Ausgangskonfiguration: $3.0m \times 1m \times 1m$ (X/Y/Z) und 25 cm Sedimenthöhe	77
9.7	Dopplte Stufe 20s	80
9.8	Dopplte Stufe noslip	81
9.9	Schubspannung Doppelte Stufe	82
9.10	Entwicklung der Konvergenzraten am Beispiel der doppelten Stufe	84
9.11	Entwicklung der Konvergenzraten am Beispiel der doppelten Stufe	85
9.12	Dopplte Stufe slip FTFS-FTCS	87
9.13	Dopplte Stufe noslip FTFS-FTCS	88
9.14	Zeitliche Entwicklung der Sedimentmasse (Haftbedingungen).	89
9.15	Rückwärtige Stufe: Ausgangskonfiguration	90
9.16	Verlauf der Strömungs- und Sedimententwicklung der rückwärtigen Stufe in der Auflösung $240 \times 48 \times 48$ (FTCS)	92
9.17	Entwicklung der Schubspannung im Zeitraum 1 – 10s.	93
9.18	Rückwärtige Stufe 150s	94
9.19	Startkonfiguration, parabolisches Einströmprofil am linken Rand, <i>inout</i> -Bedingung am rechten Rand und Sedimenthöhe 25% (Auflösung $300 \times 100 \times 50$)	95
9.20	Schematische Darstellung des allgemeinen Sedimenttransports auf einer Düne (links) und Entstehung einer Parabeldüne (rechts) (verändert nach Press & Siever (2003))	96
9.21	Schema Dünenkörper bei gleichmäßiger Strömung aus einer Richtung, verändert nach Nelson (2000)	97
9.22	Düne Rutsch-Haft-Rändern	98
9.23	Fluviale Hindernismarke an rechteckigen Hindernis im hydraulischen Versuchskanal der AG Herget	99
9.24	Hufeisenwirbel um zylindrisches Hindernis, verändert nach Euler (2007)	100
9.25	Vergleich zwischen Kolk aus Versuchskanal und Simulationsergebnis	102
9.26	Kolk nach 120s	104

Literaturverzeichnis

- Amoudry, L., & Liu, P.-F. (2009). Two-dimensional, two-phase granular sediment transport model with applications to scouring downstream of an apron. *Coastal Engineering*, 56, 693–702.
- Campos, R. (2001). *Three-dimensional reservoir sedimentation model*. Ph.D. thesis, University of Newcastle, Faculty of Engineering.
- Chanson, H. (1999). *The Hydraulics of Open Channel Flow - An Introduction*. Edward Arnold.
- Coleman, S. E., & Nikora, V. I. (2009). Exner equation: A continuum approximation of a discrete granular system. *Water Resource Research*, 45.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100(1), 32–74.
- Croce, R. (2002). *Ein paralleler, dreidimensionaler Navier-Stokes-Löser für inkompressible Zweiphasenströmungen mit Oberflächenspannung, Hindernissen und dynamischen Kontaktflächen*. Master's thesis, Insitut für numerische Mathematik, Universität Bonn.
- Douglas, J. F., Gasiorek, J., & Swaffield, J. (2001). *Fluid Mechanics*. Essex: Prentice Hall. 4. Auflage.
- Euler, T. (2007). *Kolke an überströmten Hindernissen als fluviale Gerinnebettformen - Experimente im hydraulischen Versuchskanal*. Master's thesis, Geographisches Institut Universität Bonn.
- Euler, T., & Herget, J. (2010). Controls on local scour and deposition induced by obstacles in fluvial environments. *Catena, Special Edition on Experimental Methods*. Submitted.

- Jones, J. (2000). David knighton, fluvial forms and processes - a new perspective. *Geo-Journal*, 50, 70–71. 10.1023/A:1007110908685.
URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1007110908685>
- Julien, P. (1995). *Erosion and sedimentation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kantoush, S. A., Bollaert, E., & Schleiss, A. J. (2008). Experimental and numerical modelling of sedimentation in a rectangular shallow basin. *International Journal of Sediment Research*, 23(3), 212 – 232.
- Kubatko, E. T., Westerink, J. J., & Dawson, C. (2006). An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous galerkin method for bed evolution. *Ocean Modelling*, 15, 71–89.
- Lee, J., & Herrmann, H. (1993). Angle of repose and angle of marginal stability: molecular dynamics of granular particles. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(2), 373–383.
- Li, S. S., Millar, R. G., & Islam, S. (2008). Modelling gravel transport and morphology for the fraser river gravel reach, british columbia. *Geomorphology*, 95, 206 ? 222.
- Link, O. (2006). *Untersuchung der Kolkung an einem schlanken zylindrischen Pfeiler in sandigem Boden*. Ph.D. thesis, Fachbereich Bauingenieurwesen und Geodäsie der technischen Universität Darmstadt.
- Liu, X., & Garcia, M. (2006). Numerical simulation of local scour with free surface and automatic mesh deformation. In *Proceedings of world environment and Water Resource Congress*.
- Long, W., Kirby, J. T., & Shao, Z. (2008). A numerical scheme for morphological bed level calculations. *Coastal Engineering*, 55, 167–180.
- Marek, M. (2001). *Simulation des Sedimenttransports in Suspension und als Geschiebe - Ein Vergleich fur das Jade-Weser-Astuar*. Master's thesis, Insitut für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik, Universität Karlsruhe.
- Möller, L. E., Kuhlman, K. R., Marshall, J. R., & Towner, M. C. (2002). The snoopy angle of repose experiment: Calibration of an instrument to determine the angle of repose of martian dust. *Lunar and Planetary Science*, XXXIII.

- Nelson, S. A. (2000). Occurrence, mineralogy, textures, and structures of sedimentary rocks. <http://www.tulane.edu/~sanelson/geol212/sedrxintro.htm>.
- Officer, C. B. (1982). Fluid and material diffusion coefficient determinations from sediment cores. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 14(4), 459–464.
- Parker, G. (2004). *1D Sediment Transport Morphodynamics with applications to Rivers and Turbidity Currents*.
URL http://vtchl.uiuc.edu/people/parkerg/morphodynamics_e-book.htm
- Press, F., & Siever, R. (2003). *Allgemeine Geologie*. Spektrum Verlag Berlin. 3. Auflage.
- Storey, C., & Delatte, N. J. (2003). Lessons from the collapse of the schoharie creek bridge. In P. A. Bosela, N. J. Delatte, & K. L. Rens (Eds.) *Proceedings of the Third Congress*, (pp. 158–167). San Diego, CA: Technical Council on Forensic Engineering of the American Society of Civil Engineers.
- Whitaker, S. (1998). *The Method of Volume Averaging*. Springer. 1. Auflage.
- Wu, W. (2004). Depth-averaged 2-d numerical modeling of unsteady flow and nonuniform sediment transport in open channels. *Journal of hydraulic engineering*, 130(10), 1013–1024.
- Wu, W., & Wang, S. S. (2005). Development and applications of ncche's sediment transport models. In *US-China workshop on advanced computational modelling in hydroscience & engineering*.
- Yoon, J.-Y., & Kang, S.-K. (2005). A numerical model of sediment-laden turbulent flow in an open channel. *Canadian Journal Civil Engineering*, 32, 233–240.
- Zanke, U. (2002). *Hydromechanik der Gerinne und Küstengewässer - Für Bauingenieure, Umwelt- und Geowissenschaftler*. Parey Buchverlag Berlin.
- Zhang, H., Nakagawa, H., Ishigaki, T., Muto, Y., & Baba, Y. (2005). Three-dimensional mathematical modeling of local scour. *Journal of Applied Mathematics*, vol.8, 803–812.