

DIPLOMARBEIT

Dünngitter-Binomialbäume
zur Bewertung von Multiasset-Optionen

Angefertigt am
Institut für Numerische Simulation

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Oktober 2008

Von
Christina Kürten
aus
Köln

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Optionen und ihre Bewertung	7
1.1 Optionstypen	7
1.1.1 Standard-Optionen	7
1.1.2 Basket-Optionen	9
1.2 Grundlagen der Optionsbewertung	10
1.2.1 Motive für den Handel mit Optionen	10
1.2.2 Arbitragefreiheit	11
1.2.3 Strukturaussagen	13
1.3 Black-Scholes-Modell	16
1.3.1 Marktannahmen	16
1.3.2 Black-Scholes-Formel	18
1.4 Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell	20
2 Binomialverfahren	23
2.1 Konstruktion und Ablauf der Binomialmethode	23
2.2 Eindimensionale Binomialmodelle	27
2.2.1 Das CRR-Modell	28
2.2.2 Das JR-Modell	30
2.2.3 Das TN-Modell	31
2.2.4 Das ZA-Modell	32
2.2.5 Das LR-Modell	33
2.3 Das BEG-Modell	35
2.3.1 Konstruktion	37
2.3.2 Algorithmus des BEG-Verfahrens	37
2.3.3 Bestimmung der Parameter	38
2.4 Approximation des Black-Scholes-Modells durch das Binomialmodell	43
2.5 Trinomial- und Multinomialverfahren	44
3 Dünngitter-Binomialverfahren	47
3.1 Grundlagen	47
3.2 Das Produktbinomialmodell	48
3.2.1 Konstruktion des Produktbinomialverfahrens	48
3.2.2 Konvergenz des Produktbinomialverfahrens	51
3.2.3 Algorithmus des Produktbinomialverfahrens	52
3.3 Dünngitter-Binomialbäume	53
3.3.1 Konstruktion von anisotropen Bäumen	55

3.3.2	Die Kombinationstechnik	57
3.3.3	Konvergenz des Dünngitter-Binomialverfahrens	59
3.3.4	Algorithmus des Dünngitter-Binomialverfahrens	63
4	Numerische Ergebnisse	65
4.1	Sensitivitäten	65
4.2	Europäische und Amerikanische Optionen	67
4.3	Europäische Basket-Optionen	76
4.4	Power Baskets	83
5	Zusammenfassung und Ausblick	89
	Bezeichnungen	91
	Literaturverzeichnis	93

Einleitung

Derivate sind das am schnellsten wachsende und sich verändernde Segment des modernen Finanzwesens. Ihre Bedeutung wird auch bei Betrachtung der aktuellen Finanzkrise deutlich, die durch derivative Finanzprodukte, insbesondere durch Kreditderivate, mitverursacht wurde. Grundsätzlich wird zwischen Optionen, Futures und Swaps unterschieden, die alle an vielen Börsen der Welt und auch außerbörslich intensiv gehandelt werden. In dieser Arbeit wollen wir uns auf Optionen beschränken. Eine *Option* gibt ihrem Besitzer das Recht, einen zugrunde liegenden Basiswert, z. B. eine Aktie, an oder bis zu einem zukünftigen Zeitpunkt zu einem festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. Wie auch andere Finanzderivate ist sie als Mittel zur Risikoabsicherung oder zur Spekulation mittlerweile nicht mehr wegzudenken. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach dem Preis eines solchen Derivats. Falls das Derivat ausreichend häufig gehandelt wird, entspricht dieser Preis dem Börsenwert, der durch Angebot und Nachfrage bestimmt wird. Bei sogenannten Exotischen Optionen, die nur selten und oft außerbörslich gehandelt werden, erfolgt die Preisbestimmung hingegen als sogenannter *fairer Preis* durch eine geeignete mathematische Modellierung und Berechnung. Die Grundlage hierfür lieferten 1973 F. Black, M. Scholes und R. Merton in ihren berühmten Arbeiten ([BS73]), mit denen ihnen ein entscheidender Durchbruch bei der Bewertung von Optionen gelang. Sie modellieren den zukünftigen Verlauf des zugrunde liegenden Basiswertes durch einen speziellen stochastischen Prozess, der über einen Wiener-Prozess angetrieben wird.

Bei der Betrachtung von Optionen wird zwischen verschiedenen Typen unterschieden. Wir wollen eine Klassifizierung in Europäische/Amerikanische und Plain Vanilla/Basket-Optionen vornehmen. Europäische oder Amerikanische Plain Vanilla Optionen werden häufig auch als *Standard-Optionen* bezeichnet. Eine Option von *Europäischem Typ* kann nur zum Fälligkeitszeitpunkt ausgeübt werden, eine *Amerikanische Option* dagegen jederzeit während der Laufzeit. Eine *Plain Vanilla Option* hängt von nur einem zugrunde liegenden Wertpapier ab, bei *Basket-Optionen*, die uns in dieser Arbeit besonders interessieren, setzt sich dagegen der Basiswert aus mehreren Wertpapieren zusammen. Im Folgenden wollen wir die Anzahl an zugrunde liegenden Wertpapieren mit d bezeichnen und als *Dimension* der Option auffassen. Der faire Preis der Option hängt in diesem Fall vom Wert des Baskets ab, der als arithmetisches oder geometrisches Mittel, Minimum oder Maximum der einzelnen Wertpapiere definiert werden kann. Solche Optionen fallen in die Klasse der *Exotischen Optionen*.

Unter der Voraussetzung, dass der Finanzmarkt bestimmte Annahmen erfüllt, wird in [BS73] eine Differentialgleichung, die sogenannte *Black-Scholes-Gleichung*, hergeleitet, die der faire Preis einer Option erfüllt. Im Falle einer Europäischen Standard-Option ist die analytische Lösung dieser Gleichung in Form der *Black-Scholes-Formel* gegeben. Die Analyse und Bewertung von Amerikanischen Optionen gestaltet sich im Allgemeinen schwieriger, nämlich aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechts, welches dazu führt, dass anstelle von Differentialgleichungen freie Randwertprobleme gelöst werden müssen. Für diese Probleme sind auch im Standard-Fall

bis heute keine einfachen geschlossenen Lösungsformeln bekannt. Für Europäische und Amerikanische Basket-Optionen kann ein mehrdimensionales Analogon zur Black-Scholes-Gleichung hergeleitet werden. Auch für diese Gleichung sind keine analytischen Lösungen bekannt. Aus diesem Grund muss hier auf effiziente und flexible numerische Verfahren zurückgegriffen werden.

Für die Bewertung Amerikanischer Standard-Optionen bieten sich *Binomialverfahren* an, wie sie in [CRR79, JR83, Tia93, LR95, LR96] vorgestellt werden. Mit Hilfe einer Diskretisierung des Zeitintervalls und der Annahme fest vorgegebener Aufwärts- bzw. Abwärtsbewegungen des Kurses mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten in jedem Zeitintervall wird die zukünftige Entwicklung des Basiswertes in einer Vorwärtsphase berechnet. In einer anschließenden Rückwärtsphase wird dann der Optionspreis gemäß dem sogenannten Prinzip der risikoneutralen Bewertung als diskontierter Erwartungswert der Auszahlungsfunktion bestimmt. Die einzelnen Binomialverfahren unterscheiden sich in der Wahl der Parameter, für die es verschiedene Möglichkeiten gibt und die unterschiedlichen Einfluss auf das Konvergenzverhalten haben. Alternativ werden auch *Finite-Differenzen-* und *Finite-Element-Methoden* eingesetzt, um Amerikanische Standard-Optionen zu bewerten, indem sie das *freie Randwertproblem* lösen, das der Preis erfüllt und das sich aus dem Arbitrage-Prinzip herleitet. Diese Verfahren werden z. B. in [HW90, Sey02, Wil98, Rub00, BS78] beschrieben.

Für die Bewertung von Europäischen Basket-Optionen werden *Monte Carlo* oder *Quasi-Monte Carlo Methoden* und *numerische Quadraturverfahren* verwendet. Grundlage dieser Verfahren ist wie bei den Binomialverfahren die Darstellung des fairen Optionspreises als diskontierter Erwartungswert der Auszahlungsfunktion mit Hilfe des sogenannten Martingalansatzes. Um diesen Erwartungswert zu bestimmen, muss ein mehrdimensionales Integrationsproblem berechnet werden. Üblicherweise werden hier Monte Carlo Verfahren verwendet, die den Integralwert durch das Mittel der Funktionswerte an zufällig ausgewählten, gleichverteilten Stützstellen annähern. Bei der Quasi-Monte Carlo Methode hingegen wird die gleiche Mittelung auf bestimmte deterministische Stützstellen angewandt. Diese Verfahren werden detailliert in [Boy77, Gla03, ABG98] erklärt.

Bei der Bewertung von Amerikanischen Basket-Optionen besteht die Schwierigkeit darin, dass sowohl das vorzeitige Ausübungsrecht als auch der Fluch der Dimension berücksichtigt werden müssen. Letzterer lässt den Aufwand mit zunehmender Anzahl an zugrunde liegenden Wertpapieren exponentiell ansteigen. Aus diesem Grunde stellt die Bewertung und optimale Ausübung von Amerikanischen Basket-Optionen ein ausgesprochen herausforderndes Problem in der Optionspreistheorie dar. Trotz neuer Vorstöße bleibt es eines der anspruchsvollsten Probleme im Bereich der Finanznumerik. Die bisher vorgestellten Verfahren, die für die Bewertung von Standard-Optionen oder Europäischen Basket-Optionen verwendet werden, bewältigen jeweils nur eine der beiden Schwierigkeiten. Für die Bewertung von Basket-Optionen gibt es zwar Erweiterungen des Binomialverfahrens ([BEG89, KR91]), das sich im Standard-Fall als effiziente und flexible Methode erweist, allerdings unterliegen diese dem Fluch der Dimension, der deren Anwendung für Optionen mit mehr als drei oder vier Wertpapieren verhindert. Darüber hinaus können sie oft nicht garantieren, dass die Wahrscheinlichkeiten für alle Aufwärts- und Abwärtsprünge im Binomialbaum positiv sind. Heutzutage sind für die Bewertung von Amerikanischen Basket-Optionen folgende numerische Verfahren bekannt, die den Fluch der Dimension zum Teil umgehen: Als Simulationsverfahren sind Monte Carlo Methoden für vorzeitige Ausübung ent-

wickelt worden. Dazu zählen das *Least-Squares Monte Carlo Verfahren* in [LS01] von Longstaff und Schwartz und die *Stochastic Mesh Methode* in [BG97, BG04a] von Broadie und Glasserman. In [RW07] werden von Reisinger und Wittum *PDE-basierte Verfahren* vorgestellt, die die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung mit Finite-Differenzen-Methoden basierend auf Dünnen Gittern lösen. Ein weiterer Ansatz, der in [Kar05] von Kargin vorgestellt wird, basiert auf adaptiver Interpolation und verwendet in mehreren Dimensionen irreguläre Gitter, um den Fluch der Dimension zu umgehen.

In dieser Arbeit stellen wir zur Bewertung von Basket-Optionen ein neues effizientes numerisches Verfahren vor, das nicht dem Fluch der Dimension unterliegt und Optionen mit vorzeitigem Ausübungsrecht bewerten kann. Aus diesem Grunde ist es für die Bewertung von Amerikanischen Basket-Optionen geeignet.

Die Verwendung von Binomialverfahren zur Bewertung von Amerikanischen und vielen anderen komplexen Optionstypen ist aufgrund ihrer Intuitivität, Flexibilität und einfachen Implementierbarkeit weit verbreitet. Wir stellen in dieser Arbeit eine neue mehrdimensionale Erweiterung des Binomialverfahrens vor, die auf dem Dünngitter-Ansatz aus [Smo63] beruht. Dieses Verfahren verwendet spezielle Tensorprodukte von eindimensionalen Binomialbäumen, die aufgrund ihrer Konstruktion nur positive Wahrscheinlichkeiten haben. Dies stellt einen wesentlichen Vorteil im Vergleich zu den Verfahren aus [BEG89, KR91] dar. Ein Dünngitter-Binomialbaum wird konstruiert, indem wir eine bestimmte Kombination von diesen Tensorproduktbäumen verwenden. Auf diese Weise wird der Fluch der Dimension vermieden.

Der wesentliche Unterschied zu der im Binomialmodell aus [BEG89] gewählten Vorgehensweise besteht darin, dass wir keine direkte Approximation der d -dimensionalen Verteilung der zugrunde liegenden Aktienkurse vornehmen, sondern die eindimensionale Verteilung des Wiener-Prozesses durch einen Binomialbaum approximieren, den wir als W -Baum bezeichnen. Die Erweiterung auf d Dimensionen gelingt uns durch Tensorproduktbildung von eindimensionalen W -Bäumen. Den d -dimensionalen S -Baum, welcher die d -dimensionale Verteilung der zugrunde liegenden Aktienkurse approximiert, erhalten wir dann durch anschließende Transformation. Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich als Produkt der eindimensionalen Wahrscheinlichkeiten. Im Falle von nur einem zugrunde liegenden Wertpapier entspricht unser Produktbinomialverfahren dem eindimensionalen Binomialverfahren nach Jarrow und Rudd aus [JR83]. Für die Dünngitter-Binomialmethode verwenden wir spezielle Produktbinomialbäume, deren Optionspreise wir über die Kombinationstechnik aus der Theorie der Dünnen Gitter ([GSZ92]) kombinieren.

Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass unser Verfahren sowohl den Fluch der Dimension vermeiden als auch das vorzeitige Ausübungsrecht abbilden und somit für die Bewertung von Amerikanischen Basket-Optionen mit acht oder mehr zugrunde liegenden Wertpapieren verwendet werden kann. Die Konvergenzeigenschaften hängen insbesondere von der Glattheit der Auszahlungsfunktion ab.

Wir fassen an dieser Stelle die eigenen Beiträge in dieser Arbeit zusammen.

- Vergleich der Konvergenzeigenschaften verschiedener eindimensionaler Binomialverfahren durch numerische Experimente

- Entwicklung einer neuen mehrdimensionalen Erweiterung des Binomialverfahrens, basierend auf Tensorproduktbildung von eindimensionalen Bäumen
- Konstruktion der neuen Dünngitter-Binomialmethode mit Hilfe von anisotropen Binomialbäumen und der Kombinationstechnik aus dem Dünngitter-Ansatz
- Numerische Experimente zur Analyse der Konvergenzeigenschaften der neuen Verfahren
- Anwendung der neuen Verfahren auf die Bewertung von Basket-Optionen

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert: Wir beginnen in *Kapitel 1* mit den Grundlagen der Optionspreistheorie. In Abschnitt 1.1 werden zunächst die verschiedenen Optionstypen eingeführt. Dabei unterscheiden wir zwischen Plain Vanilla oder Basket-, Call- oder Put- und Europäischen oder Amerikanischen Optionen. In Abschnitt 1.2 erläutern wir die wesentlichen Grundzüge der Optionsbewertung. Es wird veranschaulicht, wie Optionen zur Risikoabsicherung oder zur Spekulation verwendet werden können. Wir führen das Prinzip eines arbitragefreien Marktes ein und leiten daraus erste Strukturaussagen wie den Satz von Merton und die sogenannte Put-Call-Parität her. In Abschnitt 1.3 wird das Black-Scholes-Modell behandelt. Unter den Modellannahmen, zu denen im Wesentlichen die Annahmen eines arbitragefreien Marktes und einer geometrischen Brownschen Bewegung als Differentialgleichung für den Aktienkurs zählen, wird die Black-Scholes-Gleichung hergeleitet, die den fairen Preis einer Option bestimmt und deren analytische Lösung durch die Black-Scholes-Formel gegeben ist. Schließlich stellen wir in Abschnitt 1.4 das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell vor, das für die Bewertung von Basket-Optionen benötigt wird.

In *Kapitel 2* beschäftigen wir uns mit den in der Literatur bekannten Binomialverfahren. Dabei erklären wir zunächst in Abschnitt 2.1 die Konstruktion von Binomialbäumen, den Ablauf der eindimensionalen Methode sowie deren Implementierung und die Bestimmung der benötigten Parameter. Anschließend stellen wir in Abschnitt 2.2 die verschiedenen eindimensionalen Binomialmodelle CRR, JR, TN, ZA und LR mit ihren Charakteristika vor, bevor wir uns in Abschnitt 2.3 auf die bekannte d -dimensionale Erweiterung des Binomialverfahrens konzentrieren, das sogenannte BEG-Modell. Hierfür erläutern wir ausführlich die Konstruktion, die Bestimmung der Parameter und die algorithmische Umsetzung. Schließlich beschäftigen wir uns in Abschnitt 2.4 mit der Konvergenz des Binomialmodells gegen das Black-Scholes-Modell sowohl für die vorgestellten eindimensionalen Modelle als auch für das BEG-Modell. Zuletzt wird in Abschnitt 2.5 ein Einblick in Trinomial- und Multinomialverfahren gegeben, die als Erweiterung der Binomialverfahren verwendet werden können.

In *Kapitel 3* stellen wir das neu entwickelte Dünngitter-Binomialverfahren vor. Dazu führen wir zunächst in Abschnitt 3.1 einige Grundlagen und Notationen ein. Im Anschluss daran wird in Abschnitt 3.2 das Produktbinomialverfahren behandelt, bei dem die mehrdimensionalen Binomialbäume als Tensorprodukte von eindimensionalen Bäumen entstehen. An dieser Stelle erklären wir detailliert die Konstruktion der Produktbäume sowie den Algorithmus des Verfahrens und beschäftigen uns mit dem Konvergenzverhalten der Methode. Im folgenden

Abschnitt 3.3 werden die Dünngitter-Binomialbäume vorgestellt, die auf den Produktbinomialbäumen basieren. Dazu erläutern wir zunächst die Konstruktion von anisotropen Bäumen, die wir für die Kombinationstechnik benötigen. Mit Hilfe dieser Technik entsteht ein Dünngitter-Binomialbaum durch eine bestimmte Kombination von isotropen und anisotropen Tensorproduktbäumen. Schließlich behandeln wir die Konvergenz dieses Verfahrens, bevor wir es algorithmisch darstellen.

In *Kapitel 4* stellen wir dann die numerischen Ergebnisse vor. In Abschnitt 4.1 beginnen wir mit einigen Sensitivitätsanalysen für Plain Vanilla und Basket-Optionen. Wir vergleichen in Abschnitt 4.2 die fünf verschiedenen eindimensionalen Binomialmodelle für Europäische und Amerikanische Optionen. Dabei untersuchen wir insbesondere das LR-Modell auf verbesserte Konvergenzeigenschaften gegenüber den anderen Modellen. In Abschnitt 4.3 analysieren wir das Konvergenzverhalten des BEG-, Produkt- und Dünngitter-Binomialverfahrens für Europäische Basket-Optionen. Hierbei interessiert uns insbesondere der Einfluss der Glattheit der Auszahlungsfunktion und der Einfluss der Dimension auf die Konvergenzraten. In Abschnitt 4.4 wenden wir die drei mehrdimensionalen Binomialverfahren auf die Bewertung von Power Baskets an, wobei wir insbesondere die Auswirkungen des vorzeitigen Ausübungsrechts untersuchen.

In *Kapitel 5* fassen wir die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal zusammen und geben einen Ausblick auf weitere interessante Fragestellungen.

Danksagung: An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere gilt mein Dank Prof. Dr. Michael Griebel für die Überlassung des Themas, die gute Betreuung und die hervorragenden Arbeitsbedingungen am Institut. Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Rolf Krause für die Übernahme des Zweitgutachtens und die Einführung in das interessante Gebiet der numerischen Mathematik.

Ganz herzlich bedanken möchte ich mich bei Priv.-Doz. Dr. Thomas Gerstner und Markus Holtz für die vorbildliche Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit. Beide standen mir stets mit gutem Rat zur Seite und leisteten viele hilfreiche Ideen, die sehr zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Letzterem danke ich außerdem für die vielen konstruktiven Anregungen bei der Durchsicht der Arbeit.

Des Weiteren möchte ich mich bei Stefanie Siebert und Holger Roßmeier für ihre Hilfe und die vielen aufmerksam gelesenen Seiten bedanken. Ich danke auch Jutta Adelsberger für ihre zahlreichen Tipps und Hilfestellungen im Umgang mit L^AT_EX.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern für all ihre Unterstützung und ihr Vertrauen. Meinem Vater danke ich außerdem für das sorgfältige Korrekturlesen der Arbeit.

Kapitel 1

Optionen und ihre Bewertung

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundlagen der Optionspreistheorie eingeführt, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit verwenden wollen. Dazu stellen wir verschiedene Optionstypen mit ihren Charakteristika und Anwendungen vor. Des Weiteren werden die wesentlichen Motive für den Handel mit Optionen erläutert sowie die zugrunde liegenden Modellannahmen erklärt. Wir verwenden in diesem Kapitel hauptsächlich [Hul06, Hol04].

1.1 Optionstypen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Einführung der verschiedenen Optionstypen. Sie umfasst zunächst Standard-Optionen und im Anschluss daran die verschiedenen Formen von Basket-Optionen, denen im weiteren Verlauf dieser Arbeit unser besonderes Interesse gelten wird.

1.1.1 Standard-Optionen

Definition 1.1.1 [PLAIN VANILLA OPTION]

Eine Plain Vanilla Option (oder auch Standard-Option) beinhaltet das Recht, aber nicht die Pflicht, eine bestimmte Menge an zugrunde liegenden Wertpapieren, den sogenannten Basiswert, zu einem festen Preis K , dem Ausübungspreis, innerhalb oder erst am Ende einer gewissen Laufzeit zu kaufen oder zu verkaufen.

Durch den Kauf einer Option kommt ein Vertrag zustande, vor dessen Abschluss der Fälligkeitszeitpunkt T und der Ausübungspreis K festgelegt werden müssen. Den aktuellen Wert einer solchen Option bezeichnen wir mit V . Er ist abhängig vom momentanen Zeitpunkt $t \leq T$ und vom Kurs des Basiswertes $S(t)$.

Optionen werden neben anderen Finanzinstrumenten auch als Derivate bezeichnet, weil ihr Wert vom Kurs des Basiswertes abhängt. Typischerweise werden sie für Aktien angeboten, es stehen aber auch Aktienindizes, Währungen und Rohstoffe sowie das Wetter oder Nahrungsmittel und sogar andere Optionen als Basiswert zur Verfügung. Im weiteren Verlauf wollen wir annehmen, dass sich der Basiswert aus Aktien zusammensetzt, für die während der Laufzeit der Option keine Dividenden gezahlt werden.

Im Folgenden führen wir verschiedene Optionstypen ein, die man aufgrund ihrer Ausübungsmöglichkeiten unterscheidet.

Definition 1.1.2 [CALL-/PUT-OPTION]

Erwirbt der Käufer einer Option das Recht, den Basiswert zu kaufen, spricht man von einer Call-Option (oder kurz Call). Das Recht zum Verkauf bezeichnet man als Put-Option (oder kurz Put).

Definition 1.1.3 [EUROPÄISCHE OPTION]

Eine Option, die nur zum Fälligkeitszeitpunkt ausgeübt werden darf, bezeichnet man als Europäische Option.

Definition 1.1.4 [AMERIKANISCHE OPTION]

Eine Option, die ihrem Käufer das Recht bietet, während der Laufzeit einmalig ausgeübt zu werden, heißt Amerikanische Option.

Als nächstes wollen wir uns mit dem Wert einer Option zum Fälligkeitszeitpunkt T beschäftigen. Dazu betrachten wir eine Europäische Call-Option. Der Besitzer wird zum Zeitpunkt T nur dann von seinem Recht der Ausübung Gebrauch machen, wenn er einen Gewinn erzielen kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn $K < S(T)$. Durch Ausüben der Option erhält der Besitzer den Basiswert also zu einem günstigeren Preis als dem zu dieser Zeit gültigen Kurs und erzielt damit einen Gewinn in Höhe von $S(T) - K$. Im umgekehrten Falle $K > S(T)$ übt er die Option nicht aus, weil er den Basiswert günstiger zum aktuellen Marktpreis $S(T)$ kaufen kann. Die Option ist daher wertlos und hat den Wert $V_C(S, T) = 0$.

Der Wert $V_C(S, T)$ einer Call-Option lässt sich angeben durch

$$V_C(S, T) = \begin{cases} S(T) - K, & \text{falls } S(T) > K \quad (\text{Ausüben der Option}) \\ 0, & \text{falls } S(T) < K \quad (\text{Verfall der Option}) \end{cases}$$

bzw.

$$V_C(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\} =: (S(T) - K)^+ =: \mathcal{H}_C(S). \quad (1.1.1)$$

Der Käufer einer Put-Option erwirbt das Recht, den zugrunde liegenden Basiswert zum Preis K zu verkaufen. Hier lässt sich analog zu oben argumentieren: Der Besitzer wird von seinem Recht Gebrauch machen, wenn zum Fälligkeitszeitpunkt $K > S(T)$ gilt. Anderenfalls wird er die Option verfallen lassen, d. h.

$$V_P(S, T) = \begin{cases} K - S(T), & \text{falls } S(T) < K \quad (\text{Ausüben der Option}) \\ 0, & \text{falls } S(T) > K \quad (\text{Verfall der Option}) \end{cases}$$

bzw.

$$V_P(S, T) = \max\{K - S(T), 0\} =: (K - S(T))^+ =: \mathcal{H}_P(S). \quad (1.1.2)$$

Die Funktionen $\mathcal{H}_C(S)$ und $\mathcal{H}_P(S)$ werden als *Auszahlungsfunktionen* oder *Payoff-Funktionen* bezeichnet. Ihr Wert ist der *innere Wert* der Option. In Abbildung 1.1 sind diese vergleichend für eine Call- und eine Put-Option jeweils mit Ausübungspreis $K = 50$ dargestellt.

Definition 1.1.5 [IN-THE-MONEY/OUT-OF-THE-MONEY/AT-THE-MONEY]

Eine Option, deren innerer Wert größer als Null ist, wird als *in-the-money* bezeichnet. *Out-of-the-money* Optionen haben einen inneren Wert von Null. Die Bezeichnung *at-the-money* Option wird verwendet, wenn der Preis des Basiswertes mit dem Ausübungspreis übereinstimmt.

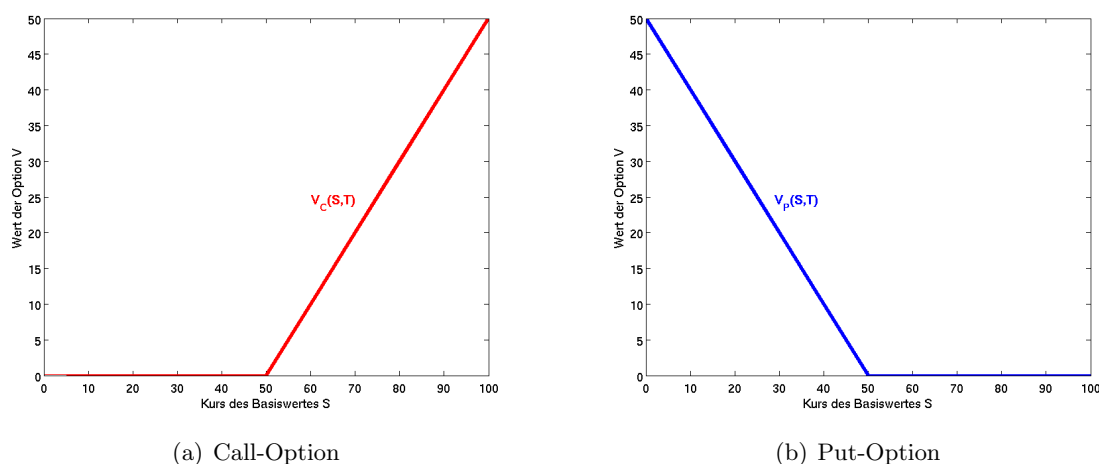


Abb. 1.1: Auszahlungsfunktionen zum Fälligkeitszeitpunkt T für den Ausübungspreis $K = 50$

1.1.2 Basket-Optionen

Neben den oben definierten Standard-Optionen gibt es noch eine Vielzahl weiterer Formen und Typen von Optionen, sogenannte *Exotische Optionen*, die im Allgemeinen kompliziertere Auszahlungsstrukturen besitzen. Sie unterteilen sich in Multiasset-Optionen und pfadabhängige Optionen, wobei die Auszahlung letzterer nicht nur vom Wert des zugrunde liegenden Wertpapiers zum Zeitpunkt der Ausübung abhängt, sondern vom gesamten Kursverlauf. Beispiele hierfür sind *Asiatische Optionen* oder *Barrier-Optionen*, auf die wir an dieser Stelle aber nicht detaillierter eingehen wollen, sondern auf [Hul06] verweisen. Neben Europäischen und Amerikanischen Optionen gibt es noch sogenannte *Bermudische Optionen*, die nur an vorher festgelegten Zeitpunkten (z. B. wöchentlich, monatlich) vor Fälligkeit ausgeübt werden dürfen.

An dieser Stelle sei der Vollständigkeit halber noch darauf hingewiesen, dass die Bezeichnungen „Europäisch“, „Amerikanisch“, „Asiatisch“ und „Bermudisch“ keine geographische Bedeutung haben; alle Typen von Optionen werden an allen weltweiten Finanzmärkten gehandelt.

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf die Bewertung von Europäischen und Amerikanischen Multiasset-Optionen.

Definition 1.1.6 [MULTIASSET-OPTION]

Hängt die Auszahlung einer Option von mehreren Wertpapieren S_1, \dots, S_d ab, spricht man von einer Multiasset-Option oder auch Basket-Option. Den Wert des Baskets zur Zeit $t \leq T$ bezeichnen wir mit $B(t)$. Ein Basket von d Wertpapieren kann auf verschiedene Weisen definiert werden, z. B.

$$B(t) := \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_i(t) \quad (\text{Arithmetisches Mittel}), \quad (1.1.3)$$

$$B(t) := \left(\prod_{i=1}^d S_i(t) \right)^{\frac{1}{d}} \quad (\text{Geometrisches Mittel}), \quad (1.1.4)$$

$$B(t) := \max_{i=1, \dots, d} \{S_i(t)\} \quad (\text{Maximum}), \quad (1.1.5)$$

$$B(t) := \min_{i=1, \dots, d} \{S_i(t)\} \quad (\text{Minimum}), \quad (1.1.6)$$

wobei $S_i(t)$ für $i = 1, \dots, d$ den Kurs des i -ten Wertpapiers zum Zeitpunkt $t \leq T$ bezeichnet.

Für den Fall mehrerer zugrunde liegender Wertpapiere können wir analog zum Vorgehen in Abschnitt 1.1.1 den Wert einer Option zum Fälligkeitszeitpunkt T bestimmen. Die Payoff-Funktion einer Call-Option für $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)^T$ ist gegeben durch

$$V_C(\mathbf{S}, T) = (B(T) - K)^+ = \mathcal{H}_C(B). \quad (1.1.7)$$

Analog hat die Auszahlungsfunktion einer Put-Option die Form

$$V_P(\mathbf{S}, T) = (K - B(T))^+ = \mathcal{H}_P(B). \quad (1.1.8)$$

1.2 Grundlagen der Optionsbewertung

Anhand von Standardoptionen stellen wir in diesem Abschnitt einige wichtige Grundlagen der Optionsbewertung dar. Diese gelten in ähnlicher Form auch für komplexere Optionstypen wie z. B. Basket-Optionen.

1.2.1 Motive für den Handel mit Optionen

Für den Handel mit Optionen gibt es im Wesentlichen zwei Hauptgründe. Der eine besteht in der Absicherung (*Hedging*) gegen negative Kursentwicklungen des zugrunde liegenden Basiswertes, um z. B. bestehende Wertpapierpositionen zu sichern oder um den Verlust einer neuen Investition zu vermeiden. Dazu bietet sich der Kauf von Put-Optionen an, da diese auf jeden Fall einen gewissen Verkaufspreis über einen bestimmten Zeitraum sicherstellen.

Auf der anderen Seite können Optionen dazu dienen, spekulative Strategien zu verfolgen. So können bei relativ geringer Anfangsinvestition aufgrund von günstiger Entwicklung des Basiswertes sehr hohe Gewinne erzielt werden. Allerdings ist es dafür erforderlich, eine höhere Risikotoleranz zu haben. Zur Spekulation bieten sich dementsprechend Call-Optionen an, die das Risiko steigender Kurse absichern und somit Gewinnerzielung ermöglichen, bei fallenden Kursen hingegen den Verlust der Anfangsinvestition, also den Kaufpreis der Option, zur Folge haben.

Definition 1.2.1 [HEDGING]

Der Begriff Hedgegeschäft (oder kurz Hedging) bezeichnet ein Finanzgeschäft zur Absicherung einer Transaktion gegen bestimmte Risiken. Dies können beispielsweise Aktienkursschwankungen, höhere Rohstoffpreise oder auch Wettereinbrüche wie schwerer Sturm oder Hagel sein. Zu diesem Zwecke wird eine weitere Transaktion eingegangen, die mit der risikobehafteten gekoppelt ist, üblicherweise in Form eines Termingeschäftes.

Zur Verdeutlichung wollen wir folgendes Beispiel aus [Hol04] betrachten.

Beispiel 1.2.2: Zum Zeitpunkt t kauft ein Investor eine Aktie mit aktuellem Wert $S(t)$, die er zum Zeitpunkt $T > t$ zu einem bestimmten Preis K mindestens wieder veräußern möchte. Er will sich also gegen Aktienkurse $S(T) < K$ absichern. Dazu investiert er in eine Put-Option mit Basiswert S , Fälligkeitszeitpunkt T , Ausübungspreis K und Wert $V(S, t)$. Zum Zeitpunkt $t = T$ ist dann der Wert $P = P(S, V, t)$ seines Portfolios, bestehend aus der Aktie und der Verkaufsoption, gegeben durch

$$P(S, V, T) = S(T) + V(S, T) = S(T) + (K - S(T))^+ = \max\{S(T), K\},$$

d. h. die gewünschte untere Schranke K wird in jedem Fall überschritten.

Dieses Portfolio bezeichnet man als Protective Put und die Kosten $V(S, t)$ als Hedgekosten.

Definition 1.2.3 [SPEKULATION]

Unter Spekulation versteht man die gewinnorientierte Ausnutzung erwarteter Preisänderungen. Dabei erhöht der Spekulant im Gegensatz zum Hedger bewusst sein eigenes Risiko.

Beispiel 1.2.4: Angenommen eine Aktie hat zum Zeitpunkt t den Kurs $S(t) = 100$. An der Börse wird eine Europäische Call-Option auf diese Aktie mit Fälligkeitszeitpunkt T und Ausübungspreis $K = 120$ zum Preis von $V(S, t) = 25$ gehandelt. Ein Investor spekuliert darauf, dass sich der Basiswert über den Zeitraum $T - t$ verdoppeln wird. Behält er Recht und beträgt der Aktienkurs zum Endpunkt T $S(T) = 200$, dann liefert die Option die Auszahlung

$$V(S, T) = (S(T) - K)^+ = 80,$$

er erzielt also einen Gewinn in Höhe von 80. Tritt seine Erwartung allerdings nicht ein, so dass $S(T) < K$, dann wird er sein Ausübungsrecht verfallen lassen und somit seine Anfangsinvestition in Höhe von $V(S, t) = 25$ verlieren.

1.2.2 Arbitragefreiheit

Wie bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt, hängt der Optionspreis V vom momentanen Zeitpunkt $t \leq T$, vom Kurs des Basiswertes $S(t)$ und vom Ausübungspreis K ab. Daher lautet die exakte Bezeichnung $V = V(K, S(t), t, T)$. Sind Missverständnisse ausgeschlossen, verzichtet man auf das Argument t und die als fest gesehenen Parameter K und T . In diesem Falle schreiben wir $V = V(S, t)$. Neben diesen Parametern sind auch noch der risikofreie Zinssatz r und die Volatilität σ , d. h. die Schwankungsbreite des Kurses, für den Wert einer Option von großer Bedeutung.

Wir fassen die Bezeichnungen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit im Zusammenhang mit Optionen verwendet werden, noch einmal kurz in Tabelle 1.1 zusammen. Zusätzlich wollen wir durch Verwendung von unteren Indizes C und P Call- und Put-Optionen unterscheiden, falls dies nicht aus dem Kontext ersichtlich ist.

Bezeichnung	Bedeutung
$T \in \mathbb{R}^+$	Fälligkeitszeitpunkt, Laufzeit der Option
$S(t) \in \mathbb{R}^+$	Preis des zugrunde liegenden Basiswertes zum Zeitpunkt $t \leq T$
$K \in \mathbb{R}^+$	Ausübungspreis der Option
$V(S, t) \in \mathbb{R}^+$	Wert der Option zum Zeitpunkt t bei aktuellem Kurs $S = S(t)$
$r \in \mathbb{R}^+$	Risikoloser Zinssatz
$\sigma \in \mathbb{R}^+$	Volatilität

Tabelle 1.1: Bezeichnungen im Zusammenhang mit Optionen

Ziel ist es, einen fairen Preis für die Option zum momentanen Zeitpunkt $t = 0$ zu bestimmen, den sogenannten Optionswert oder Optionspreis. Unter dem fairen Preis einer Option verstehen wir den auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Basis berechneten angemessenen Preis unter Einbeziehung aller preisbeeinflussenden Faktoren. Genauer bedeutet dies, dass der Erwartungswert der Zufallsvariablen „Aktienkurs“ den mittleren Wert beschreibt, also den Preis, den man im Voraus für eine Auszahlung K zu zahlen bereit wäre. Dazu ist es vor allem notwendig, geeignete Modell- und Marktannahmen zu treffen, um eine Option bewerten zu können. Des Weiteren sind numerische Verfahren von entscheidender Bedeutung, da nur in wenigen Fällen eine geschlossene Formel bekannt ist. Aufgrund der Möglichkeit zur frühzeitigen Ausübung lassen sich Amerikanische Optionen im Allgemeinen wesentlich schwieriger bewerten als Europäische, die einzig zum Fälligkeitszeitpunkt T ausgeübt werden können.

Der faire Preis einer Option wird durch die Wahl geeigneter Modell- und Marktannahmen festgelegt. Er sollte nicht mit dem Börsenwert des Derivats verwechselt werden, da letzterer maßgeblich durch Angebot und Nachfrage bestimmt wird. Nichtsdestotrotz stellt er aber eine wichtige Orientierungshilfe sowohl für Käufer als auch für Verkäufer dar.

Eine wesentliche Annahme bei der Bewertung von Finanzderivaten ist der Ausschluss von Arbitragemöglichkeiten.

Definition 1.2.5 [ARBITRAGE]

Arbitrage bezeichnet das Erzielen von risikolosen Gewinnen durch Erkennen und Ausnutzen von räumlichen oder zeitlichen Preisdifferenzen für dasselbe Gut.

Definition 1.2.6 [ARBITRAGEFREIER MARKT]

Unter einem arbitragefreien Markt versteht man einen Finanzmarkt, bei dem keine Arbitragemöglichkeiten bestehen.

Beispiel 1.2.7: Angenommen eine Aktie kostet an der New Yorker Börse 150 \$. An der Frankfurter Börse wird dieselbe Aktie für 105 € gehandelt. Der Wechselkurs beträgt 1.5 \$ pro Euro. Bei gleichzeitigem Kauf der Aktie in New York und Verkauf der Aktie in Frankfurt ergibt sich ein risikofreier Gewinn in Höhe von

$$150\$ - 1.5\$ * 105\text{€} = 7.5\$,$$

wenn Transaktionskosten vernachlässigt werden.

Aus der Annahme eines arbitragefreien Marktes resultiert das Gesetz des einheitlichen Preises, welches besagt, dass alle Finanzderivate mit der selben Auszahlung einen einheitlichen Preis besitzen müssen, wenn sie auf einem arbitragefreien Markt gehandelt werden.

1.2.3 Strukturaussagen

Die meisten Optionen, die an der Börse gehandelt werden, sind vom Amerikanischen Typ. Wie bereits erwähnt, gestaltet sich ihre Bewertung aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechts deutlich schwieriger als die von Europäischen Optionen. Dennoch können wir ihren Wert durch gewisse obere und untere Schranken eingrenzen. Dazu unterscheiden wir im Folgenden die beiden Optionstypen durch obere Indizes am und eur.

Die Möglichkeit, eine Amerikanische Option jederzeit vor dem Fälligkeitszeitpunkt ausüben zu können, impliziert

$$V^{am}(S, t) \geq \mathcal{H}(S) \quad (1.2.1)$$

für alle $S \geq 0$ und $0 \leq t \leq T$, d. h. der Wert einer Amerikanischen Option ist immer mindestens so hoch wie der Wert der Auszahlungsfunktion \mathcal{H} . Anderenfalls wäre es für einen Händler möglich, einen risikolosen Gewinn in Höhe von $\mathcal{H}(S) - V^{am}(S, t) > 0$ zu erwirtschaften, indem er die Option kauft und sofort ausübt. Dies widerspricht aber der Annahme eines arbitragefreien Marktes.

Unter der Annahme, dass keine Möglichkeiten zur Arbitrage bestehen, lassen sich folgende obere und untere Schranken für Europäische und Amerikanische Optionen ohne Dividendenzahlungen bestimmen.

Wertobergrenzen:

- Der Wert einer Europäischen oder Amerikanischen Call-Option kann niemals höher sein als der Wert des zugrunde liegenden Basiswertes, da beide dem Inhaber das Recht geben, den Basiswert zu einem bestimmten Ausübungspreis zu kaufen.

$$V_C^{eur}(S, t) \leq S(t), \quad (1.2.2)$$

$$V_C^{am}(S, t) \leq S(t). \quad (1.2.3)$$

- Eine Europäische oder Amerikanische Put-Option bietet dem Inhaber das Recht, den zugrunde liegenden Basiswert zum Ausübungspreis zu verkaufen. Aus diesem Grunde kann der Wert der Option niemals höher als der Ausübungspreis K sein. Insbesondere gilt für den Wert einer Europäischen Put-Option zum Fälligkeitszeit $V_P^{eur}(S, T) \leq K$. Daher kann er zum heutigen Zeitpunkt nicht größer sein als der Barwert des Ausübungspreises.

$$V_P^{eur}(S, t) \leq K e^{-r(T-t)} \leq K, \quad (1.2.4)$$

$$V_P^{am}(S, t) \leq K. \quad (1.2.5)$$

Wertuntergrenzen:

- Der Wert einer Europäischen Call- oder Put-Option ist immer positiv oder Null, weil schlechtestenfalls Wertlosigkeit der Option vorliegen kann. Daher bildet die Auszahlungsfunktion mit diskontiertem Ausübungspreis die untere Schranke für Europäische Optionen.

$$\left(S(t) - Ke^{-r(T-t)}\right)^+ \leq V_C^{eur}(S, t), \quad (1.2.6)$$

$$\left(Ke^{-r(T-t)} - S(t)\right)^+ \leq V_P^{eur}(S, t). \quad (1.2.7)$$

- Aus dem gleichen Grund wie bei Europäischen Optionen ist auch der Wert einer Amerikanischen Call- oder Put-Option immer positiv oder Null. Hier stellt die Auszahlungsfunktion die untere Schranke dar. Aufgrund des frühzeitigen Ausübungsrechtes wird der Ausübungspreis nicht diskontiert.

$$(S - K)^+ \leq V_C^{am}, \quad (1.2.8)$$

$$(K - S)^+ \leq V_P^{am}. \quad (1.2.9)$$

Im Gegensatz zu Europäischen Optionen räumen Amerikanische Optionen zusätzlich das Recht ein, die Option auch vor dem Fälligkeitszeitpunkt auszuüben. Aus diesem Grunde gilt

$$V^{eur}(S, t) \leq V^{am}(S, t) \quad (1.2.10)$$

für alle $S > 0$ und alle $t \in [0, T]$. Zum Fälligkeitszeitpunkt T ist der Wert einer Amerikanischen Call- oder Put-Option identisch mit dem Wert der entsprechenden Europäischen Option. Darüberhinaus lässt sich zeigen, dass der Preis einer Amerikanischen Kaufoption, deren zugrunde liegendes Wertpapier keine Dividenden auszahlt, während der kompletten Laufzeit mit dem Preis der zugehörigen Europäischen Kaufoption übereinstimmt.

Satz 1.2.8 [MERTON]

Unter der Voraussetzung eines zugrunde liegenden dividendengeschützten Wertpapiers ist es niemals optimal, eine Amerikanische Call-Option frühzeitig auszuüben. Insbesondere gilt

$$V_C^{am}(S, t) = V_C^{eur}(S, t) \quad (1.2.11)$$

für alle $S > 0$ und alle $t \in [0, T]$.

Beweis 1.2.8. Wegen der Strukturaussagen (1.2.1) und (1.2.6) gilt

$$V_C^{am}(S, t) \geq V_C^{eur} \geq \max \left\{ S - Ke^{-r(T-t)}, 0 \right\}. \quad (1.2.12)$$

Es ist - wenn überhaupt - nur dann vorteilhaft eine Call-Option auszuüben, wenn $S(t) > K$. In diesem Fall ergibt sich

$$V_C^{am}(S, t) \geq \max \left\{ S - Ke^{-r(T-t)}, 0 \right\} = S - Ke^{-r(T-t)} > S - K$$

aufgrund von (1.2.12) und $r > 0$. Damit würde bei vorzeitiger Ausübung ein geringerer Gewinn erzielt, als das zugrunde liegende Wertpapier zu diesem Zeitpunkt am Markt wert wäre. Dieser Beweis findet sich auch in [San99]. \square

Für eine Amerikanische Put-Option kann es dagegen optimal sein, von dem frühzeitigen Ausübungsrecht Gebrauch zu machen. Dies verdeutlicht der nachfolgende Satz.

Satz 1.2.9

Für eine Amerikanische Put-Option kann es einen Aktienkurs $S(t) > 0$ geben, so dass vorzeitiges Ausüben der Option zum Zeitpunkt $t < T$ optimal ist.

Beweis 1.2.9. Da der maximale Wert einer Amerikanischen Put-Option zum Fälligkeitszeitpunkt T der Ausübungspreis K ist, wird der Inhaber einer solchen Option spätestens zu dem Zeitpunkt t von seinem vorzeitigen Ausübungsrecht Gebrauch machen, an dem die Auszahlung größer ist als der diskontierte Ausübungspreis K , d. h.

$$K - S(t) > e^{-r(T-t)}K,$$

woraus

$$S(t) < \left(1 - e^{-r(T-t)}\right)K$$

folgt. Somit muss als hinreichende Bedingung für frühzeitiges Ausüben der Put-Option für den Kurs des zugrunde liegenden Basiswertes gelten, dass $S(t) < \left(1 - e^{-r(T-t)}\right)K$.

Dies ist der Beweis aus [Hol04] auf Seite 11. \square

Für Europäische Optionen können wir einen direkten Zusammenhang zwischen einem Call und einem Put herleiten, die sogenannte *Put-Call-Parität*. Mit deren Hilfe reicht es aus, den Preis eines der beiden Optionstypen zu bestimmen, um den anderen Preis daraus zu erhalten.

Satz 1.2.10 [PUT-CALL-PARITÄT]

Für eine Europäische Call-Option und eine Europäische Put-Option auf ein dividendengeschütztes zugrunde liegendes Wertpapier mit gleichem Ausübungspreis K und gleicher Laufzeit T gilt zum Zeitpunkt t

$$S(t) + V_P^{eur}(S, t) - V_C^{eur}(S, t) = Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.2.13)$$

Beweis 1.2.10. Betrachten wir folgende zwei Portfolios:

- Portfolio Π_C : Eine Europäische Call-Option und ein Geldbetrag in Höhe von $Ke^{-r(T-t)}$,
- Portfolio Π_P : Eine Europäische Put-Option und eine Aktie.

Beide Portfolios liefern zum Fälligkeitszeitpunkt T mit Hilfe von (1.1.1) und (1.1.2) die Auszahlung

$$\Pi_C = \Pi_P = \max\{S(T), K\}.$$

Da es sich um Europäische Optionen handelt, die nicht vor dem Ende der Laufzeit ausgeübt werden können, müssen beide Portfolios zum heutigen Zeitpunkt nach dem Gesetz des einheitlichen Preises einen identischen Wert haben. Somit gilt Gleichung (1.2.13).

Dieser Beweis findet sich in [Hul06]. \square

Unter der Annahme, dass keine Dividendenzahlungen stattfinden, lässt sich für Amerikanische Optionen dagegen nur

$$S(t) - K \leq V_C^{am}(S, t) - V_P^{am}(S, t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)} \quad (1.2.14)$$

zeigen.

1.3 Black-Scholes-Modell

Das bekannteste und meist verwendete Modell zur Bewertung von Optionen ist das sogenannte Black-Scholes-Modell, welches wir im Folgenden einführen und in dieser Arbeit verwenden wollen.

Das 1973 von F. Black und M. Scholes veröffentlichte *Black-Scholes-Modell* aus [BS73] zur Bewertung von Aktienoptionen stellt einen Meilenstein in der Finanzwirtschaft dar, da es das grundlegende theoretische Fundament der Optionspreistheorie bildet. Mit diesem Modell gelang es erstmals, einen fairen Preis für Aktienoptionen ohne Dividendenzahlungen zu bestimmen, wodurch auch nachhaltig die Bewertung von Optionsverträgen im internationalen Finanzhandel entscheidend beeinflusst wurde. An der Entwicklung des Modells war ebenfalls R. Merton beteiligt, der jedoch einen separaten Artikel veröffentlichte. Aus diesem Grunde ist auch der Begriff *Black-Scholes-Merton-Modell* gebräuchlich. Im Jahre 1997 erhielt R. Merton zusammen mit M. Scholes den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für dieses Modell, F. Black war zu diesem Zeitpunkt bereits verstorben.

1.3.1 Marktannahmen

Im Black-Scholes-Modell werden folgende idealisierende Annahmen über den Markt getroffen, die wir auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit voraussetzen.

1. Es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern.
2. Für die Aktien werden keine Dividenden gezahlt.
3. Der risikolose Zinssatz r ist konstant über die Zeit.
4. Alle Transaktionen sind zu jeder Zeit in beliebigem Umfang ohne Rückwirkung auf die Kursentwicklung möglich. Dabei sind Leerverkäufe erlaubt.
5. Alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.
6. Alle Parteien haben Zugang zu allen Informationen.
7. Es gibt keine risikolosen Arbitragemöglichkeiten.
8. Der Aktienkurs $S(t)$ folgt der linearen stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (1.3.1)$$

mit konstanten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Dabei bezeichnet $W(t) \sim N(0, t)$ einen eindimensionalen Wiener-Prozess bzw. eine Standard Brownsche Bewegung, wobei $N(0, t)$ die Gauß'sche Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz t ist. Der Basiswert wird also durch eine sogenannte *geometrische Brownsche Bewegung* modelliert. Man bezeichnet den Parameter μ als Drift und den Parameter σ als Volatilität des Aktienkursprozesses. Für die grundlegenden Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie verweisen wir an dieser Stelle auf [Bau01].

Von zentraler Bedeutung für das Black-Scholes-Modell sind die beiden letzten Annahmen. Einige der anderen Punkte können leicht verallgemeinert werden, z. B. können Dividendenzahlungen berücksichtigt oder zeitabhängige Drift- und Zinsraten verwendet werden. Es ist auch möglich, Transaktionskosten zu berücksichtigen oder stochastische Zinsraten bzw. Volatilitäten zuzulassen, allerdings führen diese Erweiterungen im Allgemeinen zu komplizierteren Modellen. Beispiele hierfür sind lokale Volatilitäten oder stochastische Volatilitäten. Weitere gebräuchliche Modelle sind sogenannte Sprung-Diffusions-Modelle, die alle Aktienkursänderungen durch Sprünge beschreiben. Details zu diesen Verallgemeinerungen und Alternativen finden sich z. B. in [Hul06, BR94, SP99].

Mit Hilfe des Lemmas von Itô können wir die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.3.1) bestimmen und erhalten

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}. \quad (1.3.2)$$

Des Weiteren lässt sich zeigen, dass sich aus den oben getroffenen Marktannahmen das *Prinzip der risikoneutralen Bewertung* folgern lässt. Dieses geht von einer risikoneutralen Welt aus, in der alle Anleger frei von Risikopräferenzen sind. Für die Aktienkursmodellierung bedeutet dies, dass die erwartete Rendite auf alle Wertpapiere dem risikolosen Zinssatz r entspricht. Wir können also die Drift μ durch r ersetzen, d. h.

$$S(t) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}. \quad (1.3.3)$$

Teilt man Gleichung (1.3.3) durch $S(0)$ und nimmt auf beiden Seiten den Logarithmus, erhält man

$$\ln(S(t)/S(0)) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t). \quad (1.3.4)$$

Dies zeigt, dass der logarithmierte normierte Aktienkurs $\ln(S(t)/S(0))$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ und Varianz $\sigma^2 t$. Unter Verwendung von $E[e^{\sigma W(t)}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ gilt für den Erwartungswert und die Varianz von S zum Zeitpunkt t

$$E[S(t)] = S(0)e^{rt} \quad (1.3.5)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(t)] &= E[S^2(t)] - (E[S(t)])^2 \\ &= S^2(0)e^{(2r + \sigma^2)t} - (S(0)e^{rt})^2 = S^2(0)e^{2rt} (e^{\sigma^2 t} - 1). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

1.3.2 Black-Scholes-Formel

Unter den in Abschnitt 1.3.1 getroffenen Marktannahmen lässt sich zeigen, dass der Optionspreis $V(S, t)$ für $S \geq 0$ und $0 \leq t \leq T$ die berühmte *Black-Scholes-Gleichung*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV \quad (1.3.7)$$

erfüllt. Bei der Herleitung werden keinerlei Annahmen über die Art des Derivats gemacht. Aus diesem Grunde kann die Black-Scholes-Gleichung verwendet werden, um den Preis beliebiger Finanzderivate zu berechnen, sofern der Basiswert einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt und der Preis nur eine Funktion des aktuellen Kurses und der Zeit ist, also $V = V(S, t)$. Entsprechend den unterschiedlichen Derivaten, die mit Hilfe von S als zugrunde liegender Variablen definiert werden können, hat die Black-Scholes-Gleichung zahlreiche Lösungen. Eine eindeutige Lösung für eine bestimmte Option hängt dann von den jeweiligen Anfangs- und Randbedingungen bezüglich des Basiswertkurses ab. Aus diesem Grund müssen wir die Black-Scholes-Gleichung über entsprechende Anfangs- und Randbedingungen an die Art der Option anpassen. Die Anfangsbedingung entspricht dabei dem Wert der Option zum Fälligkeitszeitpunkt $t = T$, für die Randbedingungen müssen wir den Wert des Derivats für $S = 0$ und $S \rightarrow \infty$ bestimmen.

Für den Standardfall einer Europäischen Call- bzw. Put-Option gilt nach (1.1.1) bzw. (1.1.2) für die Anfangsbedingungen

$$V_C(S, T) = \mathcal{H}_C(S) \quad \text{bzw.} \quad V_P(S, T) = \mathcal{H}_P(S). \quad (1.3.8)$$

Am Rand $S = 0$ (im Falle einer Call-Option) bzw. $S \rightarrow \infty$ (im Falle einer Put-Option) ist die Option wegen (1.1.1) bzw. (1.1.2) und den Eigenschaften einer geometrischen Brownschen Bewegung wertlos, d. h. für alle $t < T$ gilt

$$V_C(S, t) = 0 \quad \text{für } S = 0 \quad \text{bzw.} \quad V_P(S, t) = 0 \quad \text{für } S \rightarrow \infty. \quad (1.3.9)$$

Die zweite Randbedingung für $S \rightarrow \infty$ (im Falle einer Call-Option) bzw. für $S = 0$ (im Falle einer Put-Option) erhält man jeweils über die Put-Call-Parität 1.2.10, das bedeutet

$$V_C(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)} \quad \text{für } S \rightarrow \infty \quad \text{bzw.} \quad V_P(S, t) = Ke^{-r(T-t)} - S \quad \text{für } S = 0. \quad (1.3.10)$$

Zusammenfassend können wir demnach den Wert einer Europäischen Call-Option durch folgendes Randwertproblem eindeutig charakterisieren.

Satz 1.3.1 [BEWERTUNG EUROPÄISCHER CALL-OPTIONEN]

Der Wert $V = V(S, t)$ einer Europäischen Call-Option erfüllt für $S \geq 0$ und $0 \leq t \leq T$ die Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

mit der Anfangsbedingung

$$V(S, T) = (S(T) - K)^+$$

und den Randdaten

$$V(S, t) = 0 \text{ für } S = 0 \quad \text{und} \quad V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)} \text{ für } S \rightarrow \infty.$$

Analog gilt folgender Satz für den Wert einer Europäischen Put-Option.

Satz 1.3.2 [BEWERTUNG EUROPÄISCHER PUT-OPTIONEN]

Der Wert einer Europäischen Put-Option folgt für $S \geq 0$ und $0 \leq t \leq T$ der Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

mit den Anfangsdaten

$$V(S, T) = (K - S(T))^+$$

und den Randdaten

$$V(S, t) = Ke^{-r(T-t)} - S \text{ für } S = 0 \quad \text{und} \quad V(S, t) = 0 \text{ für } S \rightarrow \infty.$$

Eine detaillierte Herleitung der Black-Scholes-Formel und der Anfangs- und Randbedingungen für Europäische Optionen findet man z. B. in [Sey02], Abschnitt 4.4 und Anhang A3.

Für das Randwertproblem aus Satz 1.3.1 bzw. 1.3.2 gibt es folgende analytische Lösungsformel.

Satz 1.3.3 [BLACK-SCHOLES-FORMEL FÜR EUROPÄISCHE CALL-OPTIONEN]

Der Wert $V = V(S, t)$ einer Europäischen Call-Option lässt sich angeben durch

$$V(S, t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{1.3.11}$$

mit

$$d_1 := \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \in \mathbb{R} \tag{1.3.12}$$

und

$$d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \in \mathbb{R}. \tag{1.3.13}$$

Dabei bezeichnet

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \tag{1.3.14}$$

die Verteilungsfunktion der kumulativen Standardnormalverteilung, also die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallszahl kleiner oder gleich x ist.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Black-Scholes-Formel herzuleiten. Eine Möglichkeit besteht in der Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung (1.3.7) in Verbindung mit der Anfangsbedingung (1.3.8) und den Randbedingungen (1.3.9) und (1.3.10). Ein anderer Ansatz, der Martingalansatz, beruht auf der Verwendung des Prinzips der risikoneutralen Bewertung. Er besagt, dass der faire Preis einer Europäischen Option der mit dem risikolosen Zinssatz diskontierte Erwartungswert der Payoff-Funktion in einer risikoneutralen Welt ist. Genauer bedeutet dies, dass

$$V(S, 0) = e^{-rT} E^* [V(S, T)],$$

wobei E^* den Erwartungswert in einer risikoneutralen Welt bezeichnet. Im Detail wird letzterer Ansatz in [GGH08] verfolgt.

Die Black-Scholes-Formel aus Satz 1.3.3 gilt in der angegebenen Form nur für Europäische Call-Optionen. Mit Hilfe der Put-Call-Parität 1.2.10 erhält man den Wert einer Europäischen Put-Option jedoch direkt aus dem Wert der entsprechenden Call-Option.

Satz 1.3.4 [BLACK-SCHOLES-FORMEL FÜR EUROPÄISCHE PUT-OPTIONEN]

Die Black-Scholes-Formel für den Wert $V = V(S, t)$ einer Europäischen Put-Option lautet

$$V(S, t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \quad (1.3.15)$$

mit $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ und $\Phi(x) \in \mathbb{R}$ wie in Satz 1.3.3.

1.4 Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt wollen wir analog zu Abschnitt 1.3 die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung für eine Option mit d zugrunde liegenden Aktien herleiten. Dazu behalten wir die unter Abschnitt 1.3.1 getroffenen Marktannahmen bei; lediglich die letzte Annahme variieren wir - wie in [GHK07] vorgestellt - in der Form, dass der Aktienkurs jeder zugrunde liegenden Aktie $S_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, folgender Differentialgleichung folgt

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} S_i dW_j(t), \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.4.1)$$

wobei μ_i die konstante Drift von Aktie i , σ_{ij} den (i, j) -ten Eintrag der $d \times d$ Volatilitätsmatrix σ und $W_j(t)$ den zugrunde liegenden Wiener-Prozess bezeichnet. Dabei erhält man die Volatilitätsmatrix σ durch eine Cholesky-Zerlegung der symmetrisch, positiv definiten Korrelationsmatrix $\Sigma = \sigma\sigma^\top$. Die Korrelationsmatrix ist definiert als

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1d}\sigma_1\sigma_d \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2d}\sigma_2\sigma_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d1}\sigma_d\sigma_1 & \rho_{d2}\sigma_d\sigma_2 & \dots & \sigma_d^2 \end{pmatrix}, \quad (1.4.2)$$

wobei $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, \dots, d$, den Korrelationskoeffizient zwischen dem i -ten und j -ten Aktienkurs bezeichnet.

Mit dem Lemma von Itô erhalten wir als Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.4.1)

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_j(t) \right), \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.4.3)$$

Das Prinzip der risikoneutralen Bewertung erlaubt uns wieder, die Drift μ_i durch den risikolosen Zins r zu ersetzen, d. h.

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_j(t) \right), \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.4.4)$$

Unter den getroffenen Marktannahmen können wir die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r \sum_{i=1}^d S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} = rV \quad (1.4.5)$$

herleiten. Dabei bezeichnet $V = V(\mathbf{S}, t)$ den Wert einer Basket-Option basierend auf d Aktien $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)^T$ und ρ_{ij} den Korrelationskoeffizient zwischen Aktie i und j für $1 \leq i < j \leq d$. Eine genaue Herleitung kann in [Lev04], Abschnitt 9.3 nachvollzogen werden.

Kapitel 2

Binomialverfahren

Das in Abschnitt 1.3 und 1.4 vorgestellte Black-Scholes-Modell ist ein kontinuierliches Modell, in dem der Aktienkursverlauf mittels einer geometrischen Brownschen Bewegung modelliert wird. Das Binomialmodell stellt eine diskrete Approximation des Black-Scholes-Modells dar. Dabei wird der kontinuierliche Prozess der geometrischen Brownschen Bewegung ersetzt durch einen diskreten stochastischen Prozess, den Binomialprozess. Hieraus lässt sich dann das Binomialverfahren formulieren.

Aufgrund der Intuitivität, der einfachen Implementierung und der hohen Flexibilität ist das Binomialverfahren eine in der Praxis weit verbreitete numerische Methode zur Bewertung von Optionen. Darüber hinaus erweist es sich als äußerst flexibel bezüglich der zu bewertenden Optionen. So kann im Binomialmodell unter den in Abschnitt 1.3.1 getroffenen Annahmen ein fairer Preis nicht nur für Europäische Standard-Optionen, sondern auch für eine Vielzahl Exotischer Optionen bestimmt werden.

In diesem Kapitel werden wir zunächst das Binomialverfahren im Allgemeinen erklären. Dazu zählen die Konstruktion von Binomialbäumen, der Ablauf der Methode mit ihrer Implementierung sowie die Bestimmung der benötigten Parameter. Im weiteren Verlauf stellen wir dann die verschiedenen Binomialmodelle mit ihren Charakteristika und Unterschieden vor. Schließlich widmen wir uns der Konvergenz der Binomialmodelle gegen das Black-Scholes-Modell und geben einen kurzen Einblick in die Trinomial- und Multinomialverfahren, die als Erweiterung der Binomialmethode verwendet werden können.

2.1 Konstruktion und Ablauf der Binomialmethode

Ziel des Binomialverfahrens ist die Berechnung eines fairen Optionspreises $V(S_0, 0)$ zu einem vorgegebenen Aktienkurs $S_0 := S(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Dafür unterteilen wir das Zeitintervall $[0, T]$, wobei T den Fälligkeitszeitpunkt der Option bezeichnet, in $M + 1$ äquidistante Zeitschritte t_l der Länge

$$\Delta t := \frac{T}{M}. \quad (2.1.1)$$

Dann gilt:

$$t_l = l\Delta t \quad \text{für } l = 0, \dots, M. \quad (2.1.2)$$

Wir nehmen an, dass sich der Aktienkurs S in jedem Zeitintervall $[t_l, t_{l+1}]$, $l = 0, \dots, M - 1$, entweder mit der Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ erhöht oder mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor $0 < d < 1$ erniedrigt. Der Kurs des Basiswertes folgt einem

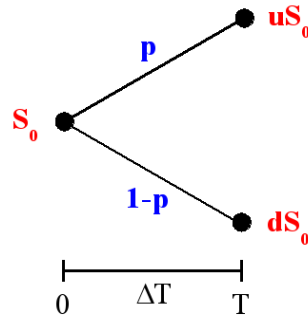


Abb. 2.1: Schema des Binomialansatzes

diskreten stochastischen Prozess, genauer einem pfadunabhängigen multiplikativen Binomialprozess, und wir bezeichnen das zeitdiskrete Modell demnach als Binomialmodell.

Ist der Aktienkurs $S_l := S(t_l)$ zum Zeitpunkt t_l gegeben, dann gilt für den Wert des Wertpapiers zum Zeitpunkt t_{l+1}

$$S_{l+1} = \begin{cases} uS_l & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ dS_l & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Abbildung 2.1 verdeutlicht diesen Binomialansatz.

Allgemeiner ausgedrückt beträgt der Aktienkurs zum Zeitpunkt t_l

$$S(t_l) = S(0) \prod_{j=1}^l \xi_j, \quad (2.1.4)$$

wobei $\xi_j \in \{u, d\}$ die Zufallsfaktoren bezeichnen.

Die eigentliche Binomialmethode besteht nun aus zwei Phasen, der Vorwärts- und der Rückwärtsphase.

Vorwärtsphase

In der Vorwärtsphase werden alle zukünftigen Aktienkurse, die unter obigen Annahmen im Zeitintervall $[0, T]$ auftreten können, initialisiert. Mit Hilfe von Gleichung (2.1.4) können die diskreten Werte des Aktienkurses S für jeden Zeitpunkt t_l , $l = 1, \dots, M$, berechnet werden. Hierzu stellen wir uns die verschiedenen Ausgänge als zweidimensionales baumartiges Gitter $(t_l, S_{m,l})$ vor. Als Startwert ist der Kurs $S_{0,0} := S(t_0)$ bekannt und stellt die Wurzel des Baumes dar. Die folgenden möglichen Aktienkurse werden mittels

$$S_{m,l} = S(t_0) u^m d^{l-m} \quad (2.1.5)$$

für $1 \leq l \leq M$ und $0 \leq m \leq l$ berechnet. Hierbei beschreibt $S_{m,l}$ den m -ten möglichen Ausgang zum Zeitpunkt t_l . Da u und d konstant über die Zeit sind, gibt es wegen $Sud = Sdu$ nach Ablauf

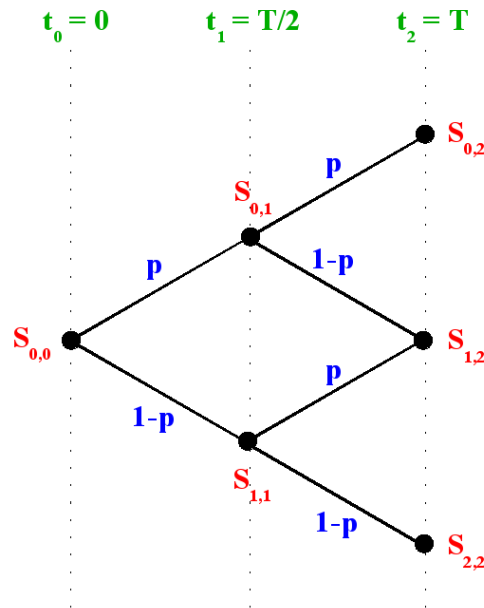


Abb. 2.2: Vorwärtsphase der Binomialmethode

von zwei Zeitschritten nur drei mögliche Aktienkurse anstelle von vier. Dementsprechend gibt es zum Fälligkeitszeitpunkt T nur $(M+1)$ diskrete Kurse mit den Werten $S_{m,M}$, $m = 0, 1, \dots, M$. Die Anzahl der Knoten im Baum wächst daher nur quadratisch mit M . Zur Verdeutlichung ist die Vorwärtsphase für die ersten beiden Schritte des Binomialbaums in Abbildung 2.2 dargestellt.

Rückwärtsphase

In der Rückwärtsphase werden nun die Optionswerte $V_{m,l} := V(t_l, S_{m,l})$ an den Gitterpunkten bestimmt. Zum Fälligkeitszeitpunkt $T = t_M$ ist der Wert der Option durch die Payoff-Funktion gegeben, so dass

$$V_{m,M} = (S_{m,M} - K)^+ = \mathcal{H}_C(S_{m,M}) \quad \text{für eine Call-Option} \quad (2.1.6)$$

und

$$V_{m,M} = (K - S_{m,M})^+ = \mathcal{H}_P(S_{m,M}) \quad \text{für eine Put-Option} \quad (2.1.7)$$

gilt. Anschließend werden die Werte des l -ten Zeitschritts $V_{m,l}$ für $m = 0, \dots, l$ rückwärts aus den bereits bekannten Werten $V_{m,l+1}$ aus dem $(l+1)$ -ten Zeitschritt bestimmt. Im Falle einer Europäischen Option berechnen sie sich als diskontierter Erwartungswert

$$V_{m,l} = e^{-r\Delta t} (pV_{m+1,l+1} + (1-p)V_{m,l+1}), \quad (2.1.8)$$

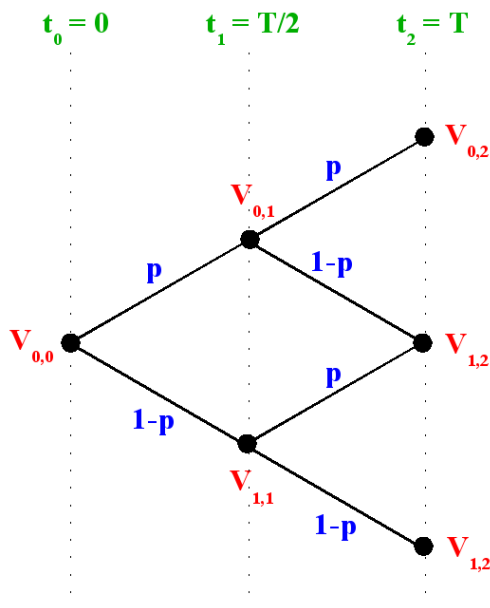


Abb. 2.3: Rückwärtsphase der Binomialmethode

was im Prinzip der risikoneutralen Bewertung begründet liegt. Bei Amerikanischen Optionen muss in jedem Zeitschritt zusätzlich noch überprüft werden, ob vorzeitige Ausübung erfolgt. Anstelle von (2.1.8) erhalten wir

$$V_{m,l} = \max \{ (S_{m,l} - K)^+, e^{-r\Delta t} (pV_{m+1,l+1} + (1-p)V_{m,l+1}) \} \quad \text{für eine Call-Option} \quad (2.1.9)$$

und

$$V_{m,l} = \max \{ (K - S_{m,l})^+, e^{-r\Delta t} (pV_{m+1,l+1} + (1-p)V_{m,l+1}) \} \quad \text{für eine Put-Option.} \quad (2.1.10)$$

Auf diese Weise werden in der Rückwärtsphase des Binomialverfahrens die Optionswerte $V_{m,l}$ für $l = M - 1, \dots, 0$ und $m = 0, \dots, l$ rekursiv ausgehend von den Werten $V_{m,M}$ bestimmt. Damit ist $V_{0,0}$ der berechnete Optionspreis zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und die gesuchte Approximation an $V(S_0, 0)$.

Die Rückwärtsphase ist für einen Binomialbaum mit zwei Schritten in Abbildung 2.3 dargestellt.

Bemerkung: Für Europäische Optionen reicht es aus, in der Vorwärtsphase nur die Aktienkurse $S_{m,M}$ für $m = 0, \dots, M$ zu berechnen, da keine vorzeitige Ausübung möglich ist. Bei Amerikanischen Optionen muss dagegen aufgrund des frühzeitigen Ausübungsrechts das vollständige Gitter bestimmt werden.

Zusammengefasst sieht die Binomialmethode für Europäische und Amerikanische Optionen wie folgt aus. Die Parameter u , d und p unterscheiden sich dabei je nach Ansatz und werden in den

Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.5 spezifiziert.

Eingabe : r, S_0, T, K, M , Put oder Call, Europäisch oder Amerikanisch
Ausgabe : $V_{0,0}$ als Näherung für $V(S_0, 0)$
Daten : u, d, p

Berechne $\Delta t := T/M$;
 $S_{0,0} = S_0$;

for $l = 1$ **to** M **do**
 for $m = 0$ **to** l **do**
 | Setze $S_{m,l} = S_{0,0}u^m d^{l-m}$;
 end
end

for $m = 0$ **to** M **do**
 | Berechne $V_{m,M}$ $\begin{cases} \text{aus (2.1.6) für Call-Option} \\ \text{aus (2.1.7) für Put-Option} \end{cases}$
end

for $l = M - 1$ **to** 0 **do**
 for $m = 0$ **to** l **do**
 | Berechne $V_{m,l}$ $\begin{cases} \text{aus (2.1.8) für Europäische Option} \\ \text{aus (2.1.9) bzw. (2.1.10) für Amerikanische Option} \end{cases}$
 end
end

$V = V_{0,0}$;

Algorithmus 2.1.1 : Binomialmethode

2.2 Eindimensionale Binomialmodelle

Um den Binomialbaum initialisieren und anschließend den Optionspreis berechnen zu können, müssen wir die Faktoren u , d und p auf Grundlage der risikoneutralen Bewertung bestimmen. Dazu stellen wir drei Gleichungen auf, die uns die Werte der drei Freiheitsgrade u , d und p liefern und für eine risikoneutrale Bewertung des Optionspreises sorgen.

Zwei Gleichungen erhalten wir, indem wir die Erwartungswerte und Varianzen des kontinuierlichen und des diskreten Modells gleichsetzen. Für den Erwartungswert des Aktienkurses S des kontinuierlichen Modells gilt

$$E[S(t_{l+1})] = S(t_l)e^{r\Delta t}, \quad (2.2.1)$$

wie wir in Abschnitt 1.3.1 gezeigt haben. Im diskreten Modell ist der Erwartungswert des Preises S zum Zeitpunkt t_{l+1} gegeben als

$$E[S(t_{l+1})] = pS(t_l)u + (1 - p)S(t_l)d. \quad (2.2.2)$$

Gleichsetzen von (2.2.1) und (2.2.2) liefert

$$S(t_l)e^{r\Delta t} = E[S(t_{l+1})] = pS(t_l)u + (1-p)S(t_l)d$$

bzw.

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d. \quad (2.2.3)$$

Wie wir in Abschnitt 1.3.1 gesehen haben, ist die Varianz des Aktienkurses S im kontinuierlichen Modell durch

$$\text{Var}[S(t_{l+1})] = S^2(t_l)e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2\Delta t} - 1) \quad (2.2.4)$$

gegeben. Im diskreten Modell gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(t_{l+1})] &= E[S^2(t_{l+1})] - (E[S(t_{l+1})])^2 \\ &= pS^2(t_l)u^2 + (1-p)S^2(t_l)d^2 - S^2(t_l)(pu + (1-p)d)^2. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Wir setzen auch die beiden Varianzen gleich und erhalten

$$\begin{aligned} S^2(t_l)e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2\Delta t} - 1) &= \text{Var}[S(t_{l+1})] \\ &= pS^2(t_l)u^2 + (1-p)S^2(t_l)d^2 - S^2(t_l)(pu + (1-p)d)^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2\Delta t} - 1) = pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2. \quad (2.2.6)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (2.2.3) in (2.2.6) ergibt sich dann

$$e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2\Delta t} - 1) = pu^2 + (1-p)d^2 - (e^{r\Delta t})^2$$

und somit

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2. \quad (2.2.7)$$

Die dritte Gleichung kann auf verschiedene Weisen gewählt werden. In den folgenden Abschnitten werden wir auf die einzelnen Möglichkeiten im Detail eingehen sowie die Lösungen u , d und p bestimmen.

2.2.1 Das CRR-Modell

Das vorgestellte Binomialverfahren wurde 1979 von Cox, Ross und Rubinstein [CRR79] entwickelt und erstmals veröffentlicht. Ursprünglich war es zur anschaulichen Darstellung und Interpretation des in Abschnitt 1.3 vorgestellten Black-Scholes-Modells gedacht, es erlangte aber rasch praktische Bedeutung für die Optionspreisbewertung, da es einfach und intuitiv implementierbar und auf viele Optionstypen anwendbar ist.

In ihren ersten Ideen zum Binomialverfahren wählen Cox, Ross und Rubinstein eine spezielle dritte Gleichung zur Herleitung der Faktoren u , d und p . Demnach sprechen wir bei Verwendung dieser Gleichung vom CRR-Modell. Für die Wahl dieser Gleichung gibt es auch noch andere Möglichkeiten, die wir in den folgenden Abschnitten vorstellen. Wir beginnen mit dem CRR-Modell, da dieses am weitesten verbreitet ist und häufig einfach als Binomialmodell be-

zeichnet wird.

Im CRR-Modell sei die dritte Gleichung durch

$$u \cdot d = 1 \quad (2.2.8)$$

gegeben. Diese Wahl spiegelt eine Symmetrie zwischen Kurssteigerung und Kursrückgang wider. S_l sei der Aktienkurs zum Zeitpunkt t_l . Dann führt eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses um den Faktor u in Zeitschritt t_{l+1} , gefolgt von einer Abwärtsbewegung um den Faktor d in Zeitschritt t_{l+2} oder umgekehrt, zum Aktienkurs $S_{l+2} = S_l$. Somit wiederholt sich der gleiche Kurs S nach jeweils zwei Zeitschritten.

Die Werte von u , d und p sind nun durch das folgende (nichtlineare) Gleichungssystem bestimmt:

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d, \quad (2.2.9)$$

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2, \quad (2.2.10)$$

$$u \cdot d = 1. \quad (2.2.11)$$

Lösen von (2.2.9), (2.2.10) und (2.2.11):

Zuerst lösen wir Gleichung (2.2.11) nach d und Gleichung (2.2.9) nach p auf. Das ergibt

$$d = \frac{1}{u} \quad (2.2.12)$$

und

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (2.2.13)$$

Setzen wir dies für d und p in (2.2.10) ein, erhalten wir durch Umformungen

$$\left(u^2 - 1\right) \left(u^2 - u \left(e^{r\Delta t + \sigma^2\Delta t} + e^{-r\Delta t}\right) + 1\right) = 0. \quad (2.2.14)$$

Da $u > 1$ gelten soll, müssen wir die quadratische Gleichung

$$u^2 - u \underbrace{\left(e^{r\Delta t + \sigma^2\Delta t} + e^{-r\Delta t}\right)}_{=: 2\beta} + 1 = 0 \quad (2.2.15)$$

lösen, was uns

$$u = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (2.2.16)$$

liefert. Aufgrund von $u \cdot d = 1$ und des Satzes von Vieta ist d die Lösung mit dem Minuszeichen. Insgesamt haben wir die drei Parameter u , d und p durch

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad (2.2.17)$$

$$d = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad (2.2.18)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (2.2.19)$$

mit

$$\beta := \frac{1}{2} \left(e^{r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} + e^{-r\Delta t} \right) \quad (2.2.20)$$

bestimmt. Sie sind die exakten Lösungen des Gleichungssystems (2.2.9) bis (2.2.11), wie auch in [Sey02] gezeigt wird. Vernachlässigen wir Terme höherer Ordnung als Δt in u und d , so erhalten wir die Lösungen

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.2.21)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.2.22)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad (2.2.23)$$

siehe z. B. [Hul06]. Berücksichtigen wir auch für p nur Terme bis zur ersten Ordnung in Δt , so ist p durch

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \quad (2.2.24)$$

gegeben.

Für obige Wahl von u und d ist das Diskretisierungsgitter des Binomialverfahrens in Abbildung 2.4(a) dargestellt. Der Baum in der (t, S) -Ebene zeigt die Symmetrie zwischen Kurssteigerung und Kursrückgang, die durch die dritte Gleichung $u \cdot d = 1$ induziert wird, im logarithmischen Sinne.

2.2.2 Das JR-Modell

Ein alternativer Ansatz für die Wahl der dritten Gleichung, den wir als JR-Modell bezeichnen, wurde 1983 von R. Jarrow und A. Rudd in [JR83] entwickelt. Sie schlagen

$$p = 1 - p = \frac{1}{2} \quad (2.2.25)$$

vor. Das bedeutet, dass eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses um den Faktor u mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt wie eine Abwärtsbewegung um den Faktor d .

Verwenden wir Gleichung (2.2.25) anstelle von (2.2.8) aus Abschnitt 2.2.1, so sind die Werte von u und d durch folgendes Gleichungssystem bestimmt:

$$e^{r\Delta t} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}d, \quad (2.2.26)$$

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}d^2. \quad (2.2.27)$$

Lösen von (2.2.26) und (2.2.27):

Zuerst lösen wir Gleichung (2.2.26) nach d auf. Das liefert uns

$$d = 2e^{r\Delta t} - u. \quad (2.2.28)$$

Setzen wir dies in (2.2.27) ein, erhalten wir nach Umformen

$$u^2 - 2e^{r\Delta t}u + e^{2r\Delta t}(2 - e^{\sigma^2\Delta t}) = 0. \quad (2.2.29)$$

Damit lautet die Lösung der quadratischen Gleichung

$$u = e^{r\Delta t} \pm \sqrt{e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1)}. \quad (2.2.30)$$

Aufgrund von $d < 1 < u$ und Gleichung (2.2.28) haben wir die drei Parameter u , d und p durch

$$u = e^{r\Delta t} + \sqrt{e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1)}, \quad (2.2.31)$$

$$d = e^{r\Delta t} - \sqrt{e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1)}, \quad (2.2.32)$$

$$p = \frac{1}{2} \quad (2.2.33)$$

bestimmt. Vernachlässigen wir wie im CRR-Modell Terme höherer Ordnung als Δt in u und d , dann erhalten wir als Lösungen des Gleichungssystems

$$u = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.2.34)$$

$$d = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.2.35)$$

$$p = \frac{1}{2}, \quad (2.2.36)$$

wie auch in [Zim05] nachvollzogen werden kann.

Für diese Wahl von u und d stellen wir auch hier das Diskretisierungsgitter in Abbildung 2.4(b) dar.

2.2.3 Das TN-Modell

Y. Tian schlägt 1993 in [Tia93] für die Wahl der dritten Gleichung vor, das dritte Moment des kontinuierlichen und des diskreten Modells gleichzusetzen. Demzufolge sprechen wir vom TN-Modell.

Im kontinuierlichen Modell ist das dritte Moment durch

$$E[S^3(t_{l+1})] = S^3(t_l)e^{(3r+3\sigma^2)\Delta t} \quad (2.2.37)$$

gegeben. Im diskreten Modell gilt

$$E[S^3(t_{l+1})] = pS^3(t_l)u^3 + (1-p)S^3(t_l)d^3. \quad (2.2.38)$$

Gleichsetzen von (2.2.37) und (2.2.38) liefert uns

$$e^{(3r+3\sigma^2)\Delta t} = pu^3 + (1-p)d^3 \quad (2.2.39)$$

als dritte Gleichung. Damit sind die Werte von u , d und p durch das Gleichungssystem

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d, \quad (2.2.40)$$

$$e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2, \quad (2.2.41)$$

$$e^{(3r+3\sigma^2)\Delta t} = pu^3 + (1-p)d^3 \quad (2.2.42)$$

bestimmt. Als eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir

$$u = \frac{NV}{2} \left(V + 1 + \sqrt{V^2 + 2V - 3} \right), \quad (2.2.43)$$

$$d = \frac{NV}{2} \left(V + 1 - \sqrt{V^2 + 2V - 3} \right), \quad (2.2.44)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (2.2.45)$$

mit

$$N = e^{r\Delta t}, \quad (2.2.46)$$

$$V = e^{\sigma^2\Delta t}. \quad (2.2.47)$$

Das zugehörige Diskretisierungsgitter ist in Abbildung 2.4(c) zu sehen.

2.2.4 Das ZA-Modell

D. Leisen und M. Reimer stellen 1995 in [LR95] eine weitere Möglichkeit zur Wahl der dritten Gleichung vor. Sie fixieren den Ausübungspreis in der Mitte des Baumes, wodurch dieser immer im Gitter des Binomialbaums enthalten ist. Dadurch geben dann die umliegenden Pfade die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Aktienkurse in Höhe des Ausübungspreises eintreten. Dies ist durchaus sinnvoll, da so der sensible Bereich für die Bestimmung des Optionspreises umfasst wird. Im Folgenden bezeichnen wir diesen Ansatz als Binomialmodell mit zentriertem Ausübungspreis oder kurz als ZA-Modell.

Im ZA-Modell wird an u und d eine Bedingung gestellt, die garantiert, dass zum Fälligkeitszeitpunkt der Option der Ausübungspreis für eine beliebige Verfeinerung in der Mitte des Baumes positioniert ist. Für eine gerade Anzahl an Zeitschritten führt dies zu einem Knoten, der bei Initialisierung des Baumes den Ausübungspreis als Wert erhält. Bei einer ungeraden Anzahl an Zeitschritten hingegen separiert obige Bedingung zum Fälligkeitszeitpunkt gerade zwei Knoten.

Die dritte Gleichung hat die Form

$$u \cdot d = e^{\frac{2}{M} \ln(K/S_0)}. \quad (2.2.48)$$

Die Werte von u , d und p sind dann durch das Gleichungssystem

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d, \quad (2.2.49)$$

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2, \quad (2.2.50)$$

$$u \cdot d = e^{\frac{2}{M} \ln(K/S_0)} \quad (2.2.51)$$

bestimmt. Die Parameter u , d und p sind als eindeutige Lösung des obigen Gleichungssystems durch

$$u = [g + (L + N^2V)\sqrt{g}] / [2N\sqrt{g}], \quad (2.2.52)$$

$$d = L/u, \quad (2.2.53)$$

$$p = \frac{N-d}{u-d} \quad (2.2.54)$$

mit

$$g = L^2 - 4LN^2 + 2LN^2V + N^4V^2,$$

$$L = (K/S_0)^{\frac{2}{M}},$$

$$N = e^{r\Delta t},$$

$$V = e^{\sigma^2 \Delta t}$$

gegeben.

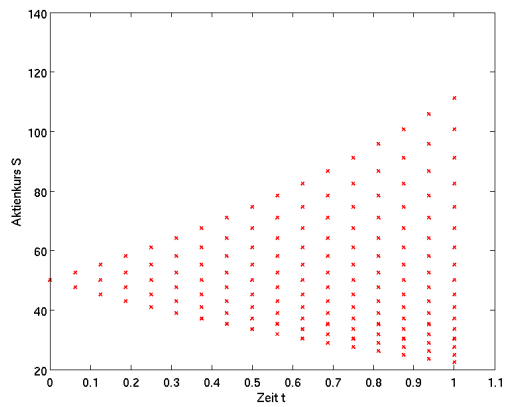
Abbildung 2.4(d) zeigt das Diskretisierungsgitter für diese Wahl von u und d .

2.2.5 Das LR-Modell

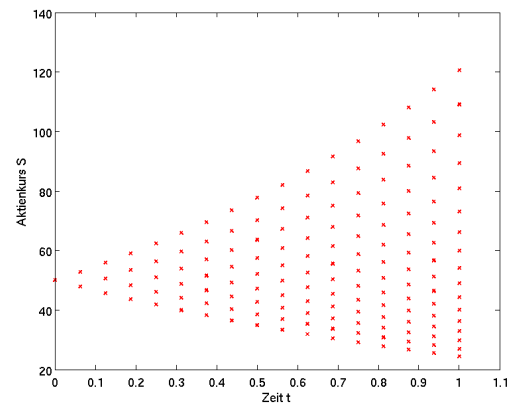
D. Leisen und M. Reimer entwickelten 1996 in [LR96] eine Methode zur Bestimmung der Parameter u , d und p , die als Erweiterung der Binomialmethode gesehen werden kann. Wir bezeichnen diese als LR-Modell.

Sie wählen den Ansatz, die Normalverteilung aus der Black-Scholes-Formel (1.3.11) bzw. (1.3.15) mittels der Binomialverteilung zu approximieren. Genauer gesprochen geschieht dies durch geeignete Approximation der Binomialverteilung durch Normalverteilung und anschließende Inversion. Mit Hilfe der sogenannten Peizer-Pratt Inversionsformel wird der Verteilungsparameter p so bestimmt, dass die Normalverteilung $N(z)$ durch die Binomialverteilung $B(M, p)$ approximiert wird, d. h.

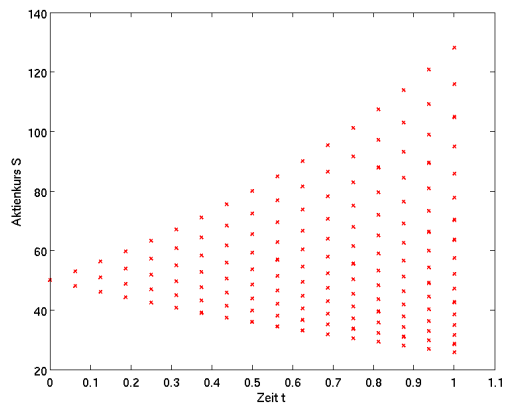
$$p(z) = \frac{1}{2} + \operatorname{sgn}(z) \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp\left(-\left(\frac{z}{M + \frac{1}{3}}\right)^2 \left(M + \frac{1}{6}\right)\right)} \quad \text{für } M = 2j + 1. \quad (2.2.55)$$



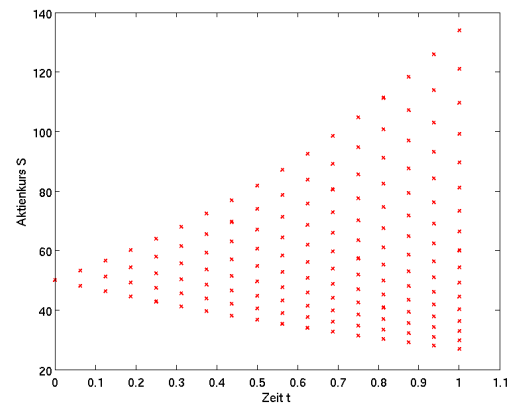
(a) CRR-Modell



(b) JR-Modell



(c) TN-Modell



(d) ZA-Modell

Abb. 2.4: Diskretisierungsgitter der verschiedenen Binomialmodelle für $S_0 = 50$, $K = 60$, $T = 1$ und $M = 16$

Die Parameter u und d werden dann wie folgt hergeleitet: Zum einen steht uns die erste Gleichung zur Verfügung, in der wir die Erwartungswerte des kontinuierlichen und des diskreten Modells gleichgesetzt haben. Lösen wir diese nach p auf, erhalten wir

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (2.2.56)$$

Des Weiteren wird

$$p' = \frac{u}{e^{r\Delta t}} \cdot p \quad (2.2.57)$$

definiert. Durch Einsetzen der beiden Parameter d_1 und d_2 aus der Black-Scholes-Formel in die Inversionsformel werden die zwei Verteilungsparameter $p' = p(d_1) = p(d_+)$ und $p = p(d_2) = p(d_-)$ bestimmt. Zusammenfassend sind die Lösungen des Gleichungssystems (2.2.56) und (2.2.57) durch

$$u = e^{r\Delta t} \frac{p(d_+)}{p(d_-)}, \quad (2.2.58)$$

$$d = \frac{e^{r\Delta t} - p(d_-)u}{1 - p(d_-)} \quad (2.2.59)$$

mit

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.2.60)$$

gegeben.

Die daraus resultierenden Binomialbaum-Parameter unterscheiden sich nur geringfügig von den bisherigen aus den Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.4. Allerdings gelingt es im LR-Modell, diese Parameter unter Beibehaltung der Baumstruktur so zu wählen, dass Oszillationen in der Konvergenz minimiert werden und die Konvergenzgeschwindigkeit verbessert wird in Hinblick auf die bisher vorgestellten Binomialmodelle. Wie in Abschnitt 2.4 erläutert wird, beträgt deren Konvergenzrate $\frac{1}{2}$, außerdem verhält sich die Konvergenz nicht monoton, sondern oszillierend. Der mit Hilfe der Peizer-Pratt Inversionsformel berechnete Optionspreis konvergiert hingegen für Europäische Optionen monoton gegen den exakten Black-Scholes Preis mit Konvergenzrate 1, zusätzlich verbessert sich die Konstante. Dies zeigen die Ergebnisse in [LR96] und in Abschnitt 4.2.

2.3 Das BEG-Modell

Nachdem wir im vorangegangenen Abschnitt die verschiedenen Binomialmodelle für Plain Vanilla Optionen vorgestellt und diskutiert haben, wollen wir uns im Folgenden der Bewertung von Basket-Optionen im Black-Scholes Kontext widmen. Wir werden zeigen, wie ein fairer Preis für Multiasset-Optionen, deren Basket als arithmetisches oder geometrisches Mittel, Minimum oder Maximum wie in (1.1.3) bis (1.1.6) definiert ist, mit Hilfe mehrdimensionaler Binomialverfahren bestimmt werden kann.

Der große Vorteil der mehrdimensionalen Binomialverfahren liegt - wie auch im eindimensionalen Fall - in der hohen Flexibilität, da sie im Gegensatz zu Monte Carlo Verfahren nicht nur die Bewertung von Europäischen, sondern vor allem auch die Bewertung von Amerikanischen Optionen ermöglichen. Demgegenüber steht der Nachteil des mit zunehmender Dimension exponentiell steigenden Aufwands. Aufgrund dessen ist die Verwendung von Binomialverfahren in der Praxis auf Optionen mit vier oder weniger zugrunde liegenden Wertpapieren begrenzt.

Bei den mehrdimensionalen Binomialmodellen, die wir in diesem Abschnitt und in Kapitel 3 vorstellen, nehmen wir an, dass der Kurs jeder zugrunde liegenden Aktie einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt, d. h.

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t), \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.3.1)$$

mit den Bezeichnungen

- $S_i(t)$ Wert der Aktie i zum Zeitpunkt t ,
- r risikofreier Zinssatz,
- σ_i Volatilität von Aktie i ,
- $dW_i(t) \sim N(0, dt)$ Wiener-Prozess.

Dann ist die Lösung dieser Differentialgleichung durch

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) t + \sigma_i W_i(t) \right), \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.3.2)$$

gegeben.

Auf einem kleinen Zeitintervall Δt gilt für den logarithmierten Aktienkurszuwachs

$$\ln \left(\frac{S_i(t + \Delta t)}{S_i(t)} \right) = \underbrace{\left(r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \Delta t}_{=: \mu_i} + \sigma_i dW_i(\Delta t) =: \zeta_i(t), \quad (2.3.3)$$

d. h. $\zeta_i(t)$ ist eine normalverteilte Zufallszahl mit Erwartungswert $\mu_i \Delta t$ und Varianz $\sigma_i^2 \Delta t$ für $i = 1, \dots, d$. Die Korrelation zwischen $\zeta_i(t)$ und $\zeta_j(t)$ ist ρ_{ij} für $1 \leq i < j \leq d$.

Außerdem wollen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit folgende Notationen verwenden: Es bezeichne $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ den d -dimensionalen Multiindex

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$$

mit den beiden Normen

$$|\mathbf{m}|_1 := \sum_{i=1}^d m_i \quad \text{und} \quad |\mathbf{m}|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} \{m_i\}.$$

In diesem Kontext verwenden wir spezielle Multiindizes wie z. B.

$$\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$$

oder ähnliche.

2.3.1 Konstruktion

P. Boyle, J. Evnine und S. Gibbs stellen 1989 zur Optionsbewertung in [BEG89] ein mehrdimensionales Binomialverfahren (kurz: BEG-Modell) vor, das auf einer Erweiterung des Ansatzes von Cox, Ross und Rubinstein aus Abschnitt 2.2.1 beruht.

Zunächst wird eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die d -dimensionale Lognormalverteilung approximiert, wie folgt konstruiert: Die normalverteilten Zufallsvariablen $\vec{\zeta}(t) = \{\zeta_1(t), \dots, \zeta_d(t)\}$ werden durch ein Tupel $\vec{\zeta}^a(t) = \{\zeta_1^a(t), \dots, \zeta_d^a(t)\}$ von diskreten Zufallszahlen, deren Verteilung für den zweidimensionalen Fall in Tabelle 2.1 dargestellt ist, approximiert. Es wird also angenommen, dass sich der Kurs einer Aktie S_i in jedem Zeitintervall $[t_l, t_{l+1}]$ jeweils entweder um einen Faktor ν_i erhöht oder um einen Faktor η_i erniedrigt für $i = 1, \dots, d$. Insgesamt führt dies also zu 2^d möglichen Zuständen nach einem Zeitschritt.

$\zeta_1^a(t)$	$\zeta_2^a(t)$	Wahrscheinlichkeit
ν_1	ν_2	p_{uu}
ν_1	η_2	p_{ud}
η_1	ν_2	p_{du}
η_1	η_2	p_{dd}

Tabelle 2.1: Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

Es wird auf dem Ansatz aus dem CRR-Modell aufgebaut, das die Bedingung

$$u \cdot d = 1 \tag{2.3.4}$$

verwendet. Im BEG-Modell wird der logarithmierte Aktienkurs betrachtet. Durch Transformation von (2.3.4) ergibt sich

$$\ln(u) = -\ln(d). \tag{2.3.5}$$

Mit unseren Bezeichnungen $\nu_i = \ln(u_i)$ und $\eta_i = \ln(d_i)$ für $i = 1, \dots, d$ gilt daher

$$\eta_i = -\nu_i. \tag{2.3.6}$$

2.3.2 Algorithmus des BEG-Verfahrens

Zuerst zerlegen wir wie im eindimensionalen Fall das Zeitintervall $[0, T]$ in $M + 1$ äquidistante Zeitschritte t_l der Länge $\Delta t = T/M$, $l = 0, \dots, M$. Anschließend werden die Wahrscheinlichkeiten p_k , $k = 1, \dots, 2^d$, und die Parameter u_i und d_i , $i = 1, \dots, d$, berechnet, wie wir in Abschnitt 2.3.3 erläutern werden.

Wie im eindimensionalen Fall werden alle zukünftigen Aktienkurse, die im Zeitintervall $[0, T]$ auftreten können, in der Vorwärtsphase mit Hilfe von Gleichung (2.1.5) komponentenweise initialisiert. Auch in der Rückwärtsphase werden die Optionswerte an den Gitterpunkten analog bestimmt, mit dem einzigen Unterschied, dass zur Bestimmung des Optionswertes an einem Gitterpunkt zum Zeitpunkt t_l nun 2^d Optionswerte zum Zeitpunkt t_{l+1} notwendig sind. Zum Fälligkeitszeitpunkt T ist der Optionpreis durch

$$V_{\mathbf{m},M} = (B_{\mathbf{m}}(T) - K)^+ = \mathcal{H}_C(B_{\mathbf{m}}) \quad \text{für eine Call-Option,} \quad (2.3.7)$$

$$V_{\mathbf{m},M} = (K - B_{\mathbf{m}}(T))^+ = \mathcal{H}_P(B_{\mathbf{m}}) \quad \text{für eine Put-Option} \quad (2.3.8)$$

gegeben, wobei $B_{\mathbf{m}}(T)$ den Wert des Baskets aus Definition 1.1.6 zum Fälligkeitszeitpunkt und $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$ den Multiindex der örtlichen Indizes der einzelnen Aktien bezeichnet. Die Optionswerte zu früheren Zeitpunkten werden für eine Europäische Option mittels

$$V_{\mathbf{m},l} = e^{-r\Delta t} \cdot \left(\sum_{\substack{|\mathbf{m}|_{\infty} \leq |\alpha|_1 \leq |\mathbf{m}|_{\infty} + d \\ \alpha_i \in \{m_i, m_{i+1}\}}} p_{(\sum_{i=1}^d (\alpha_i - m_i) \cdot 2^{d-i}) + 1} \cdot V_{\alpha, l+1} \right) \quad (2.3.9)$$

bzw. für eine Amerikanische Options mittels

$$V_{\mathbf{m},l} = \max \left\{ \left(B_{\mathbf{m}}(l\Delta t) - K \right)^+, e^{-r\Delta t} \cdot \left(\sum_{\substack{|\mathbf{m}|_{\infty} \leq |\alpha|_1 \leq |\mathbf{m}|_{\infty} + d \\ \alpha_i \in \{m_i, m_{i+1}\}}} p_{(\sum_{i=1}^d (\alpha_i - m_i) \cdot 2^{d-i}) + 1} \cdot V_{\alpha, l+1} \right) \right\} \quad (2.3.10)$$

für eine Call-Option und

$$V_{\mathbf{m},l} = \max \left\{ \left(K - B_{\mathbf{m}}(l\Delta t) \right)^+, e^{-r\Delta t} \cdot \left(\sum_{\substack{|\mathbf{m}|_{\infty} \leq |\alpha|_1 \leq |\mathbf{m}|_{\infty} + d \\ \alpha_i \in \{m_i, m_{i+1}\}}} p_{(\sum_{i=1}^d (\alpha_i - m_i) \cdot 2^{d-i}) + 1} \cdot V_{\alpha, l+1} \right) \right\} \quad (2.3.11)$$

für eine Put-Option berechnet. Es ist zu beachten, dass wir die Wahrscheinlichkeiten p_k , $k = 1, \dots, 2^d$, durchnummerieren. Dabei gibt p_1 immer die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in allen Komponenten i , $i = 1, \dots, d$, ein Abwärtssprung stattfindet. p_2 beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Kurs der Aktien S_1, \dots, S_{d-1} erniedrigt und der Kurs der Aktie S_d erhöht usw.

Für obige Wahl der Parameter ist in Algorithmus 2.3.1 der Ablauf des d -dimensionalen Binomialverfahrens nach Boyle, Evnine und Gibbs aufgeführt.

2.3.3 Bestimmung der Parameter

Um die Konvergenz der approximierenden Verteilung gegen die kontinuierliche Verteilung für $\Delta t \rightarrow 0$ zu gewährleisten, setzen wir zur Bestimmung der Parameter ν_i , $i = 1, \dots, d$, und p_k , $k = 1, \dots, 2^d$, wie im eindimensionalen Fall Erwartungswerte und Varianzen und zusätzlich

Eingabe : d, r, T, K, M , Put oder Call, Europäisch oder Amerikanisch

$S_i(0)$ für $i = 1, \dots, d$

Ausgabe : $V_{0,0}$ als Näherung für $V(S_1, \dots, S_d; 0)$

Daten : u_i, d_i für $i = 1, \dots, d$

p_k für $k = 1, \dots, 2^d$

Berechne $\Delta t := T/M$;

for $i = 1$ **to** d **do**

for $l = 0$ **to** M **do**

for $m = 0$ **to** l **do**

 Setze $S_{m_i,l} = S_i(0)u_i^m d_i^{l-m}$;

end

end

end

for $m_1 = 0$ **to** M **do**

\vdots

for $m_d = 0$ **to** M **do**

 Berechne $V_{\mathbf{m},M} = \begin{cases} \text{aus (2.3.7) für Call-Option} \\ \text{aus (2.3.8) für Put-Option} \end{cases}$

end

end

for $l = M - 1$ **to** 0 **do**

for $m_1 = 0$ **to** l **do**

\vdots

for $m_d = 0$ **to** l **do**

 Berechne $V_{\mathbf{m},l} = \begin{cases} \text{aus (2.3.9) für Europäische Option} \\ \text{aus (2.3.10) bzw. (2.3.11) für Amerikanische Option} \end{cases}$

end

end

end

$V = V_{0,0}$;

Algorithmus 2.3.1 : BEG-Binomialverfahren

Kovarianzen der diskreten Verteilung mit denen der kontinuierlichen Verteilung gleich. Dadurch erhalten wir

- d Gleichungen aus den Erwartungswerten:

$$\sum_{k=1}^{2^d} \delta_i(k) \nu_i p_k = \mu_i \Delta t, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (2.3.12)$$

mit

$$\delta_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } S_i \text{ einen Aufwärtssprung in Zustand } k \text{ macht} \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- d Gleichungen aus den Varianzen:

$$\sum_{k=1}^{2^d} \nu_i^2 p_k = \sigma_i^2 \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad 1 \leq i \leq d, \quad (2.3.13)$$

- $(d^2 - d) / 2$ Gleichungen aus den Kovarianzen:

$$\sum_{k=1}^{2^d} \delta_{ij}(k) \nu_i \nu_j p_k = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad 1 \leq i < j \leq d, \quad (2.3.14)$$

mit

$$\delta_{ij}(k) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } S_i \text{ und } S_j \text{ Sprünge in die selbe Richtung machen in Zustand } k \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit die Summe der Wahrscheinlichkeiten eins beträgt, fordern wir

$$\sum_{k=1}^{2^d} p_k = 1. \quad (2.3.15)$$

Lösen wir die Gleichungen (2.3.13) für $i = 1, \dots, d$ unter Verwendung von (2.3.15) nach ν_i auf und vernachlässigen wir Terme höherer Ordnung als Δt , so erhalten wir

$$\nu_i = \sigma_i \sqrt{\Delta t}. \quad (2.3.16)$$

Einsetzen in obige Gleichungen liefert

$$\sum_{k=1}^{2^d} \delta_i(k) p_k = \frac{\mu_i}{\sigma_i} \sqrt{\Delta t}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (2.3.17)$$

$$\sum_{k=1}^{2^d} \delta_{ij}(k) p_k = \rho_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq d, \quad (2.3.18)$$

$$\sum_{k=1}^{2^d} p_k = 1. \quad (2.3.19)$$

Insgesamt besteht das Gleichungssystem (2.3.17) - (2.3.19) also aus $(d^2 + d + 2)/2$ Bedingungen zur Bestimmung von 2^d Unbekannten. Für den Fall $d = 1$ und $d = 2$ stimmt die Anzahl der Gleichungen genau mit der Anzahl der Freiheitsgrade überein. Für $d \geq 3$ ist die Anzahl der Unbekannten stets größer als die Anzahl der Bedingungen. Dies bedeutet, dass es unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems geben kann. Wir wollen aber an dieser Stelle eine Lösung angeben, die durch die Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsausdrücke für den zweidimensionalen Fall begründet ist. Diese Lösung ist durch

$$p_k = \frac{1}{2^d} \left(1 + \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^d \delta_i(k) \frac{\mu_i}{\sigma_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^d \delta_{ij}(k) \rho_{ij} \right) \quad (2.3.20)$$

gegeben.

Es ist wichtig zu beachten, dass die angegebenen Wahrscheinlichkeiten nicht zwangsläufig positiv sein müssen. Die Nichtnegativität muss deshalb vor jeder Anwendung explizit überprüft werden.

Beispiel: Bestimmung der Parameter für $d = 2$

An dieser Stelle wollen wir zum besseren Verständnis die Bestimmung der Parameter für das zweidimensionale Binomialverfahren nach Boyle, Evnine und Gibbs im Detail betrachten.

Für die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der approximierenden Verteilung gilt

$$E[\zeta_1^a(t)] = \nu_1(p_{uu} + p_{ud} - p_{du} - p_{dd}), \quad (2.3.21)$$

$$E[\zeta_2^a(t)] = \nu_2(p_{uu} - p_{ud} + p_{du} - p_{dd}), \quad (2.3.22)$$

$$E[(\zeta_1^a(t))^2] = \nu_1^2(p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd}), \quad (2.3.23)$$

$$E[(\zeta_2^a(t))^2] = \nu_2^2(p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd}), \quad (2.3.24)$$

$$E[\zeta_1^a(t)\zeta_2^a(t)] = \nu_1\nu_2(p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd}). \quad (2.3.25)$$

Zur Bestimmung der Parameter ν_i , $i = 1, 2$, und p_k , $k = 1, \dots, 4$, setzen wir die ersten zwei Momente der approximierenden Verteilung mit denen der kontinuierlichen Verteilung gleich. Dies führt auf

$$E[\zeta_1^a(t)] = \mu_1 \Delta t, \quad (2.3.26)$$

$$E[\zeta_2^a(t)] = \mu_2 \Delta t, \quad (2.3.27)$$

$$E[(\zeta_1^a(t))^2] = \sigma_1^2 \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (2.3.28)$$

$$E[(\zeta_2^a(t))^2] = \sigma_2^2 \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (2.3.29)$$

Des Weiteren müssen die Kovarianzen der beiden Verteilungen übereinstimmen, d. h.

$$E[\zeta_1^a(t)\zeta_2^a(t)] = \sigma_1\sigma_2\rho_{12}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (2.3.30)$$

Wie bisher soll die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 betragen, das bedeutet

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1. \quad (2.3.31)$$

Wir haben also ein Gleichungssystem mit 6 Freiheitsgraden und 6 Bedingungen gegeben.

Lösen von (2.3.26) - (2.3.31):

Wie in den Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.4 wollen wir Terme höherer Ordnung als Δt im Folgenden vernachlässigen. Als erstes lösen wir die Gleichungen (2.3.28) und (2.3.29) unter Verwendung von (2.3.31) nach ν_1 bzw. ν_2 auf und erhalten

$$\nu_i = \sigma_i\sqrt{\Delta t}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.32)$$

Einsetzen in obige Gleichungen liefert uns

$$p_{uu} + p_{ud} - p_{du} - p_{dd} = \frac{\mu_1}{\sigma_1}\sqrt{\Delta t}, \quad (2.3.33)$$

$$p_{uu} - p_{ud} + p_{du} - p_{dd} = \frac{\mu_2}{\sigma_2}\sqrt{\Delta t}, \quad (2.3.34)$$

$$p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd} = \rho_{12}, \quad (2.3.35)$$

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1. \quad (2.3.36)$$

Lösen wir das Gleichungssystem (2.3.33) - (2.3.36) für p_{uu} , p_{ud} , p_{du} und p_{dd} , so sind diese Parameter durch

$$p_{uu} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \sqrt{\Delta t} + \rho_{12} \right\}, \quad (2.3.37)$$

$$p_{ud} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \sqrt{\Delta t} - \rho_{12} \right\}, \quad (2.3.38)$$

$$p_{du} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \sqrt{\Delta t} - \rho_{12} \right\}, \quad (2.3.39)$$

$$p_{dd} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \sqrt{\Delta t} + \rho_{12} \right\} \quad (2.3.40)$$

gegeben.

Es ist zu beachten, dass diese Wahrscheinlichkeiten für kleines M , d. h. für eine kleine Anzahl an Zeitschritten, negativ sein können. Mit größer werdendem M konvergieren sie allerdings gegen $0.25 \cdot (1 + \rho)$ oder $0.25 \cdot (1 - \rho)$, so dass für genügend kleine Zeitschrittweiten positive Wahrscheinlichkeiten sichergestellt sind.

2.4 Approximation des Black-Scholes-Modells durch das Binomialmodell

Im kontinuierlichen Black-Scholes-Modell kann der Optionspreis einer eindimensionalen Europäischen Option mit Hilfe der Black-Scholes-Formel exakt bestimmt werden. Nun ist es wünschenswert, dass der im Binomialmodell berechnete Optionswert für genügend kleine Zeitschrittweiten Δt gegen den Black-Scholes Wert konvergiert. Des Weiteren stellt sich die Frage, welches der vorgestellten Binomialmodelle die beste Approximation an das kontinuierliche Modell darstellt.

Im Folgenden wollen wir kurz das Konvergenzverhalten der Binomialmethode für eine eindimensionale Call-Option untersuchen. Im Falle einer Put-Option geht man völlig analog vor.

Für eine Europäische Call-Option betrachten wir das 1-Perioden-Binomialverfahren, das durch

$$C = [pC_u^{\Delta t} + (1-p)C_d^{\Delta t}] e^{-r\Delta t} \quad (2.4.1)$$

mit

$$C_u^{\Delta t} = (uS - K)^+ \quad (2.4.2)$$

$$C_d^{\Delta t} = (dS - K)^+ \quad (2.4.3)$$

definiert ist. Für gegebene Parameter u , d und p aus einem der in den Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.4 vorgestellten Binomialmodelle kann man wie in [Kwo98], Seite 199/200, zeigen, dass man für $\Delta t \rightarrow 0$ in der Binomialformel die Black-Scholes-Gleichung exakt bis zur ersten Ordnung erhält. Daher approximiert die Binomialformel die Black-Scholes-Gleichung mit Genauigkeit $\varepsilon = \mathcal{O}(M^{-1})$, d. h.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = \mathcal{O}(\Delta t). \quad (2.4.4)$$

Dies ist für alle Versionen des Binomialmodells gültig, da unser Ergebnis unabhängig von der Wahl der Parameter ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Binomialpreis gegen den Black-Scholes Preis im Grenzwert $M \rightarrow \infty$ (oder äquivalent $\Delta t \rightarrow 0$) konvergiert. Dazu betrachtet man die Bewertungsformel für eine Call-Option im M -Perioden-Binomialmodell

$$V_C = \left(e^{-r\Delta t} \right)^M \left[\sum_{j=0}^M \binom{M}{j} p^j (1-p)^{M-j} (Su^j d^{M-j} - K)^+ \right] \quad (2.4.5)$$

und zeigt, dass diese gegen die Black-Scholes-Formel für Call-Optionen konvergiert. In den Beweis fließt maßgeblich ein, dass Erwartungswert und Varianz des diskreten und des kontinuierlichen Modells übereinstimmen, was wir ja in allen Versionen des Binomialmodells gefordert haben. Auch dies kann detailliert in [Kwo98], Seite 200-202, nachvollzogen werden.

Zusammenfassend gilt: Das eindimensionale Binomialmodell konvergiert für $M \rightarrow \infty$ gegen das kontinuierliche Black-Scholes-Modell. Die Anzahl der Operationen, die zur Berechnung des Binomialmodells benötigt werden, ist von gleicher Größenordnung wie die Anzahl der Knoten im Binomialbaum. Der Aufwand beträgt daher

$$N = \mathcal{O}(M^2). \quad (2.4.6)$$

Damit erhalten wir die Gesamtkomplexität

$$\varepsilon(N) = \mathcal{O}(N^{-1/2}), \quad (2.4.7)$$

welche einer Konvergenzordnung von $1/2$ entspricht.

Wie wir in 3.2.2 genauer erläutern, beträgt der Aufwand im BEG-Binomialmodell

$$N = \mathcal{O}(M^{d+1}). \quad (2.4.8)$$

Demgegenüber steht eine Genauigkeit von

$$\varepsilon = \mathcal{O}(M^{-1}). \quad (2.4.9)$$

Hierfür verweisen wir wie in [BEG89] auf [Omb88]. Daher ergibt sich eine Gesamtkomplexität von

$$\varepsilon(N) = \mathcal{O}(N^{-1/(d+1)}), \quad (2.4.10)$$

welche einer Konvergenzordnung von $1/(d+1)$ entspricht.

2.5 Trinomial- und Multinomialverfahren

Als Alternative zum Binomialverfahren können auch Trinomial- oder allgemein Multinomialverfahren zur Optionsbewertung verwendet werden. Im Falle des eindimensionalen Trinomialverfahrens nimmt man an, dass in jedem Zeitintervall drei mögliche Aktienkursentwicklungen auftreten können. Ist der Aktienkurs S_l zum Zeitpunkt t_l gegeben, dann gilt für den Wert der Aktie zum Zeitpunkt t_{l+1}

$$S_{l+1} = \begin{cases} uS_l & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_u \\ mS_l & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_m \\ dS_l & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_d. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Dabei gilt, dass $p_u + p_m + p_d = 1$.

Fordert man wie im CRR-Binomialmodell $u \cdot d = m = 1$ und $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $\lambda \geq 1$, so lassen sich die Parameter u , m , d , p_u , p_m und p_d eindeutig bestimmen, indem man Erwartungswert und Varianz des kontinuierlichen und des diskreten Modells gleichsetzt. Unter Vernachlässigung von

Termen höherer Ordnung als Δt sind die Parameter durch

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.5.2)$$

$$m = 1, \quad (2.5.3)$$

$$d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.5.4)$$

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu}{2\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t}, \quad (2.5.5)$$

$$p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}, \quad (2.5.6)$$

$$p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu}{2\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t} \quad (2.5.7)$$

gegeben. Dies kann in [Boy88] und [KR91] im Detail nachvollzogen werden. In Letzterem ist auch eine Erweiterung auf höhere Dimensionen zu finden.

Bemerkung: Die Wahl $\lambda = 1$ liefert das Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein.

Beim Multinomialverfahren der Ordnung n nimmt man analog zum Trinomialverfahren an, dass in jedem Zeitintervall n mögliche Aktienkursentwicklungen mit Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n eintreten können. Diese Idee wird in [AW01] und [BY03] genauer verfolgt.

Kapitel 3

Dünngitter-Binomialverfahren

In Kapitel 2 haben wir die verschiedenen Binomialmodelle für Plain Vanilla Optionen vorgestellt und zusätzlich das BEG-Modell zur Bewertung von Basket-Optionen im Black-Scholes Kontext kennengelernt. Dabei haben wir die hohe Flexibilität der Binomialverfahren gesehen, da diese nicht nur die Bewertung von Europäischen Optionen, sondern vor allem auch die Bewertung von Amerikanischen Optionen ermöglichen. Beim mehrdimensionalen BEG-Modell ist als Nachteil allerdings auch der Fluch der Dimension aufgetreten, der dessen Anwendung auf kleine Dimensionen limitiert.

In diesem Kapitel werden wir zwei neue mehrdimensionale Binomialmodelle entwickeln und vorstellen, die gegenüber dem BEG-Modell einige Vorteile aufweisen. Wir beginnen mit dem Produktbinomialverfahren, das zwar auch noch mit exponentiell steigendem Aufwand für zunehmende Dimension zu kämpfen hat, dafür aber im Gegensatz zum BEG-Modell positive Wahrscheinlichkeiten garantiert. Anschließend stellen wir das Dünngitter-Binomialverfahren vor, das auf dem Produktbinomialverfahren basiert und den Fluch der Dimension - zumindest bis zu einem gewissen Grad - brechen kann. Dafür müssen wir zunächst die Konstruktion von anisotropen Binomialbäumen erläutern, bevor wir auf diese die Kombinationstechnik aus der Theorie der Dünnen Gitter anwenden können.

3.1 Grundlagen

Wie wir schon in Abschnitt 2.3 erwähnt haben, wollen wir für den weiteren Verlauf dieser Arbeit folgende Annahmen treffen: Wir nehmen an, dass der Kurs jeder zugrunde liegenden Aktie der Differentialgleichung

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}S_i dW_j(t), \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.1.1)$$

folgt mit den Bezeichnungen

- $S_i(t)$ Wert der Aktie i zum Zeitpunkt t ,
- r risikofreier Zinssatz,
- σ_{ij} (i, j)-ter Eintrag der $d \times d$ Volatilitätsmatrix σ ,
- $dW_j(t) \sim N(0, dt)$ Wiener-Prozess.

Dann ist die Lösung dieser Differentialgleichung durch

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_j(t) \right), \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.1.2)$$

gegeben.

Des Weiteren verwenden wir folgende Multiindex-Notationen: Es bezeichne $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ den d -dimensionalen Multiindex

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$$

mit den beiden Normen

$$|\mathbf{m}|_1 := \sum_{i=1}^d m_i \quad \text{und} \quad |\mathbf{m}|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} \{m_i\}.$$

In diesem Kontext verwenden wir spezielle Multiindizes wie z. B.

$$\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$$

oder ähnliche.

3.2 Das Produktbinomialmodell

In diesem Abschnitt stellen wir ein neues mehrdimensionales Binomialverfahren vor. Es wird im Folgenden als Produktbinomialverfahren bezeichnet.

Der wesentliche Unterschied zum BEG-Modell aus Abschnitt 2.3 besteht darin, dass wir keine direkte Approximation der d -dimensionalen Verteilung von (S_1, \dots, S_d) vornehmen, sondern die eindimensionale Verteilung des Wiener-Prozesses $W(t)$ durch einen Binomialbaum, den wir als W -Baum bezeichnen, approximieren. Die Erweiterung auf d Dimensionen gelingt uns durch Tensorproduktbildung von eindimensionalen W -Bäumen. Den d -dimensionalen S -Baum, welcher die d -dimensionale Verteilung von (S_1, \dots, S_d) approximiert, erhalten wir dann durch anschließende Transformation mittels (3.1.2). Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich als Produkt der eindimensionalen Wahrscheinlichkeiten. Im Falle $d = 1$ entspricht unser Produktbinomialverfahren dem eindimensionalen Binomialverfahren nach Jarrow und Rudd.

3.2.1 Konstruktion des Produktbinomialverfahrens

Die eindimensionale Verteilung des Wiener-Prozesses $W(t)$ approximieren wir durch eine diskrete binomialverteilte Zufallsvariable, die an den diskreten Zeitpunkten $t_l = l\Delta t$, $l = 0, \dots, M$, definiert ist. Wir nehmen also wie gewohnt an, dass im Intervall $[t_l, t_{l+1}]$ entweder ein Aufwärtssprung um den Faktor ν mit Wahrscheinlichkeit p oder ein Abwärtssprung um den Faktor η mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ eintritt. Ist der Wert $W_l := W(t_l)$ zum Zeitpunkt t_l gegeben, dann

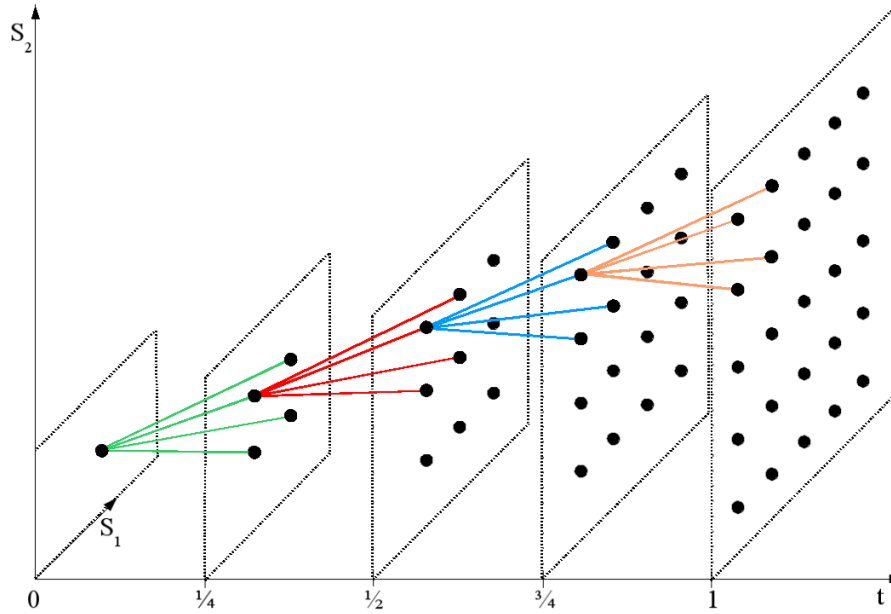


Abb. 3.2: Zweidimensionaler Produktbinomialbaum mit vier Zeitschritten

gewählt werden. Beide Möglichkeiten führen auf die selbe Lösung des Gleichungssystems (3.2.2), (3.2.3), die durch

$$\nu = \sqrt{\Delta t}, \quad (3.2.6)$$

$$\eta = -\sqrt{\Delta t}, \quad (3.2.7)$$

$$p = \frac{1}{2} \quad (3.2.8)$$

eindeutig bestimmt ist. Im Gegensatz zum BEG-Modell sind die Wahrscheinlichkeiten immer positiv.

Mit den Parametern aus (3.2.6) bis (3.2.8) stellen wir den eindimensionalen Binomialbaum in $W_{m,l}$, $0 \leq l \leq M$, $0 \leq m \leq l$, auf. Den d -dimensionalen Binomialbaum definieren wir dann als Tensorprodukt von eindimensionalen Bäumen. Dazu führen wir folgende Notationen ein: Den eindimensionalen W -Baum mit M Zeitschritten bezeichnen wir als

$$W_M^1 := \{W_{m,l}\}_{\substack{m=0,\dots,l \\ l=0,\dots,M}} \quad (3.2.9)$$

Den d -dimensionalen Binomialbaum in W definieren wir als Tensorprodukt der eindimensionalen Bäume, d. h.

$$W_M^d = \underbrace{W_M^1 \otimes \dots \otimes W_M^1}_{d\text{-mal}}. \quad (3.2.10)$$

Dann gilt

$$W_M^d = \{\mathbf{W}_{\mathbf{m},l}\}_{\substack{|\mathbf{m}|_\infty \leq l \\ l=0,\dots,M}} \quad (3.2.11)$$

und

$$\mathbf{W}_{\mathbf{m},l} := (W_{m_1,l}, \dots, W_{m_d,l}). \quad (3.2.12)$$

Als nächstes transformieren wir den W -Baum W_M^d in einen S -Baum S_M^d , der die d -dimensionale Verteilung der Aktienkurse approximiert. Den eindimensionalen S -Baum bezeichnen wir als

$$S_M^1 := \{S_{m,l}\}_{\substack{m=0,\dots,l \\ l=0,\dots,M}}. \quad (3.2.13)$$

Die Werte für $S_{m_i,l}$, $i = 1, \dots, d$, erhalten wir hierbei durch Einsetzen der Werte von $W_{m_1,l}, \dots, W_{m_d,l}$ in die diskrete Transformationsformel

$$S_{m_i,l} = S_i(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 \right) l \Delta t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_{m_j,l} \right), \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.2.14)$$

die aus der kontinuierlichen Lösungsformel (3.1.2) hervorgeht. Somit ist der d -dimensionale Binomialbaum in S durch

$$S_M^d = \{\mathbf{S}_{\mathbf{m},l}\}_{\substack{|\mathbf{m}|_\infty \leq l \\ 0 \leq l \leq M}} \quad (3.2.15)$$

mit

$$\mathbf{S}_{\mathbf{m},l} := (S_{m_1,l}, \dots, S_{m_d,l}) \quad (3.2.16)$$

gegeben. In Abbildung 3.1(b) stellen wir den eindimensionalen Binomialbaum S_2^1 dar.

Wie im BEG-Modell gibt es nach einem Zeitschritt 2^d mögliche Zustände, da jede Aktie einen Aufwärts- oder Abwärtssprung machen kann. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Zustand eintritt, ergibt sich als Produkt der eindimensionalen Wahrscheinlichkeiten. Wir veranschaulichen dies für den zweidimensionalen Fall anhand von Abbildung 3.2.

Bemerkung: Für den Fall $d = 1$ erhalten wir genau das JR-Modell. Aus diesem Grunde kann das Produktbinomialverfahren als mehrdimensionale Verallgemeinerung des eindimensionalen Binomialverfahrens von Jarrow und Rudd verstanden werden.

3.2.2 Konvergenz des Produktbinomialverfahrens

Im Folgenden wollen wir uns kurz mit dem Konvergenzverhalten des Produktbinomialverfahrens beschäftigen. Die Kosten, die zur Berechnung des Optionspreises nötig sind, werden durch die Anzahl der Knoten im Baum beschrieben. Hierfür gilt folgendes Lemma:

Lemma 3.2.1 [AUFWAND DES PRODUKTBINOMIALVERFAHRENS]

Der Aufwand des Produktbinomialverfahrens ist von der Ordnung

$$N = \mathcal{O}(M^{d+1}). \quad (3.2.17)$$

Beweis 3.2.1. Wir betrachten einen d -dimensionalen Produktbinomialbaum mit M Zeitschritten. Die Anzahl der Knoten zu einem Zeitpunkt t_l , $l = 0, \dots, M$, beträgt $(l + 1)^d$. Damit ist die Gesamtzahl der Knoten im Baum durch

$$N = \sum_{l=0}^M (l + 1)^d \quad (3.2.18)$$

gegeben. Dies entspricht einer Ordnung von $\mathcal{O}(M^{d+1})$. □

Die Genauigkeit des Produktbinomialverfahrens beträgt

$$\varepsilon = \mathcal{O}(M^{-1}), \quad (3.2.19)$$

wie in [Omb88] nachvollzogen werden kann. Damit erhalten wir eine Gesamtkomplexität in Höhe von

$$\varepsilon(N) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{d+1}}\right), \quad (3.2.20)$$

welche einer Konvergenzordnung von $1/(d + 1)$ entspricht.

3.2.3 Algorithmus des Produktbinomialverfahrens

Wir veranschaulichen die Vorwärts- und Rückwärtsphase des Produktbinomialverfahrens in Algorithmus 3.2.1 und 3.2.2. Dazu ist es notwendig, den Baum bei der Implementierung als Menge von Knoten zu verstehen und mit einer Vater-Sohn-Struktur zu versehen. Das bedeutet, dass jeder Knoten des Baumes - beginnend bei der Wurzel - seine Söhne kennt. Des Weiteren ist jedem Knoten ein Level zugeordnet, das den Zeitschritt angibt, auf dem der Knoten liegt. Zusätzlich ist jeder Knoten mit einem Vektor der vorinitialisierten Aktienkurse sowie mit dem Optionswert an diesem Knoten versehen. Wir verwirklichen dies, indem wir, wie im Folgenden verdeutlicht, ein `struct node` anlegen:

```
struct node {
struct matrix *soehne;
int level;
double *S;
double V;
}
```

Im Folgenden bezeichne n eine Variable vom Typ `struct node`. Mit Hilfe der Schreibweise n_{soehne} , n_{level} , n_S und n_V wollen wir die einzelnen Variablen von n ansprechen.

In der Vorwärtsphase werden alle Aktienkurse vorinitialisiert. Dabei ist es notwendig, dass für jeden Knoten n der Vektor n_S mit den richtigen Werten $S_{m_i,l}$ gefüllt wird. Die Berechnung

der $S_{m_i,l}$ wird in Algorithmus 3.2.1 dargestellt. Der Preis der Option wird anschließend in der Rückwärtsphase rekursiv über die Vater-Sohn-Beziehung berechnet, indem die Funktion `double berechneOptionspreis(struct node n, double d, double r, double K, double Δt, boolean isCall, boolean isAmerican)` mit der Baumwurzel als Parameter aufgerufen wird. Bei dieser rekursiven Berechnung werden auch die Optionswerte n_V an jedem Knoten des Baumes gesetzt. Dabei bezeichnet $B(n_S)$ in der Funktion `berechneOptionspreis` den Wert des Baskets zum Zeitpunkt $t_{n_{level}}$ für die gegebenen Aktienkurse n_S am Knoten n .

Eingabe : $d, r, T, M, S_i(0)$ für $i = 1, \dots, d$

Berechne $\Delta t := T/M$;

Setze $W_{0,0} = 0$;

for $l = 1$ **to** M **do**

for $m = 0$ **to** l **do**

$W_{m,l} = m \cdot \sqrt{\Delta t} - (l - m) \cdot \sqrt{\Delta t}$;

end

end

for $i = 1$ **to** d **do**

for $l = 1$ **to** M **do**

for $m = 0$ **to** l **do**

$S_{m_i,l} = S_i(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_{ii}^2) \cdot l \cdot \Delta t}$;

for $j = 1$ **to** i **do**

$S_{m_i,l} = S_{m_i,l} e^{\sigma_{ij} W_{m_j,l}}$;

end

end

end

end

Algorithmus 3.2.1 : Vorwärtsphase des Produktbinomialverfahrens

Eingabe : $d, r, K, \Delta t$, Put oder Call, Europäisch oder Amerikanisch

 Wurzel $root$ des Baumes

Ausgabe : $V_{0,0}$ als Näherung für $V(S_1, \dots, S_d; 0)$

$V_{0,0} = \text{berechneOptionspreis}(root, d, r, K, \Delta t, \text{Put oder Call, Europäisch oder Amerikanisch})$;

Algorithmus 3.2.2 : Rückwärtsphase des Produktbinomialverfahrens

```

hold = 0;
p = (1/2)^d;
if nlevel = M then
  if isCall then
    | nV = (B(nS) - K)^+;
  end
  else
    | nV = (K - B(nS))^+;
  end
end
end

else
  pos = 0;
  q = d;
  while pos1 ≤ 1 do
    if posq > 1 then
      | posq = 0;
      | q = q - 1;
    end
    else
      | Berechne nV rekursiv über Vater-Sohn-Beziehung:
      | hold = hold + e-rΔt · p · berechneOptionspreis(nsoehne(pos), d, r, K, Δt,
      | isCall, isAmerican);
      | q = d;
    end
    posq = posq + 1;
  end
end

if isAmerican then
  if isCall then
    | nV = max {hold, B(nS) - K};
  end
  else
    | nV = max {hold, K - B(nS)};
  end
end
end
else
  | nV = hold;
end
end

return nV;

```

Funktion double berechneOptionspreis(struct node n, double d, double r, double K, double Δt, boolean isCall, boolean isAmerican)

3.3 Dünngitter-Binomialbäume

In den Abschnitten 2.3 und 3.2 haben wir gesehen, dass sowohl das Binomialverfahren von Boyle, Evnine und Gibbs als auch das von uns entwickelte Produktbinomialverfahren mit dem sogenannten Fluch der Dimension zu kämpfen haben. Das bedeutet, dass der Aufwand, in unserem Fall also die Anzahl der Knoten im Baum, um eine Genauigkeit ε zu erreichen, exponentiell mit der Dimension d ansteigt. Aus diesem Grunde ist der Produktansatz nur für niederdimensionale Optionen ($d = 1, \dots, 4$) geeignet.

Abhilfe schafft ein numerisches Verfahren, das auf den russischen Mathematiker S. Smolyak ([Smo63]) zurückgeht und das diesen Fluch der Dimension - zumindest zu einem gewissen Grad - brechen kann, das sogenannte Dünngitter-Verfahren. Wir verwenden die in [Smo63] vorgestellte Idee der Dünnen Gitter und entwickeln hieraus das sogenannte Dünngitter-Binomialverfahren. Dieses basiert auf dem Produktbinomialverfahren. Wir verwenden jedoch nur ausgewählte Bäume aus der Menge aller Produktkombinationen, die durch Tensorproduktbildung von eindimensionalen Bäumen entstanden sind. Die Optionspreise, die wir mit Hilfe der ausgewählten Bäume berechnen, benötigen wir für die Anwendung der sogenannten Kombinationstechnik, die eine Alternative zu Smolyaks Formulierung darstellt (siehe [GSZ92]). Falls die Payoff-Funktion genügend glatt ist, wird auf diese Weise die Konvergenzrate nahezu unabhängig von der Dimension (bis auf einen logarithmischen Faktor).

Eine gute Erklärung des Dünngitter-Ansatzes ist in [BG04b] zu finden.

3.3.1 Konstruktion von anisotropen Bäumen

In Abschnitt 3.2.1 haben wir die Konstruktion von Tensorproduktbäumen erklärt. Diese umfassen allerdings nicht alle Binomialbäume, die durch Produktbildung von eindimensionalen Bäumen entstehen können, sondern nur diejenigen, die aus eindimensionalen Bäumen mit gleicher Anzahl an Zeitschritten hervorgehen. Im Folgenden bezeichnen wir diese als *isotrope Binomialbäume*. Unter *anisotropen Bäumen* verstehen wir hingegen die Binomialbäume, bei denen in mindestens zwei Dimensionen i und j , $i, j = 1, \dots, d$, eine unterschiedliche Anzahl an Zeitschritten M_i und M_j gewählt ist.

An dieser Stelle wollen wir die Konstruktion von anisotropen Binomialbäumen erläutern, da diese für die Kombinationstechnik später benötigt werden. Dafür greifen wir auf die Schreibweise, die wir für das Produktbinomialverfahren eingeführt haben, zurück und ändern diese wie folgt leicht ab. Wir betrachten eindimensionale Binomialbäume, bei denen die Anzahl der Zeitschritte von der Form $M = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, ist. Dann bezeichnen wir mit

$$W_k^1 = \{W_{m,l}\}_{\substack{m=0,\dots,l \\ l=0,\dots,2^k}} \quad (3.3.1)$$

den eindimensionalen W -Baum mit 2^k Zeitschritten. Den d -dimensionalen anisotropen Binomialbaum in W definieren wir nun als Tensorprodukt von eindimensionalen Bäumen mit verschiedenen Zeitschrittweiten, das bedeutet

$$W_{\mathbf{k}}^d := W_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes W_{k_d}^1. \quad (3.3.2)$$

Bei der Definition des Tensorprodukts stößt man auf das Problem, dass die eindimensionalen Bäume unterschiedliche Zeitschrittweiten haben. Hier definieren wir den d -dimensionalen Tensorproduktbaum, indem wir festlegen, dass die Anzahl der Zeitschritte das Minimum von $2^{k_1}, \dots, 2^{k_d}$ ist. Das bedeutet, dass an jedem diskreten Zeitpunkt, der in allen eindimensionalen Binomialbäumen auftritt, das Tensorprodukt dieser Bäume auf dieser Zeitscheibe gebildet wird. Befinden sich nur in einigen der eindimensionalen Bäume Knoten auf dieser Zeitscheibe, so besitzt der Produktbaum keine Knoten für diesen diskreten Zeitpunkt. Somit beträgt die Zeitschrittweite des Produktbaums

$$\Delta t = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq d}(2^{k_1}, \dots, 2^{k_d})} =: \frac{1}{\min(2^{\mathbf{k}})} =: \frac{1}{2^{k_{\min}}}. \quad (3.3.3)$$

Das Tensorprodukt von eindimensionalen Bäumen definieren wir damit als

$$W_{\mathbf{k}}^d = \{ \mathbf{W}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} \}_{\substack{m_i=0, \dots, l_i \\ l_i=j \cdot 2^{k_i - k_{\min}}, j=0, \dots, 2^{k_{\min}}} \quad (3.3.4)$$

und

$$\mathbf{W}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} := (W_{m_1, l_1}, \dots, W_{m_d, l_d}). \quad (3.3.5)$$

Wie in Abschnitt 3.2.1 erhalten wir die Werte für S_{m_i, l_i} , indem wir die Werte von $W_{m_1, l_1}, \dots, W_{m_d, l_d}$ in die diskrete Transformationsformel

$$S_{m_i, l_i} = S_i(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 \right) l_i \cdot \frac{1}{2^{k_i}} + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_{m_j, l_j} \right), \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.3.6)$$

einsetzen. Somit ist der d -dimensionale anisotrope Binomialbaum in S durch

$$S_{\mathbf{k}}^d = \{ \mathbf{S}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} \}_{\substack{m_i=0, \dots, l_i \\ l_i=j \cdot 2^{k_i - k_{\min}}, j=0, \dots, 2^{k_{\min}}} \quad (3.3.7)$$

mit

$$\mathbf{S}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} := (S_{m_1, l_1}, \dots, S_{m_d, l_d}) \quad (3.3.8)$$

gegeben.

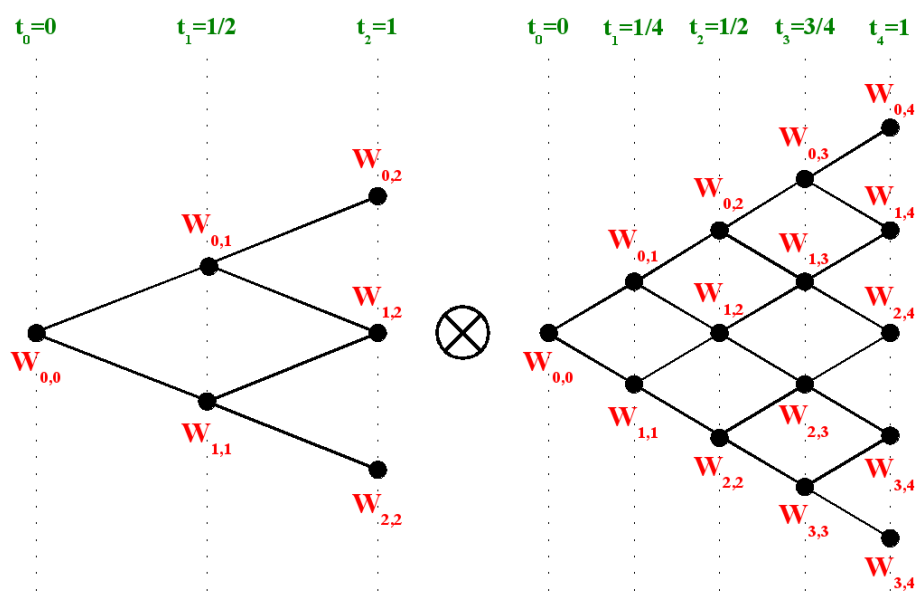
Nach einem Zeitschritt gibt es

$$s = \prod_{i=1}^d (2^{k_i - k_{\min}} + 1) \quad (3.3.9)$$

mögliche Zustände. Das bedeutet, dass jeder Knoten im Baum s Söhne hat. Wie im Produktbinomialverfahren ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zustand eintritt, als Produkt der eindimensionalen Wahrscheinlichkeiten für den jeweiligen Zustand.

Bemerkung:

1. Wir haben die Konstruktion von d -dimensionalen anisotropen Bäumen durch Tensorproduktbildung von eindimensionalen Bäumen, die $M_i = 2^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$, Zeitschritte besitzen, erklärt. Es können auch eindimensionale Bäume mit einem Zeitschritt, d. h.

Abb. 3.3: Eindimensionale Binomialbäume S_1^1 und S_2^1

mit $M_i = 2^0$, $k_i = 0$, verwendet werden. Diese bestehen aus einem Ast mit einem Knoten zum Zeitpunkt 0 und einem Knoten zum Fälligkeitszeitpunkt T . Der Aktienkurs $S(T)$ zum Fälligkeitszeitpunkt ist durch $S(T) = S(0)$ gegeben.

2. Bis zu diesem Punkt können wir nur anisotrope Bäume konstruieren, die als Tensorprodukt von eindimensionalen Bäumen mit $M_i = 2^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, d$, Zeitschritten entstehen. Die Verallgemeinerung auf beliebige Zeitschrittweiten ist aber offensichtlich. Dabei ist einzig zu beachten, dass sich die Anzahl der Zeitschritte des Tensorproduktbaums dann nicht als Minimum sondern als größter gemeinsamer Teiler der M_i , $i = 1, \dots, d$, ergibt.

Zur Veranschaulichung stellen wir den zweidimensionalen anisotropen Binomialbaum $S_{2,4}^2$ in Abbildung 3.4(a) dar. Er entsteht als Tensorprodukt aus den beiden eindimensionalen Bäumen S_2^1 und S_4^1 . Diese sind in Abbildung 3.3 gezeigt. Zum Vergleich sei an dieser Stelle noch einmal auf den isotropen Baum $S_{4,4}^2$ aus Abbildung 3.2 in Abschnitt 3.2.1 hingewiesen. Zur einfacheren Darstellung können wir auch nur die letzte Zeitscheibe des Baumes abbilden (Abb. 3.4(b)), da hierdurch die vorherigen Zeitscheiben eindeutig festgelegt sind. Den Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungsformen stellen wir in Abbildung 3.4 für den Baum $S_{2,4}^2$ her.

Bemerkung: Die isotropen Binomialbäume, die wir für das Produktbinomialverfahren in Abschnitt 3.2.1 vorgestellt haben, erhalten wir als Spezialfall der anisotropen Bäume, wenn $M_1 = M_2 = \dots = M_d$ gilt.

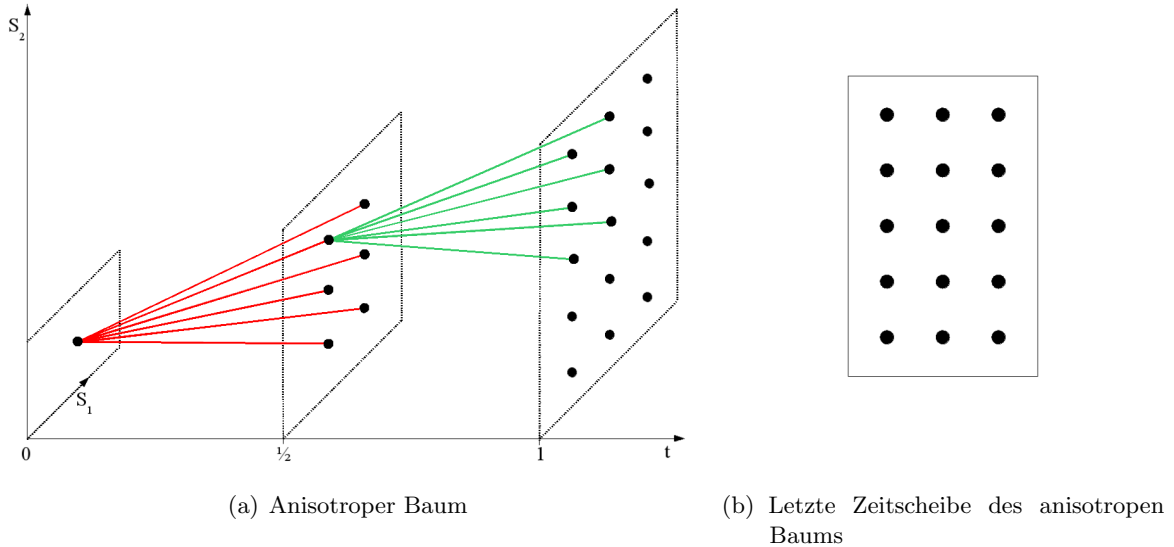


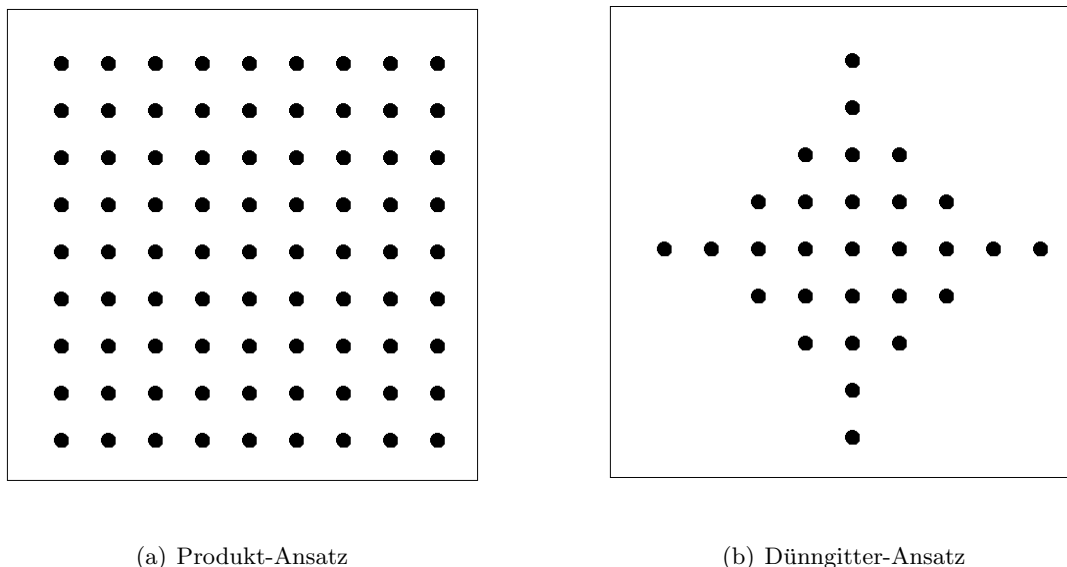
Abb. 3.4: Darstellungsformen des zweidimensionalen anisotropen Binomialbaums $S_{1,2}^2$ mit zwei Zeitschritten

3.3.2 Die Kombinationstechnik

Beim Produktansatz wird das Tensorprodukt von eindimensionalen Binomialbäumen mit jeweils gleicher Zeitschrittweite zur Optionspreisberechnung verwendet. Allgemeiner können wir auch das Tensorprodukt von d eindimensionalen Bäumen mit unterschiedlichen Levels betrachten. Als Level eines isotropen oder anisotropen Produktbaums fassen wir $\ell = |\mathbf{k}|_1$ auf, wenn 2^{k_i} , $i = 1, \dots, d$, die Anzahl an Zeitschritten des i -ten eindimensionalen Baums bezeichnet. Der Dünngitter-Ansatz basiert auf dem Produktansatz, jedoch wird aus allen entstehenden Produktkombinationen nur ein Teil ausgewählt. Diese Auswahl geschieht dadurch, dass Aufwand und Genauigkeit ausbalanciert werden. In der Menge der Tensorproduktbäume zum Level ℓ befinden sich alle Binomialbäume $S_{\mathbf{k}}^d$ mit $|\mathbf{k}|_\infty \leq \ell$. Von diesen Möglichkeiten verwenden wir diejenigen, deren Summe der örtlichen Einzelindizes größer als die Konstante $\ell - d + 1$ und kleiner als das Level ℓ ist. Der Produktansatz hingegen ist dadurch charakterisiert, dass der Binomialbaum, bei dem alle Indizes gleich dem Level ℓ sind, verwendet wird.

In Abbildung 3.5 sieht man die zweidimensionalen Tensorproduktbäume zum Level $\ell = 3$ für den Produkt- und Dünngitter-Ansatz im Vergleich. Hierbei ist zu beachten, dass wir wieder nur die letzte Zeitscheibe der Bäume darstellen. Die vorherigen Zeitscheiben ergeben sich hieraus auf eindeutige Art und Weise durch Rückwärtsinduktion. Das Dünne Gitter in Abbildung 3.5(b) wird auch als hyperbolisches Kreuz bezeichnet. In Abbildung 3.6 betrachten wir die Menge aller zweidimensionalen Tensorproduktbäume zum Level $\ell = 2$. Dort sind für jeden Baum die Knoten auf der letzten Zeitscheibe dargestellt.

Mit Hilfe der eingeführten anisotropen Binomialbäume können wir nun die sogenannte Kombinationstechnik auf die Tensorproduktbinomialbäume anwenden. Diese ist aus dem Dünngitter-

Abb. 3.5: Zweidimensionales Gitter für $\ell = 3$

Verfahren von Smolyak [Smo63] entwickelt worden und stellt eine alternative Formulierung dar (siehe [GG98]). Wir verwenden diese Technik, um Optionspreise zu kombinieren, die mittels der anisotropen Bäume berechnet werden.

Es bezeichne $V_{0,0}^{\mathbf{k}}$ den Wert der Option, der mit Hilfe des anisotropen Binomialbaums $S_{\mathbf{k}}^d$ berechnet wird. Die Kombinationstechnik zu einem festen Level ℓ liefert dann einen Optionspreis $\hat{V}_{0,0}^{\ell}$, der durch Summation von ausgewählten Optionspreisen entsteht. Mit zunehmendem Level wird der Fehler zwischen $\hat{V}_{0,0}^{\ell}$ und dem exakten Wert kleiner. Im Detail wird $\hat{V}_{0,0}^{\ell}$ durch

$$\hat{V}_{0,0}^{\ell} = \sum_{\ell-d+1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell} (-1)^{\ell-|\mathbf{k}|_1} \cdot \binom{d-1}{|\mathbf{k}|_1 - \ell + d - 1} \cdot V_{0,0}^{\mathbf{k}} \quad (3.3.10)$$

berechnet.

In Abbildung 3.7 veranschaulichen wir die Kombinationstechnik für den zweidimensionalen Fall. Die anisotropen Binomialbäume, deren Optionspreis als Summand in (3.3.10) für Level $\ell = 2$ eingeht, sind farbig markiert. Dabei fließt der Optionswert der rot markierten Bäume mit positivem Vorzeichen, der Wert der grün markierten mit negativem Vorzeichen ein. Der Produktansatz würde hingegen den Optionspreis liefern, der mit Hilfe des Tensorproduktbaumes $S_{2,2}^2$ berechnet wird.

3.3.3 Konvergenz des Dünngitter-Binomialverfahrens

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Konvergenz des Dünngitter-Binomialverfahrens. Dazu geben wir zunächst die Anzahl der Knoten in einem anisotropen Baum an.

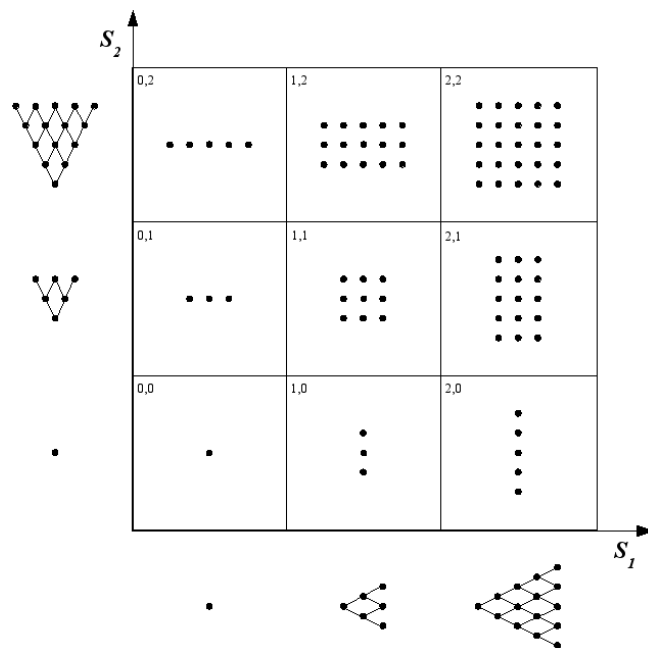


Abb. 3.6: Alle zweidimensionalen Produktbinomialbäume, die sich aus eindimensionalen Bäumen mit Level $\ell \leq 2$ ergeben

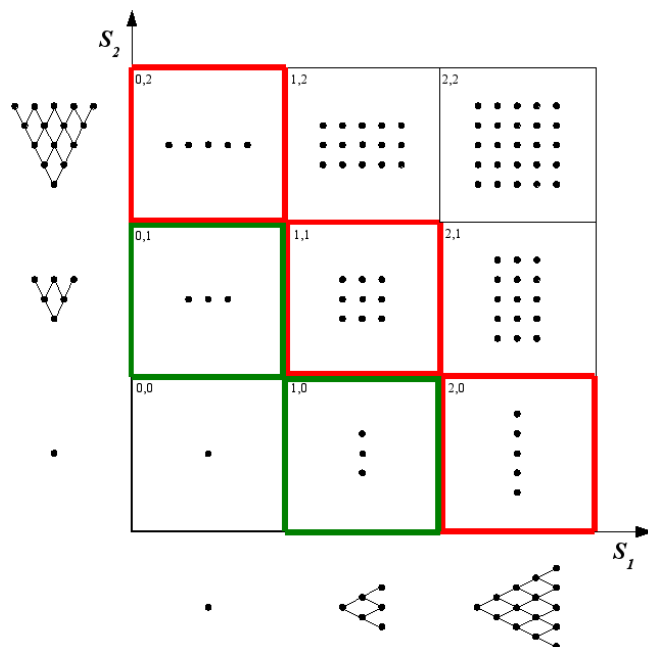


Abb. 3.7: Anisotrope Binomialbäume, die in zwei Dimensionen bei der Kombinationstechnik mit Level $\ell = 2$ verwendet werden

Lemma 3.3.1 [ANZAHL DER KNOTEN IM ANISOTROPEN BAUM]

Die Anzahl der Knoten im anisotropen Tensorproduktbaum $S_{\mathbf{k}}^d$ beträgt

$$\sum_{j=0}^{2^{k_{\min}}} \prod_{i=1}^d (j \cdot s_i + 1), \quad (3.3.11)$$

wobei

$$s_i := \frac{2^{k_i}}{\min(2^{\mathbf{k}})} = 2^{k_i - k_{\min}}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.3.12)$$

die Schrittweite im i -ten eindimensionalen Binomialbaum angibt.

Beweis 3.3.1. Der anisotrope Tensorproduktbaum $S_{\mathbf{k}}^d$ besitzt $2^{k_{\min}}$ Zeitschritte. Das bedeutet, dass wir über alle Zeitscheiben $0, \dots, 2^{k_{\min}}$ die Knoten summieren müssen. Auf einer Zeitscheibe ergibt sich die Anzahl der Knoten als Produkt der Knoten aus den eindimensionalen Bäumen zum entsprechenden Zeitpunkt. Jeder eindimensionale Baum muss mit der Schrittweite

$$s_i = 2^{k_i - k_{\min}}, \quad i = 1, \dots, d,$$

durchlaufen werden, um die Zeitscheiben, die im anisotropen Baum vorkommen, zu treffen. Auf jeder Zeitscheibe wird dann die Anzahl der Knoten ermittelt. Zum Zeitpunkt j , $j = 0, \dots, 2^{k_{\min}}$, beträgt die Anzahl der Knoten im i -ten eindimensionalen Binomialbaum

$$j \cdot s_i + 1 = j \cdot 2^{k_i - k_{\min}} + 1.$$

Produktbildung über alle Dimensionen ergibt

$$\prod_{i=1}^d (j \cdot 2^{k_i - k_{\min}} + 1).$$

Schließlich liefert die Summation über alle Zeitscheiben das Gewünschte

$$\sum_{j=0}^{2^{k_{\min}}} \prod_{i=1}^d (j \cdot s_i + 1).$$

□

Mit Hilfe des Lemmas können wir die Größe eines anisotropen und isotropen Binomialbaums bestimmen. Der Gesamtaufwand des Dünngitter-Binomialverfahrens ist durch die Summe der Knoten aller Bäume gegeben, die für die Kombinationstechnik benötigt werden. Hierfür können wir folgendes Resultat festhalten.

Lemma 3.3.2 [AUFWAND DES DÜNNGITTER-BINOMIALVERFAHRENS]

Der Aufwand des Dünngitter-Binomialverfahrens zum Level ℓ ist von der Ordnung

$$N = \mathcal{O}(\ell^{d-1} \cdot 2^\ell). \quad (3.3.13)$$

Beweis 3.3.2. Die Kosten, die zur Berechnung des Optionspreises mit dem Dünngitter-Binomialverfahren notwendig sind, werden durch die Summe der Knoten aller Bäume bestimmt, die für die Kombinationstechnik zum Level ℓ benötigt werden. Die Anzahl der Knoten in einem Binomialbaum können wir mit Hilfe des Lemmas 3.3.1 angeben. Die Kombinationstechnik zum Level ℓ verwendet die Bäume $S_{\mathbf{k}}^d$, für die $\ell - d + 1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell$ gilt. Damit ergibt sich für den Aufwand

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell-d+1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell} \sum_{j=0}^{2^{k_{\min}}} \prod_{i=1}^d \left(j \cdot 2^{k_i - k_{\min}} + 1 \right) \\
& \leq \sum_{\ell-d+1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell} \left(2^{k_{\min}} + 1 \right) \prod_{i=1}^d \left(2^{k_{\min}} \cdot 2^{k_i - k_{\min}} + 1 \right) \\
& = \sum_{\ell-d+1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell} \left(2^{k_{\min}} + 1 \right) \prod_{i=1}^d \left(2^{k_i} + 1 \right) \\
& \leq \sum_{\ell-d+1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell} \left(2^{k_{\min}} + 1 \right) \prod_{i=1}^d \left(2^{k_i+1} \right) \\
& = \sum_{\ell-d+1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell} \left(2^{k_{\min}} + 1 \right) \cdot 2^{|\mathbf{k}|_1+d} \\
& \leq \sum_{\ell-d+1 \leq |\mathbf{k}|_1 \leq \ell} 2^{|\mathbf{k}|_1+1} \cdot 2^{|\mathbf{k}|_1+d} \\
& = \sum_{j=\ell-d+1}^{\ell} \binom{j+d-1}{d-1} \cdot 2^{d+2} \cdot 2^j \\
& \leq \binom{\ell+d-1}{d-1} \cdot 2^{d+2} \sum_{j=\ell-d+1}^{\ell} 2^j \\
& = \binom{\ell+d-1}{d-1} \cdot 2^{d+2} \cdot \left(2^{\ell+1} - 2^{\ell-d+1} \right) \\
& = \binom{\ell+d-1}{d-1} \cdot 2^{d+2} \cdot 2^{\ell+1} \left(1 - 2^{-d} \right) \\
& \leq \binom{\ell+d-1}{d-1} \cdot 2^{d+3} \cdot 2^{\ell} \\
& \leq \frac{(\ell+d-1)^{d-1}}{(d-1)!} \cdot 2^{d+3} \cdot 2^{\ell} \\
& \leq (\ell+d-1)^{d-1} \cdot 2^{d+3} \cdot 2^{\ell} \\
& = \mathcal{O} \left(\ell^{d-1} \cdot 2^{\ell} \right).
\end{aligned}$$

□

Mit diesem Aufwand erwarten wir eine Gesamtkomplexität von

$$\varepsilon(N) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{3}{2}d}\right) \quad (3.3.14)$$

für das Dünngitter-Binomialverfahren. In Tabelle 3.1 stellen wir die Komplexitäten der drei mehrdimensionalen Binomialmodelle noch einmal zum Vergleich dar.

Method	Komplexität
BEG-Verfahren	$\varepsilon(N) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{d+1}}\right)$
Produktbinomialverfahren	$\varepsilon(N) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{d+1}}\right)$
Dünngitter-Binomialverfahren	$\varepsilon(N) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{3}{2}d}\right)$

Tabelle 3.1: Gesamtkomplexität der Binomialverfahren

3.3.4 Algorithmus des Dünngitter-Binomialverfahrens

Zur Berechnung des Optionspreises mit dem Dünngitter-Binomialverfahren benötigen wir im Wesentlichen zwei Algorithmen, den einen zur Berechnung des Optionswertes eines anisotropen Binomialbaums, den anderen für die Anwendung der Kombinationstechnik. Ersteren stellen wir an dieser Stelle nicht mehr dar, er verläuft analog zu dem Algorithmus aus Abschnitt 3.2.3, der mit Hilfe des Produktbinomialverfahrens Optionspreise für isotrope Bäume berechnet. Einzig zu beachten ist die richtige Wahl der Zeitschrittweite, die sich durch $1/2^{k_{min}}$ ergibt. Die Kombinationstechnik stellen wir in Algorithmus 3.3.1 dar.

```

Eingabe :  $d, \ell$ 
Ausgabe :  $\hat{V}_{\mathbf{0},0}^\ell$  als Näherung für  $V(S_1, \dots, S_d; 0)$ 

for  $i = 1$  to  $d$  do
  | Setze  $k_i = 0$ ;
end

 $q = 1$ ;
while  $k_d \leq \ell$  do
  | if  $k_q > \ell$  then
  |   |  $k_q = 0$ ;
  |   |  $q = q + 1$ ;
  | end
  | else
  |   | if  $|\mathbf{k}|_1 \geq \ell - d + 1$  &&  $|\mathbf{k}|_1 \leq \ell$  then
  |   |   |  $\hat{V}_{\mathbf{0},0}^\ell = \hat{V}_{\mathbf{0},0}^\ell + (-1)^{\ell - |\mathbf{k}|_1} \cdot \binom{d-1}{|\mathbf{k}|_1 - \ell + d - 1} \cdot V_{\mathbf{0},0}^{\mathbf{k}}$ ;
  |   |   end
  |   |  $q = 1$ ;
  | end
  |  $k_q = k_q + 1$ ;
end

return  $\hat{V}_{\mathbf{0},0}^\ell$ ;

```

Algorithmus 3.3.1 : Kombinationstechnik

Bei der Implementierung tritt die Schwierigkeit auf, dass die Dimension d ein variabler Parameter ist. Aus diesem Grunde kann die Zahl der benötigten For-Schleifen nicht a priori angegeben werden. Abhilfe schafft ein sogenannter Tröpfchen-Algorithmus, der in Algorithmus 3.3.1 zu sehen ist. Wie beim Aufzählen von Binärzahlen durchläuft er alle Kombinationen des Multiindex $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, indem er die einzelnen Komponenten der Reihe nach hochzählt.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir verschiedene Verfahren zur Bewertung sowohl von eindimensionalen als auch von höherdimensionalen Europäischen und Amerikanischen Optionen vorgestellt. In diesem Kapitel führen wir umfangreiche numerische Experimente durch, um das Konvergenzverhalten der Verfahren zu untersuchen und zu vergleichen.

In Abschnitt 4.1 beginnen wir mit einigen Parameterstudien für Plain Vanilla und Basket-Optionen, bevor wir im Folgenden das Konvergenzverhalten der verschiedenen Binomialmethoden für diese Optionen analysieren. In Abschnitt 4.2 werden wir die eindimensionalen Binomialmodelle CRR, JR, TN, ZA und LR betrachten. Für diese Modelle werden die Optionspreise für eine Europäische und eine Amerikanische Put-Option mit jeweils den selben Parametern berechnet und im Anschluss daran die Konvergenzraten bestimmt. Anschließend folgt in Abschnitt 4.3 die Untersuchung des Konvergenzverhaltens für Europäische Basket-Optionen im BEG-, Produkt- und Dünngitter-Binomialmodell. Dazu betrachten wir eine Europäische Basket-Option mit arithmetischem Mittel in zwei, vier und acht Dimensionen. Den Ausübungspreis variieren wir, um die Auswirkungen einer glatten bzw. einer nicht glatten Auszahlungsfunktion zu analysieren. Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der drei mehrdimensionalen Binomialmodelle und das Dünngitter-Binomialverfahren auf verbesserte Konvergenzeigenschaften. In Abschnitt 4.4 betrachten wir Power Baskets im BEG-, Produkt- und Dünngitter-Binomialmodell. Dabei untersuchen wir insbesondere den Einfluss des vorzeitigen Ausübungsrechts auf das Konvergenzverhalten.

4.1 Sensitivitäten

In Abschnitt 1.1 haben wir Plain Vanilla und Basket-Optionen eingeführt. Dabei haben wir erklärt, dass ein Basket von d Wertpapieren auf verschiedene Weisen definiert werden kann, z. B. als arithmetisches oder geometrisches Mittel, als Minimum oder Maximum der zugrunde liegenden Wertpapiere. Im Folgenden wollen wir mit einigen Sensitivitätsanalysen für diese Optionen beginnen und untersuchen, wie sich der Optionspreis mit zunehmender Dimension für die gewählten Baskets entwickelt.

Wir betrachten eine Europäische Call- und eine Europäische Put-Option. Die gewählten Eingabewerte für die Optionsparameter sind in Tabelle 4.1 angegeben.

In Abbildung 4.1 stellen wir den Optionspreis der Europäischen Call- und der Europäischen Put-Option für die verschiedenen Baskets dar. Dabei ist der Wert der Option gegen die Dimension, d. h. gegen die Anzahl an zugrunde liegenden Wertpapieren, aufgetragen für $1 \leq d \leq 10$. Zunächst wollen wir die Preisentwicklung der Europäischen Call-Option in Abbildung 4.1(a)

Parameter	Wert
Aktienkurs $S_i(0)$, $i = 1, \dots, 10$	100
Laufzeit T	1
risikoloser Zinssatz r	0.1
Volatilität σ_i , $i = 1, \dots, 10$	0.2
Korrelation ρ_{ij} , $1 \leq i < j \leq 10$	0.5

Tabelle 4.1: Gewählte Eingabewerte für die Optionsparameter

betrachten. Wir erkennen, dass für eine feste Dimension die Call-Option mit dem Maximum als Basket stets teurer ist als die entsprechende Call-Option mit dem Minimum. Dies liegt darin begründet, dass zum Fälligkeitszeitpunkt für die Werte der Baskets

$$\max_{1 \leq i \leq d} \{S_i\} \geq \min_{1 \leq i \leq d} \{S_i\}$$

und somit für die Auszahlungsfunktionen $\mathcal{H}_C(B) = (B(T) - K)^+$

$$\mathcal{H}_C \left(\max_{1 \leq i \leq d} \{S_i\} \right) \geq \mathcal{H}_C \left(\min_{1 \leq i \leq d} \{S_i\} \right)$$

gilt. Wählen wir als Basket das arithmetische Mittel der zugrunde liegenden Wertpapiere, so besitzt die d -dimensionale Call-Option einen höheren Preis als bei Verwendung des geometrischen Mittels. In diesem Falle gilt nämlich für die Payoff-Funktionen

$$\mathcal{H}_C \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_i \right) \geq \mathcal{H}_C \left(\left(\prod_{i=1}^d S_i \right)^{\frac{1}{d}} \right)$$

aufgrund der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel. Als nächstes vergleichen wir den Preis einer d -dimensionalen mit dem einer $(d+1)$ -dimensionalen Call-Option. Im Falle des Maximums ist die $(d+1)$ -dimensionale Call-Option stets teurer, da der Wert des Baskets größer ist, d. h.

$$\max_{1 \leq i \leq d+1} \{S_i(T)\} \geq \max_{1 \leq i \leq d} \{S_i(T)\},$$

und somit auch die Auszahlungsfunktion einen höheren Wert besitzt. Bei der Wahl des Minimums zeigt sich erwartungsgemäß ein gegenteiliger Sachverhalt. Unter Verwendung des arithmetischen oder des geometrischen Mittels bleibt der Optionspreis mit zunehmender Dimension nahezu konstant.

Als nächstes analysieren wir die Sensitivität der Europäischen Put-Option aus Abbildung 4.1(b). Dabei untersuchen wir wieder zuerst den Einfluss der Wahl des Baskets auf den Optionspreis. Vergleichen wir die Werte der Put-Option für das Maximum und das Minimum miteinander, so erkennen wir in Hinsicht auf die zuvor betrachtete Call-Option einen gegenteiligen Sachverhalt. Für eine feste Dimension ist die Put-Option, deren Basket als Maximum der zugrunde liegenden Wertpapiere definiert ist, stets billiger. Der Grund hierfür liegt in der Struktur der

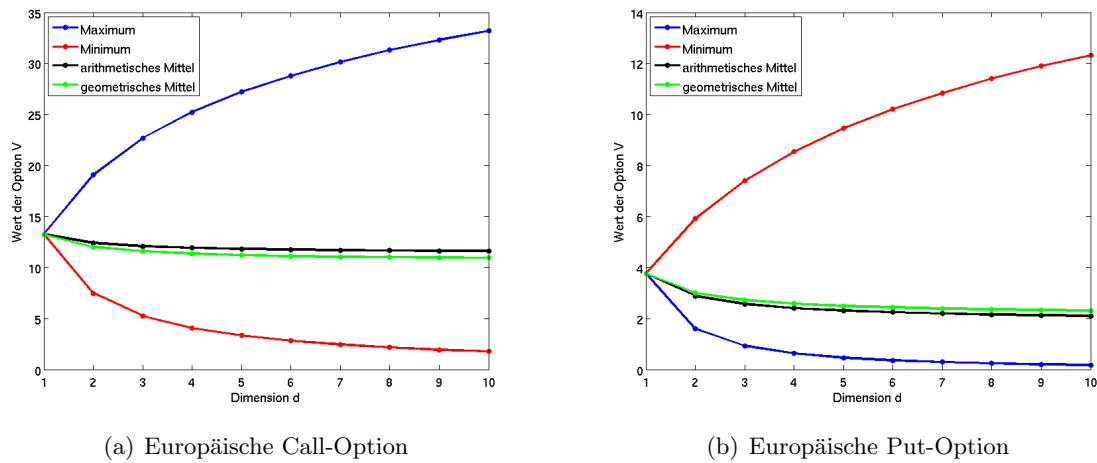


Abb. 4.1: Optionspreise in Abhängigkeit der Dimension für verschiedene Baskets

Auszahlungsfunktion $\mathcal{H}_P(B) = (K - B(T))^+$, so dass

$$\mathcal{H}_P\left(\max_{1 \leq i \leq d} \{S_i\}\right) \leq \mathcal{H}_P\left(\min_{1 \leq i \leq d} \{S_i\}\right)$$

gilt. Aufgrund der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel ist der Wert des Baskets für das arithmetische Mittel immer größer als der für das geometrische Mittel. Der Wert der Payoff-Funktion ist dann im Falle einer Put-Option kleiner, das bedeutet

$$\mathcal{H}_P\left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_i\right) \leq \mathcal{H}_P\left(\left(\prod_{i=1}^d S_i\right)^{\frac{1}{d}}\right).$$

Zuletzt betrachten wir eine d -dimensionale und eine $(d+1)$ -dimensionale Put-Option im Vergleich. Wenn wir das Maximum der Wertpapiere als Basket der Option wählen, so sehen wir, dass die $(d+1)$ -dimensionale Put-Option einen niedrigeren Preis besitzt. Wie zuvor bei der Call-Option ist der Wert des Baskets größer, allerdings liefert die Auszahlungsfunktion im Falle der Put-Option einen niedrigeren Wert. Ein gegenteiliger Sachverhalt zeigt sich wieder für das Minimum. Für die Wahl des arithmetischen oder des geometrischen Mittels bleiben die Optionspreise fast unverändert.

4.2 Europäische und Amerikanische Optionen

In den Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.5 haben wir die verschiedenen eindimensionalen Binomialverfahren vorgestellt. Im Folgenden wollen wir die Konvergenz der Verfahren für $\Delta t \rightarrow 0$ gegen das kontinuierliche Black-Scholes-Modell analysieren und vergleichen. Dabei untersuchen wir das LR-Binomialmodell auf verbesserte Konvergenzeigenschaften gegenüber den anderen Modellen.

Parameter	Wert
Aktienkurs S_0	100
Ausübungspreis K	110
Laufzeit T	1
risikoloser Zinssatz r	0.05
Volatilität σ	0.3

Tabelle 4.2: Gewählte Eingabewerte für die Optionsparameter

Wir wollen eine Europäische und eine Amerikanische Put-Option mit den selben Optionsparametern betrachten. Die Eingabewerte für die Optionsparameter sind in Tabelle 4.2 angegeben und werden in diesem Abschnitt für sämtliche Optionspreisberechnungen verwendet. Wir berechnen den exakten Wert der Europäischen Option mit Hilfe der Black-Scholes-Formel. Da für die Amerikanische Option keine analytische Lösung existiert, verwenden wir als Referenzwert einen Optionspreis aus dem CRR-Modell, den wir mit einer hohen Anzahl an Zeitschritten berechnen.

Europäische Put-Option

Wir bestimmen den exakten Wert der Europäischen Put-Option mit den zugrunde liegenden Parametern aus Tabelle 4.2 über die Black-Scholes-Formel 1.3.15 aus Abschnitt 1.3.2. Er beträgt 14.65531432. Dabei wird die kumulative Standardnormalverteilung mit Hilfe des Moro-Verfahrens berechnet.

Um die Konvergenz der verschiedenen Binomialverfahren zu zeigen, erhöhen wir die Anzahl an Zeitschritten sukzessive. In Tabelle 4.3 geben wir die Werte der Europäischen Put-Option für die jeweilige Anzahl an Zeitschritten an. Des Weiteren ist der absolute Fehler zwischen den Optionspreisen aus den verschiedenen Binomialmodellen und dem exakten Black-Scholes-Wert in Tabelle 4.4 aufgeführt.

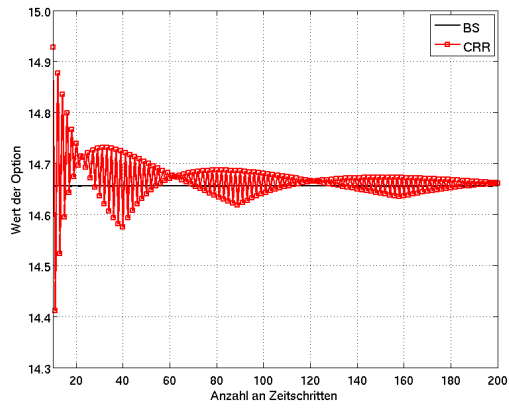
In Abbildung 4.2 stellen wir die Optionspreisentwicklung für die verschiedenen Binomialmodelle grafisch dar. Dabei ist der Wert der Europäischen Put-Option gegen die Anzahl an Zeitschritten aufgetragen, und wir beschränken M auf 200. Zum Vergleich ist der exakte Wert aus der Black-Scholes-Formel als horizontale Gerade eingezeichnet. Wir erkennen, dass die Approximation an den Optionspreis aus dem CRR-, JR- und TN-Binomialmodell stark um den Black-Scholes-Wert schwankt. Das Konvergenzverhalten weist eine Art Wellenstruktur auf. Auch im ZA-Modell treten diese Schwankungen auf. Allerdings finden sie symmetrisch um den exakten Wert statt, was bedeutet, dass dieser in gleichem Maße unter- und überschritten wird. Mit zunehmender Anzahl an Zeitschritten werden die Oszillationen immer geringer. Im Unterschied zu den bisher diskutierten Binomialmodellen konvergiert das LR-Modell monoton gegen den exakten Wert. Man erkennt sehr gut, wie sich der Optionspreis mit zunehmender Anzahl an Zeitschritten monoton fallend dem Black-Scholes-Wert nähert. Das bedeutet, dass der exakte Wert im Gegensatz zu den anderen Binomialverfahren nicht unterschritten wird. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die Anwendung dieses Verfahrens nur für eine ungerade Anzahl an Zeitschritten möglich ist. Wenn wir die Ergebnisse der anderen Modelle ebenso nur für ungerade

M	V_{CRR}	V_{JR}	V_{TN}	V_{ZA}	V_{LR}
11	14.41143996	14.36568588	14.77240838	14.92986264	14.65982123
21	14.69652021	14.67464429	14.65423281	14.79851860	14.65661414
31	14.73109775	14.72326933	14.61248746	14.75216348	14.65592124
41	14.72084643	14.72184830	14.59114984	14.72847750	14.65566435
51	14.69991084	14.70709908	14.60780024	14.71409981	14.65554175
61	14.67701395	14.68883880	14.63304916	14.70444467	14.65547386
71	14.65478926	14.67025271	14.64847687	14.69751360	14.65543238
81	14.63402982	14.65244551	14.65821314	14.69229630	14.65540520
91	14.62295481	14.63577354	14.66444034	14.68822711	14.65538643
101	14.64308225	14.62630258	14.66840212	14.68496463	14.65537293
111	14.65629355	14.64300863	14.67084927	14.68229059	14.65536289
121	14.66467674	14.65447220	14.67225606	14.68005897	14.65535523
131	14.66961863	14.66215480	14.67293330	14.67816835	14.65534924
141	14.67206731	14.66706180	14.67309085	14.67654614	14.65534448
151	14.67268675	14.66990195	14.67287396	14.67513895	14.65534063
161	14.67195159	14.67118538	14.67238533	14.67390669	14.65533748
171	14.67020705	14.67128586	14.67169883	14.67281866	14.65533486
181	14.66770800	14.67048151	14.67086840	14.67185094	14.65533265
191	14.66464501	14.66898205	14.66993392	14.67098460	14.65533079

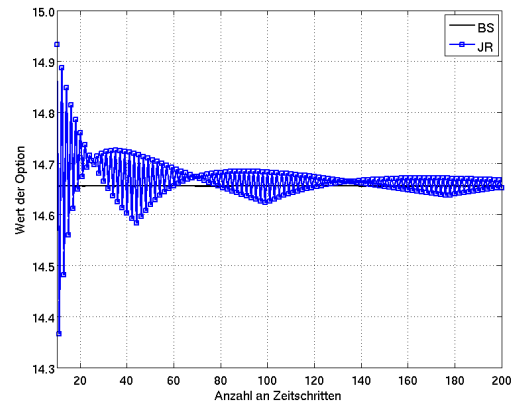
Tabelle 4.3: Optionswerte der Europäischen Put-Option berechnet mit den verschiedenen Binomialverfahren

M	$ V_{BS} - V_{CRR} $	$ V_{BS} - V_{JR} $	$ V_{BS} - V_{TN} $	$ V_{BS} - V_{ZA} $	$ V_{BS} - V_{LR} $
11	0.24387436	0.28962844	0.11709406	0.27454832	0.00450691
21	0.04120589	0.01932997	0.00108151	0.14320428	0.00129982
31	0.07578343	0.06795501	0.04282686	0.09684916	0.00060692
41	0.06553211	0.06653398	0.06416448	0.07316318	0.00035003
51	0.04459652	0.05178476	0.04751408	0.05878549	0.00022743
61	0.02169963	0.03352448	0.02226516	0.04913035	0.00015954
71	0.00052506	0.01493839	0.00683745	0.04219928	0.00011806
81	0.02128450	0.00286881	0.00289882	0.03698198	0.00009088
91	0.03235951	0.01954078	0.00912602	0.03291279	0.00007211
101	0.01223207	0.02901174	0.01308780	0.02965031	0.00005861
111	0.00097923	0.01230569	0.01553495	0.02697627	0.00004857
121	0.00936242	0.00084212	0.01694174	0.02474465	0.00004091
131	0.01430431	0.00684048	0.01761898	0.02285403	0.00003492
141	0.01675299	0.01174748	0.01777653	0.02123182	0.00003016
151	0.01737243	0.01458763	0.01755964	0.01982463	0.00002631
161	0.01663727	0.01587106	0.01707101	0.01859237	0.00002316
171	0.01489273	0.01597154	0.01638451	0.01750434	0.00002054
181	0.01239368	0.01516719	0.01555408	0.01653662	0.00001833
191	0.00933069	0.01366773	0.01461960	0.01567028	0.00001647

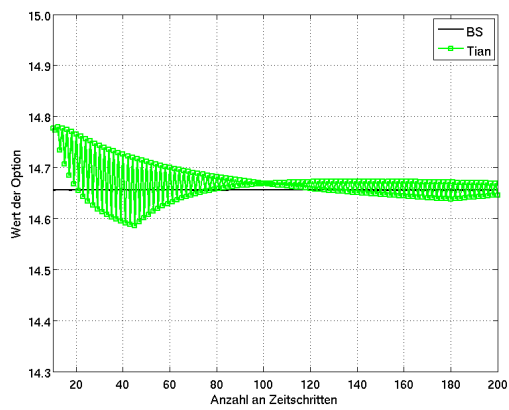
Tabelle 4.4: Absoluter Fehler der Optionswerte zum exakten Black-Scholes-Wert 14.65531432



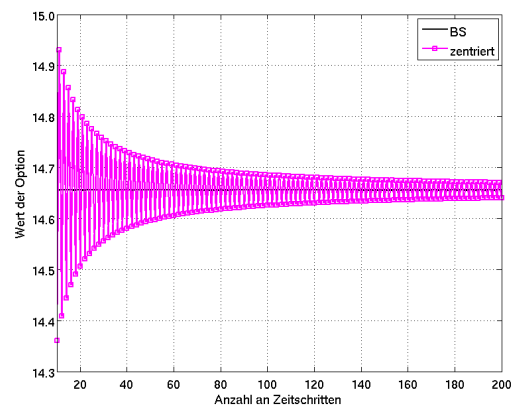
(a) CRR-Modell



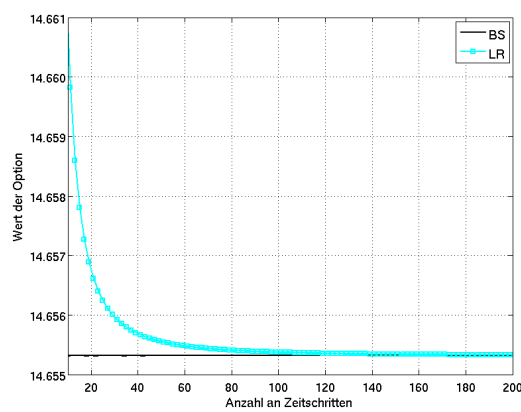
(b) JR-Modell



(c) TN-Modell

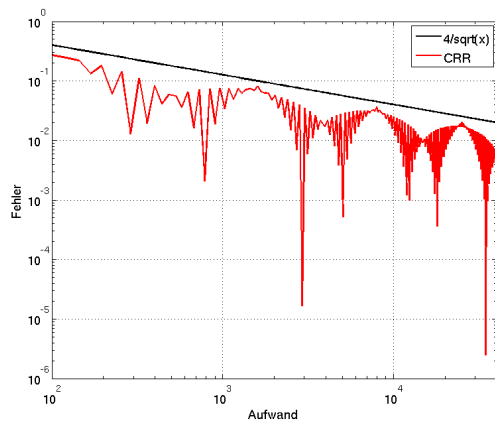


(d) ZA-Modell

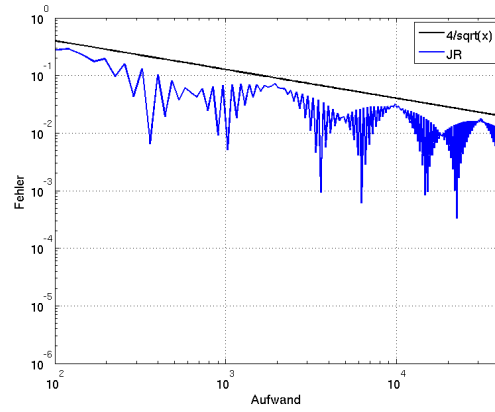


(e) LR-Modell

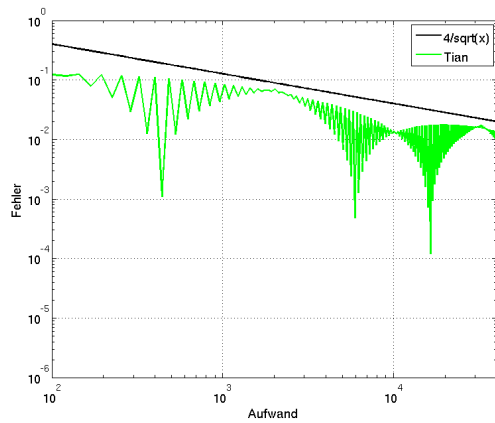
Abb. 4.2: Preisentwicklung einer Europäischen Put-Option



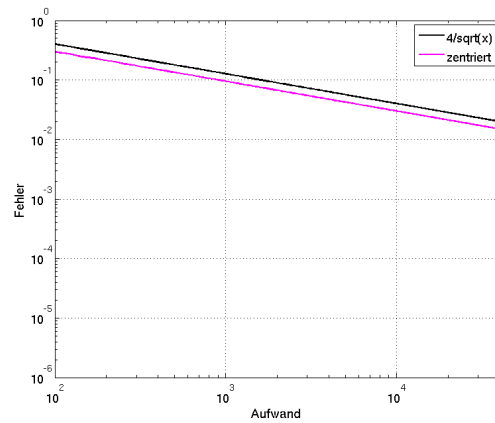
(a) CRR-Modell



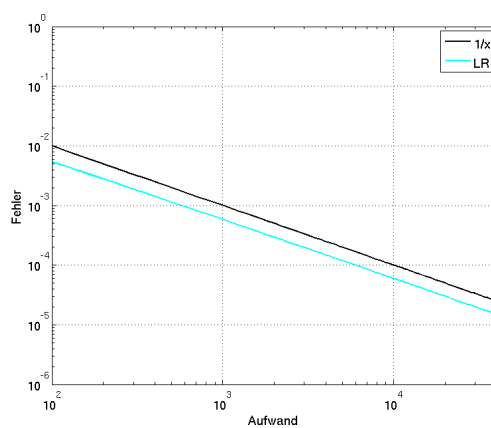
(b) JR-Modell



(c) TN-Modell



(d) ZA-Modell



(e) LR-Modell

Abb. 4.3: Konvergenzraten der verschiedenen Binomialmethoden

Anzahlen an Zeitschritten darstellen, ist die Konvergenz zum Teil vergleichbar. Im LR-Modell ist aber der Anfangsfehler geringer als in den vorherigen Modellen.

In Abbildung 4.3 ist der absolute Fehler in Abhängigkeit vom Aufwand dargestellt. Der Aufwand der eindimensionalen Binomialmethode beträgt M^2 , d. h. er wächst quadratisch mit der Anzahl an Zeitschritten. Man sieht in Abbildung 4.3(a) bis 4.3(c), dass die Konvergenzrate des CRR-, JR- und TN-Binomialmodells $1/2$ beträgt. Auch die Konvergenzrate des ZA-Binomialmodells ist $1/2$, allerdings konvergiert das Verfahren wesentlich monotoner ohne Oszillationen. Der Anfangsfehler liegt in allen vier Modellen bei ungefähr 0.3, im TN-Modell ist er etwas geringer. Betrachten wir nun das Konvergenzverhalten im LR-Binomialmodell. Abbildung 4.3(e) zeigt, dass das LR-Binomialverfahren monoton mit Konvergenzrate 1 gegen den Black-Scholes-Wert konvergiert. Zusätzlich ist der Anfangsfehler geringer als bei den übrigen Modellen. Dies stellt eine erhebliche Verbesserung im Vergleich zu den anderen Methoden dar.

Amerikanische Put-Option

Des Weiteren wollen wir auch das Konvergenzverhalten einer Amerikanischen Put-Option für die verschiedenen eindimensionalen Binomialmodelle untersuchen. Hierfür legen wir wieder die Parameterwerte aus Tabelle 4.2 zugrunde. Anders als bei den Europäischen Optionen existiert für diesen Optionstyp keine geschlossene Lösungsformel und somit kein exakter Wert der Option. Aus diesem Grunde berechnen wir einen Referenzwert aus dem CRR-Modell mit einer sehr hohen Anzahl an Zeitschritten. Wir wählen hierfür $M = 1.5 \cdot 10^6$ und erhalten als Referenzwert 15.61767225.

Zunächst geben wir die Optionspreise der Amerikanischen Put-Option für die einzelnen Verfahren und die jeweilige Anzahl an Zeitschritten in Tabelle 4.5 an. Zusätzlich führen wir den absoluten Fehler zum berechneten Referenzwert in Tabelle 4.6 auf.

Die Entwicklung des Optionspreises der Amerikanischen Put-Option ist für die einzelnen Binomialmodelle in Abbildung 4.4 veranschaulicht. Die Optionspreisentwicklung für das CRR-, JR- und TN-Binomialmodell verläuft ähnlich wie im Falle der Europäischen Put-Option. Man erkennt wieder die Wellenstruktur sowie die starken Schwankungen im Optionswert. Auch für das ZA-Binomialmodell sind keine Veränderungen im Vergleich zur Europäischen Option erkennbar. Der Optionspreis schwankt symmetrisch um den Referenzwert, wobei die Oszillationen mit zunehmender Anzahl an Zeitschritten immer geringer werden. Auffällig ist die Entwicklung des Optionspreises im LR-Modell. Dieser nähert sich leicht oszillierend von unten dem Referenzwert an im Gegensatz zur Europäischen Option, bei der er von oben monoton gegen den exakten Black-Scholes-Wert konvergiert. Dabei wird der Referenzwert nicht überschritten. Die geringen Oszillationen zu Beginn gleichen sich mit zunehmender Anzahl an Zeitschritten aus.

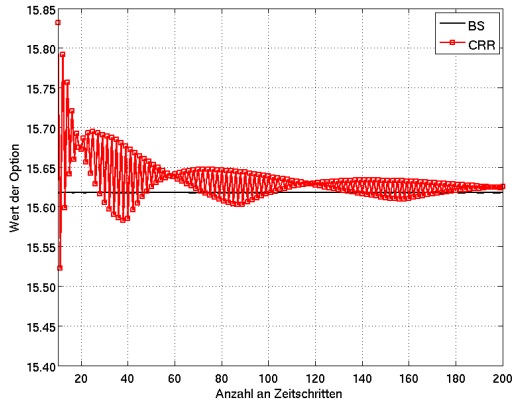
In Abbildung 4.5 ist der absolute Fehler gegen den Aufwand aufgetragen. Wie im Falle der Europäischen Put-Option ist das Konvergenzverhalten des CRR-, JR- und TN-Binomialmodells stark oszillierend und sehr ähnlich. Die Konvergenzrate beträgt weiterhin $1/2$. Im ZA-Modell verhält sich der Fehler im Unterschied zu Abbildung 4.3(d) oszillierend, allerdings weniger stark als in den vorherigen Modellen. Die Konvergenzrate beträgt auch hier $1/2$. Betrachten wir nun die Konvergenzrate des LR-Modells, so fällt auf, dass diese analog zu den bisherigen Verfahren

M	V_{CRR}	V_{JR}	V_{TN}	V_{ZA}	V_{LR}
11	15.52231322	15.48702790	15.72089729	15.81593021	15.55287884
21	15.68623053	15.67208061	15.62568006	15.72158955	15.58507929
31	15.68915038	15.68542177	15.59717355	15.68679976	15.59446924
41	15.67194148	15.67474078	15.57969537	15.66744731	15.59724905
51	15.65329526	15.65962222	15.57789717	15.65711303	15.60128813
61	15.63496503	15.64351008	15.59628693	15.65298974	15.60599094
71	15.61988747	15.63050819	15.60647150	15.64599950	15.60563795
81	15.60723141	15.61786409	15.61258222	15.64445764	15.60916025
91	15.60580260	15.60845787	15.61916609	15.63993399	15.60848837
101	15.61811301	15.60666210	15.62158621	15.63898317	15.61066034
111	15.62606677	15.61732032	15.62437106	15.63599498	15.61027415
121	15.63049086	15.62403540	15.62626312	15.63513935	15.61149270
131	15.63282919	15.62838478	15.62615809	15.63382316	15.61205403
141	15.63360600	15.63089452	15.62815249	15.63225140	15.61195122
151	15.63316597	15.63193196	15.62662591	15.63190920	15.61297692
161	15.63203097	15.63214601	15.62773190	15.63044656	15.61273242
171	15.63023801	15.63160071	15.62789191	15.62984634	15.61310812
181	15.62808299	15.63051302	15.62607995	15.62957478	15.61378429
191	15.62581641	15.62912185	15.62694867	15.62849223	15.61354560

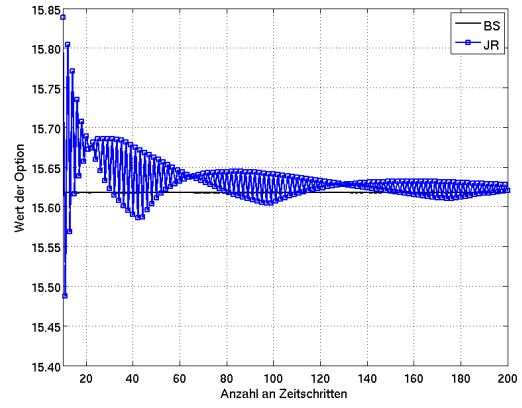
Tabelle 4.5: Optionswerte der Amerikanischen Put-Option berechnet mit den verschiedenen Binomialverfahren

M	$ V_{BS} - V_{CRR} $	$ V_{BS} - V_{JR} $	$ V_{BS} - V_{TN} $	$ V_{BS} - V_{ZA} $	$ V_{BS} - V_{LR} $
11	0.09535903	0.13064435	0.10322504	0.19825796	0.06479341
21	0.06855828	0.05440836	0.00800781	0.10391730	0.03259296
31	0.07147813	0.06774952	0.02049870	0.06912751	0.02320301
41	0.05426923	0.05706853	0.03797688	0.04977506	0.02042320
51	0.03562301	0.04194997	0.03977508	0.03944078	0.01638412
61	0.01729278	0.02583783	0.02138532	0.03531749	0.01168131
71	0.00221522	0.01283594	0.01120075	0.02832725	0.01203430
81	0.01044084	0.00019184	0.00509003	0.02678539	0.00851200
91	0.01186965	0.00921438	0.00149384	0.02226174	0.00918388
101	0.00044076	0.01101015	0.00391396	0.02131092	0.00701191
111	0.00839452	0.00035193	0.00669881	0.01832273	0.00739810
121	0.01281861	0.00636315	0.00859087	0.01746710	0.00617955
131	0.01515694	0.01071253	0.00848584	0.01615091	0.00561822
141	0.01593375	0.01322227	0.01048024	0.01457915	0.00572103
151	0.01549372	0.01425971	0.00895366	0.01423695	0.00469533
161	0.01435872	0.01447376	0.01005965	0.01277431	0.00493983
171	0.01256576	0.01392846	0.01021966	0.01217409	0.00456413
181	0.01041074	0.01284077	0.00840770	0.01190253	0.00388796
191	0.00814416	0.01144960	0.00927642	0.01081998	0.00412665

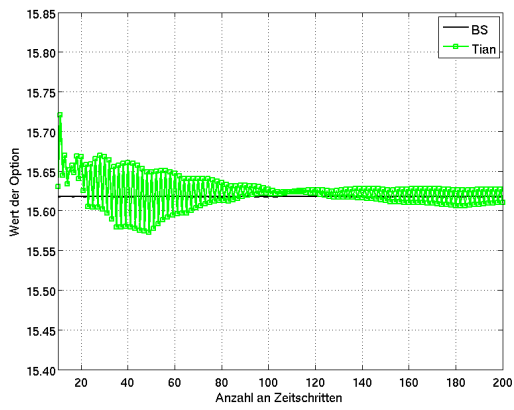
Tabelle 4.6: Absoluter Fehler der Optionswerte zum Referenzwert 15.61767225



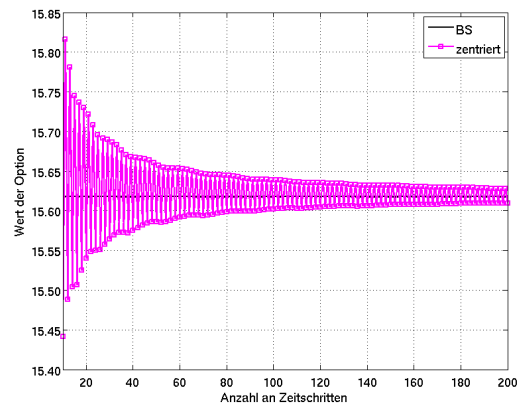
(a) CRR-Modell



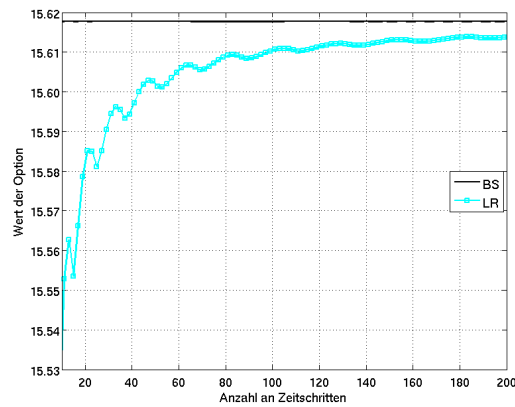
(b) JR-Modell



(c) TN-Modell

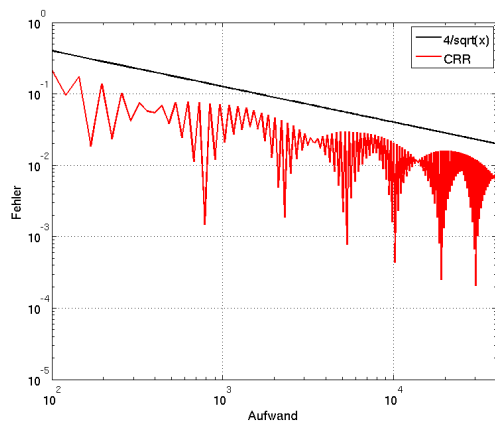


(d) ZA-Modell

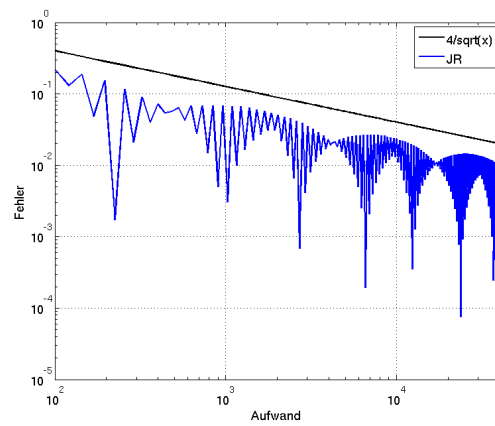


(e) LR-Modell

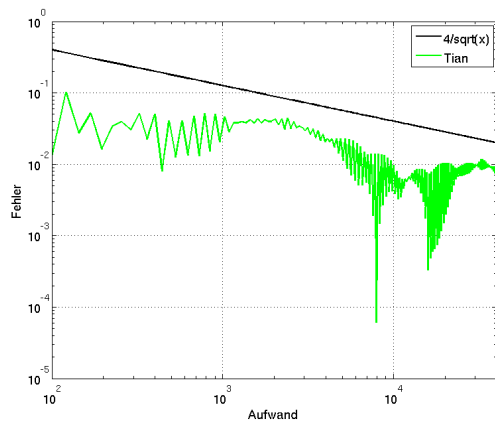
Abb. 4.4: Preisentwicklung einer Amerikanischen Put-Option



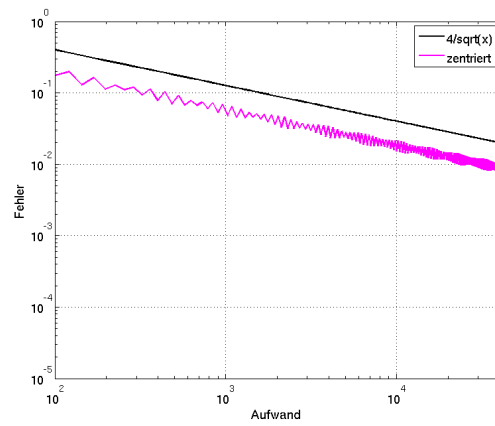
(a) CRR-Modell



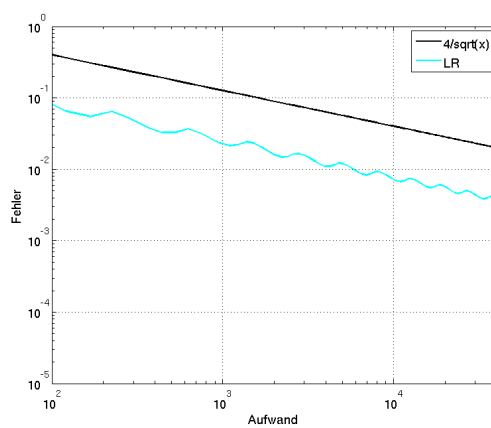
(b) JR-Modell



(c) TN-Modell



(d) ZA-Modell



(e) LR-Modell

Abb. 4.5: Konvergenzraten der verschiedenen Binomialmethoden

$1/2$ ist und nicht 1 wie zuvor im Falle der Europäischen Option. Somit liefert dieses Verfahren für Amerikanische Optionen keine Verbesserung hinsichtlich der Konvergenzrate. Allerdings verbessert sich die Konstante geringfügig auf 0.1, und es treten kaum Oszillationen auf. Eine mögliche Erklärung für die unterschiedlichen Konvergenzraten des LR-Modells für Europäische und für Amerikanische Optionen ist das vorzeitige Ausübungsrecht der Amerikanischen Option. In der Rückwärtsphase des Binomialverfahrens berechnet sich der Wert der Amerikanischen Option an einem Knoten im Baum als Maximum des diskontierten Erwartungswertes zum zukünftigen Zeitpunkt und des inneren Wertes an diesem Knoten. Im Erwartungswert ist die veränderte Wahrscheinlichkeit aus dem LR-Modell enthalten, auf den inneren Wert hingegen hat sie keinen Einfluss. Entspricht nun der Wert der Amerikanischen Option an vielen Knoten des Baumes dem inneren Wert, so geht der Einfluss der veränderten Wahrscheinlichkeit verloren, was vermutlich zum Verlust der verbesserten Konvergenzeigenschaft führt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das LR-Binomialverfahren zur Berechnung von eindimensionalen Europäischen Optionen das effizienteste Verfahren darstellt. Im Vergleich zu den anderen vorgestellten Verfahren besitzt es eine Konvergenzrate in Höhe von 1, wohingegen die anderen Verfahren mit einer Rate von $1/2$ konvergieren.

Bei der Berechnung des Preises einer eindimensionalen Amerikanischen Option liefert das LR-Binomialverfahren die genauesten Ergebnisse. Allerdings konvergiert es wie die anderen Modelle auch nur mit einer Rate von $1/2$. Die verbesserten Konvergenzeigenschaften im LR-Modell, die wir für Europäische Optionen gesehen haben, gehen wahrscheinlich aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechts verloren.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns darauf, das Konvergenzverhalten des Optionspreises für die vorgestellten Binomialmodelle CRR, JR, TN, ZA und LR zu untersuchen. Des Weiteren sind auch die partiellen Ableitungen des Preises nach den jeweiligen Modellparametern, die sogenannten Greeks, von Interesse. Für einen Vergleich, wie genau die Greeks mit dem CRR-, JR-, TN-, ZA- und LR-Modell bestimmt werden können, verweisen wir auf [WW].

4.3 Europäische Basket-Optionen

Im Folgenden wollen wir uns der Bewertung von mehrdimensionalen Europäischen Optionen widmen. Hierfür werden wir die Konvergenzeigenschaften des BEG-, des Produkt- und des Dünngitter-Binomialverfahrens untersuchen und vergleichen. Dabei werden wir besonderes Augenmerk auf den Einfluss einer glatten bzw. einer nicht glatten Payoff-Funktion auf das Konvergenzverhalten der Dünngitter-Binomialmethode richten. Im Anschluss daran werden wir die Auswirkungen der Dimension analysieren.

Wir wollen eine zwei-, eine vier- und eine achtdimensionale Europäische Call-Option mit den Parameterwerten aus Tabelle 4.7 betrachten. Als Basket dieser Optionen wählen wir das arithmetische Mittel der zugrunde liegenden Aktien. Den Ausübungspreis K der Option wollen wir variieren und somit die Auswirkungen einer glatten bzw. nicht glatten Payoff-Funktion untersuchen. Wir wählen $K = 0, 50, 80, 100$. Für diese vier Möglichkeiten der Wahl des Ausübungspreises stellen wir die Payoff-Funktionen in Abbildung 4.6 dar. Dort ist der Wert der

Parameter	Wert
Aktienkurs $S_i(0)$, $i = 1, \dots, 8$	100
Laufzeit T	1
risikoloser Zinssatz r	0.1
Volatilität σ_i , $i = 1, \dots, 8$	0.2
Korrelation ρ_{ij} , $1 \leq i < j \leq 8$	0.5

Tabelle 4.7: Gewählte Eingabewerte für die Optionsparameter der Europäischen Call-Option

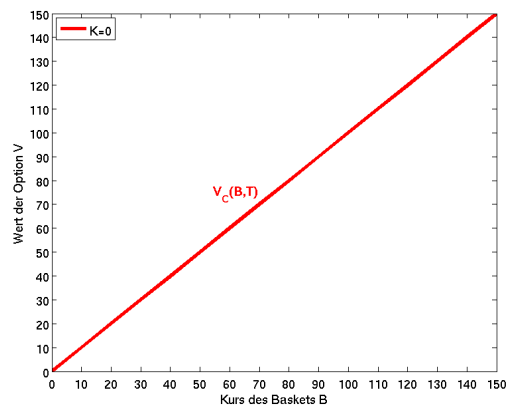
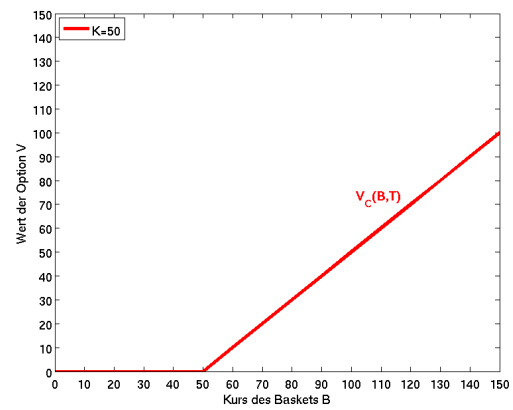
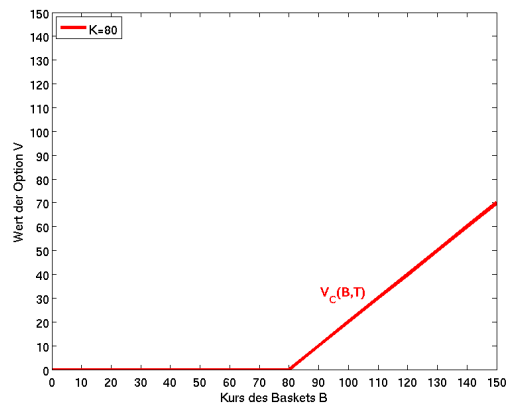
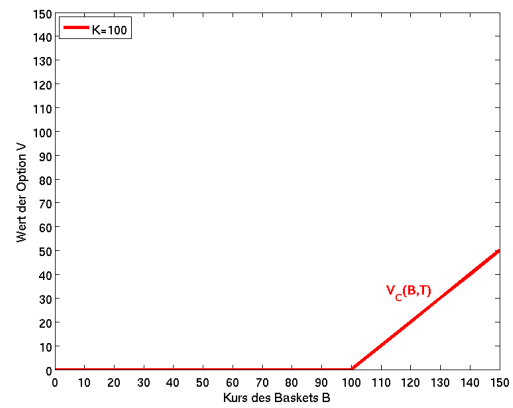
Call-Option gegen den Wert des Baskets zum Fälligkeitszeitpunkt aufgetragen. Man erkennt, dass sich der Knick in der Auszahlungsfunktion mit zunehmendem Wert des Baskets immer weiter nach rechts verschiebt. Für unsere Parameterwahl aus Tabelle 4.7 fällt er damit immer mehr in den relevanten Bereich der Basketwerte zum Fälligkeitszeitpunkt. Das bedeutet, dass der Knick in der Payoff-Funktion, die für die Wahl $K = 0$ noch glatt ist, für einen größer werdenden Ausübungspreis zunehmend an Bedeutung gewinnt.

In Abbildung 4.7 ist der relative Fehler in Abhängigkeit vom Aufwand für das zwei-, das vier- und das achtdimensionale BEG-, Produkt- und Dünngitter-Binomialverfahren und für die gewählten Ausübungspreise dargestellt. Als Maß für den Aufwand wählen wir wieder die Anzahl der Knoten im Baum. Für das BEG- und das Produktbinomialverfahren ist dieser von der Ordnung $\mathcal{O}(M^{d+1})$. Damit ergeben sich also Kosten der Ordnung $\mathcal{O}(M^3)$ für $d = 2$, $\mathcal{O}(M^5)$ für $d = 4$ und $\mathcal{O}(M^9)$ für $d = 8$. Für das Dünngitter-Binomialverfahren setzt sich der Aufwand aus der Summe der Anzahl der Knoten über alle Bäume, die für das entsprechende Level benötigt werden, zusammen. Da für die Europäische Basket-Option keine analytische Lösung existiert, berechnen wir eine Referenzlösung mittels des Monte-Carlo Verfahrens mit einer sehr hohen Anzahl an Stützstellen. Mit $N = 10^8$ Stützstellen erhalten wir die in Tabelle 4.8 angegebenen Referenzwerte.

Wir beginnen damit, den Einfluss der Glattheit der Auszahlungsfunktion auf das Konvergenzverhalten zu untersuchen. Zunächst betrachten wir den Fall $K = 0$. Wir erkennen, dass die Optionspreise, die wir mit Hilfe der drei mehrdimensionalen Binomialmodelle berechnen, monoton gegen die Referenzlösung konvergieren. Dabei besitzen das BEG- und das Produktbinomialmodell die selbe Konvergenzrate, sie unterscheiden sich lediglich in der Höhe des Anfangsfehlers. Dieser beträgt in zwei Dimensionen für das BEG-Verfahren ungefähr 10^{-3} und verbessert sich auf 10^{-4} für das Produktbinomialverfahren. Auch für die vierdimensionale Option ist der Anfangsfehler in Höhe von 10^{-3} im Produktbinomialmodell deutlich geringer als im BEG-Modell. Dort liegt er bei ungefähr 10^{-5} . Betrachten wir nun den relativen Fehler für die Dünngitter-

	$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$
$K = 0$	99.99999999	99.99999999	99.99999999
$K = 50$	54.75813388	54.75813057	54.75813065
$K = 80$	27.79129587	27.71474151	27.68405491
$K = 100$	12.39775291	11.92139639	11.67132838

Tabelle 4.8: Referenzwerte für die Europäische Call-Option

(a) $K = 0$ (b) $K = 50$ (c) $K = 80$ (d) $K = 100$ Abb. 4.6: Auszahlungsfunktionen einer Call-Option zum Fälligkeitszeitpunkt T

Binomialmethode, so sehen wir deutlich verbesserte Konvergenzeigenschaften dieses Verfahrens. Es weist eine höhere Konvergenzrate als die beiden anderen Verfahren auf, wobei der Anfangsfehler in Höhe von 10^{-4} im zweidimensionalen Fall der Konstante aus dem Produktbinomialverfahren entspricht. Für die Option mit vier zugrunde liegenden Wertpapieren ist der Anfangsfehler von der Größenordnung 10^{-4} etwas höher als beim Produktbinomialverfahren, er wird jedoch schnell durch die verbesserten Konvergenzeigenschaften aufgehoben. Für den Fall $K = 50$ ist ein fast identisches Konvergenzverhalten erkennbar. Lediglich die Anfangsfehler sind geringfügig erhöht. Für diese Wahl der Parameter ist das Dünngitter-Binomialverfahren somit deutlich effizienter als das Produktbinomialverfahren, welches wiederum effizienter als das BEG-Verfahren ist.

Im Falle $K = 80$ sind die Auswirkungen der nicht mehr glatten Auszahlungsfunktion erkennbar. Die Konvergenzraten des BEG- und des Produktbinomialmodells bleiben unverändert im Vergleich zu den Fällen $K = 80$ und $K = 100$, allerdings verschlechtert sich die Konstante in beiden Modellen. Für die zwei- und vierdimensionale Option vergrößert sie sich auf ungefähr 10^{-3} im BEG- und 10^{-2} im Produktmodell. Für das Dünngitter-Binomialverfahren verläuft der Fehler sehr sprunghaft, so dass in diesem Fall die schnellere Konvergenz des Dünngitter-Binomialverfahrens, die wir für die Ausübungspreise $K = 0$ und $K = 50$ gesehen haben, verloren geht. Es ist keine Verbesserung der Konvergenzeigenschaft im Vergleich zum BEG- und zum Produktbinomialmodell mehr erkennbar. Dies ist auf die nicht glatte Payoff-Funktion zurückzuführen, die den hohen Glattheitsanforderungen der Dünngitter-Verfahren nicht mehr genügt. Für die Wahl $K = 100$ sehen wir, dass im Fehler des Dünngitter-Binomialverfahrens noch stärkere Oszillationen auftreten als zuvor für den Fall $K = 80$. Auch im Fehler des Produktbinomialverfahrens sind in zwei Dimensionen leichte Oszillationen erkennbar, allerdings bleibt die Konvergenzrate trotzdem erhalten. Diese Oszillationen treten bei der vierdimensionalen Option im Produktmodell nicht mehr auf. Das Konvergenzverhalten des BEG-Modells verändert sich nicht. Nur die Anfangsfehler sind mit 10^{-2} für das Produkt- und 10^{-1} für das BEG-Verfahren leicht höher. Somit stellt das Produktbinomialverfahren im Falle einer nicht glatten Auszahlungsfunktion eine Verbesserung hinsichtlich des Anfangsfehlers dar, das Konvergenzverhalten der Dünngitter-Binomialmethode verschlechtert sich jedoch deutlich.

Im Folgenden werden wir die Auswirkungen der Dimension auf das Konvergenzverhalten der drei mehrdimensionalen Binomialmodelle untersuchen. Bei Betrachtung der Option mit zwei zugrunde liegenden Wertpapieren erkennen wir, dass die Konvergenzrate für das BEG- und das Produktbinomialmodell $1/(2+1) = 1/3$ für alle gewählten Ausübungspreise beträgt, wie wir in Abschnitt 3.2.2 gezeigt haben. Der berechnete Optionspreis konvergiert stets monoton gegen die Referenzlösung, lediglich treten für den Fall $K = 100$ im Fehler des Produktbinomialmodells leichte Oszillationen auf. Die Konvergenzrate des Dünngitter-Binomialverfahrens erhöht sich auf $3/4$ für $K = 0$ und $K = 50$, was der von uns erwarteten Gesamtkomplexität von $\varepsilon(N) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{3}{2}d}\right)$ aus Abschnitt 3.3.3 entspricht. Im Falle $K = 80$ und $K = 100$ verschlechtert sich das Konvergenzverhalten der Dünngitter-Binomialmethode aufgrund der zunehmenden Nichtglattheit der Payoff-Funktion deutlich.

Im vierdimensionalen Fall können wir eine Konvergenzrate von $1/(4+1) = 1/5$ für das BEG- und das Produktbinomialverfahren ablesen, die unabhängig von der Glattheit der Auszahlungsfunktion ist. Auch dies entspricht unseren Konvergenzaussagen aus Abschnitt 3.2.2. An dieser Stelle erkennen wir im Vergleich mit der zweidimensionalen Option deutlich den Fluch

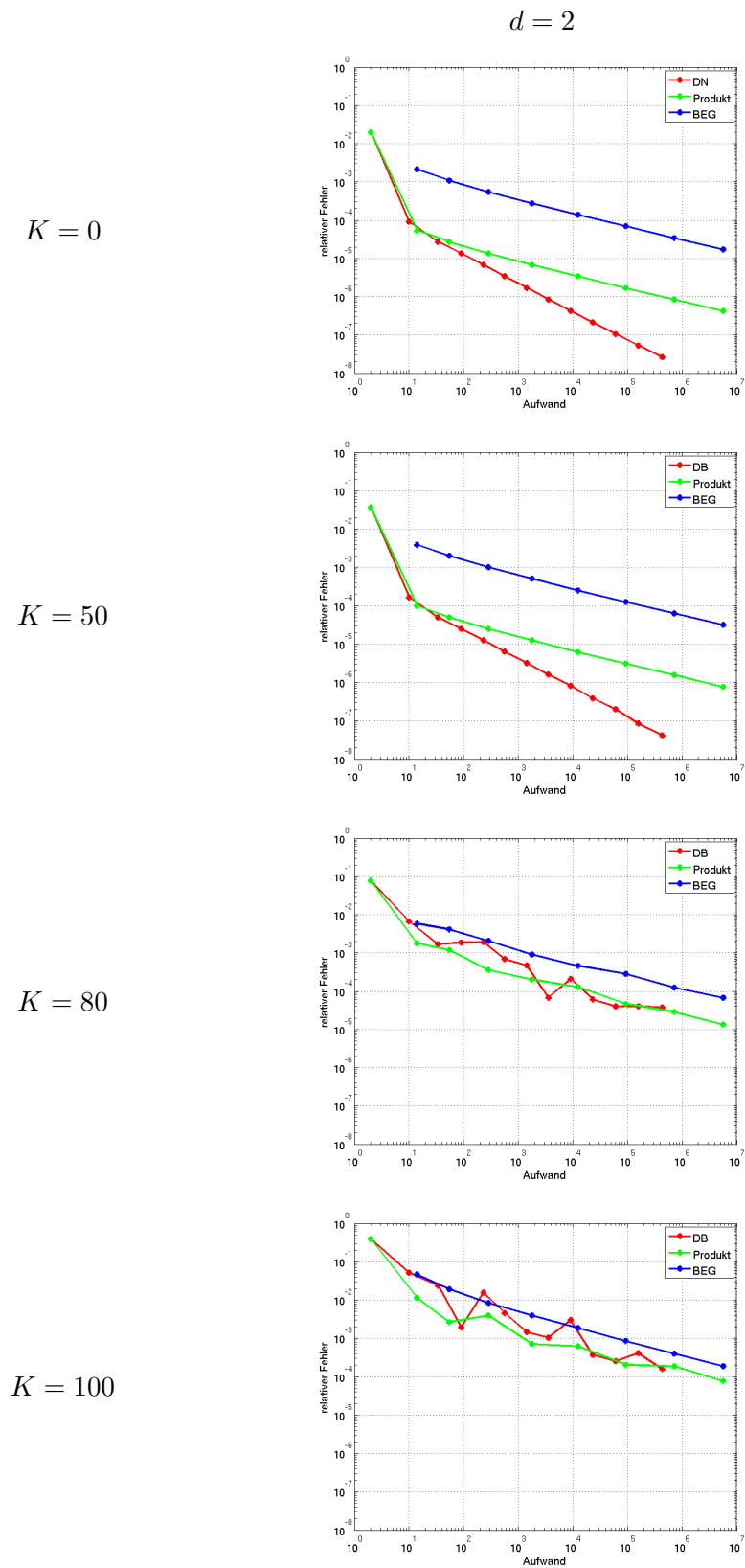
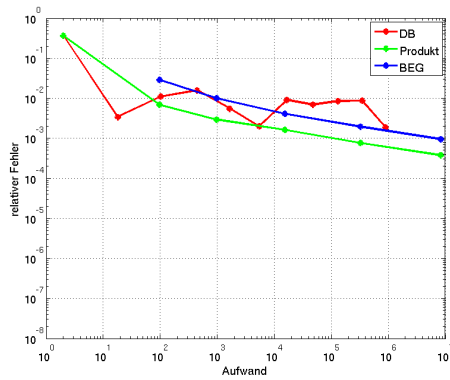
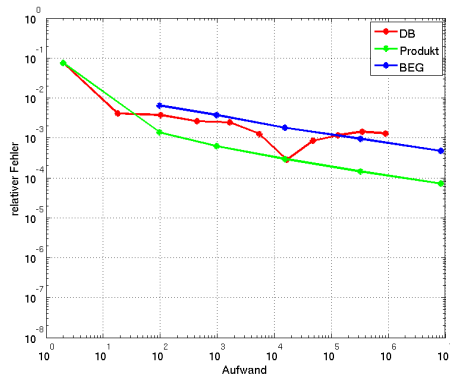
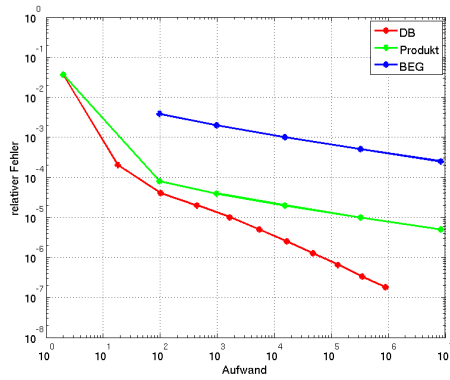
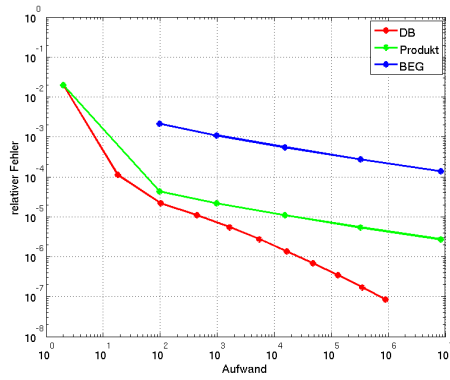
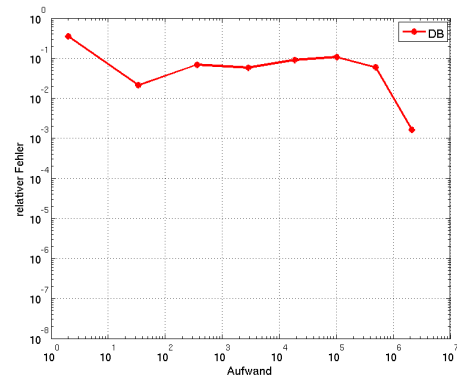
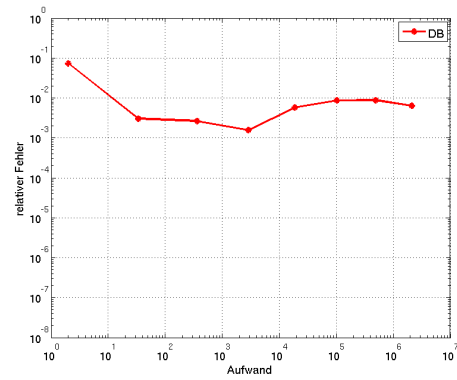
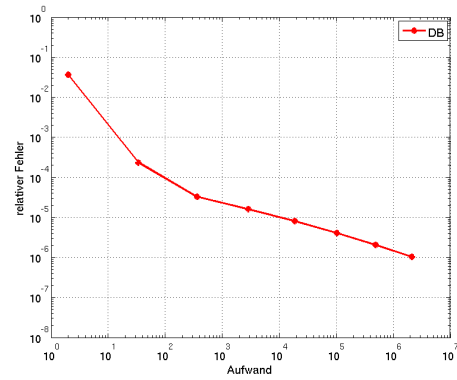
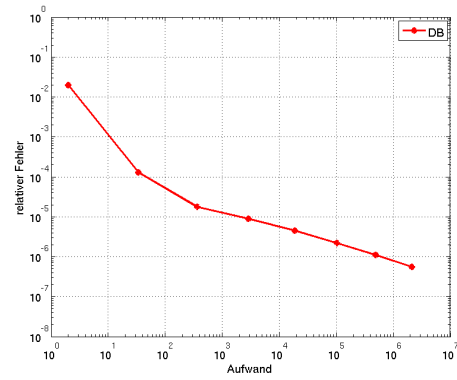


Abb. 4.7: Konvergenzraten des BEG-, Produkt- und Dünngitter-Binomialverfahrens (DB) für eine Europäische Basket-Option

$d = 4$



$d = 8$



der Dimension: Der Aufwand, der benötigt wird, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen, steigt exponentiell mit der Dimension an. Die Optionspreise, die in einem der beiden Modelle berechnet werden, konvergieren monoton gegen die Referenzlösung. Die leichten Oszillationen im Fehler des Produktbinomialverfahrens, die im zweidimensionalen Fall für die Wahl $K = 100$ erkennbar sind, treten bei der vierdimensionalen Option nicht mehr auf. Für die Dünngitter-Binomialmethode wird wie zuvor in zwei Dimensionen ein verbessertes Konvergenzverhalten für die Ausübungspreise $K = 0$ und $K = 50$ deutlich. Die Konvergenzrate beträgt ungefähr $1/2$. Damit verschlechtert sie sich zwar leicht im Vergleich zum zweidimensionalen Dünngitter-Binomialverfahren, allerdings wesentlich schwächer als im BEG- und im Produktmodell. In den Fällen $K = 80$ und $K = 100$ werden die Auswirkungen der nicht glatten Payoff-Funktion deutlich. Der Fehler verhält sich sehr sprunghaft, so dass die verbesserte Konvergenzeigenschaft nicht mehr erkennbar ist.

Für den achtdimensionalen Fall ist nur noch die Konvergenzrate des Dünngitter-Binomialverfahrens abgebildet. Die Berechnung des Optionspreises im BEG- oder im Produktbinomialmodell, die in acht Dimensionen einen sehr hohen Aufwand erfordert, wird durch den begrenzten Speicherplatz im Rechner erschwert. Der Speicherbedarf des Dünngitter-Binomialverfahrens ist wesentlich geringer. Die Konvergenzrate beträgt für $K = 0$ und $K = 50$ ungefähr $2/5$. Damit besitzt das achtdimensionale Dünngitter-Binomialverfahren ein besseres Konvergenzverhalten als das vierdimensionale BEG- und Produktverfahren. Für letztere erwarten wir in acht Dimensionen eine Konvergenzrate von $1/9$. Für die nicht glatten Payoff-Funktionen im Falle $K = 80$ und $K = 100$ erkennen wir die selben Oszillationen im Fehler wie in den Dimensionen zwei und vier.

In Tabelle 4.9 stellen wir noch einmal die asymptotischen Konvergenzraten des BEG-, des Produkt- und des Dünngitter-Binomialverfahrens, wie sie die numerischen Ergebnisse zeigen, für die vier gewählten Ausübungspreise dar. Für die Ermittlung der Raten verwenden wir Regressionsgeraden und vernachlässigen jeweils den ersten Punkt beim Produkt- und beim Dünngitter-Binomialverfahren.

Zum Abschluss wollen wir das Konvergenzverhalten für verschiedene Dimensionen noch einmal in Abbildung 4.8 vergleichen. Wir betrachten das Produkt- und das Dünngitter-Binomialverfahren. Wir wählen für alle Dimensionen die selben Werte der Optionsparameter, als Basket das arithmetische Mittel und den Ausübungspreis $K = 0$. Die Referenzwerte für die jeweiligen Dimensionen berechnen wir wie gewohnt mit dem Monte-Carlo Verfahren mit $N = 10^8$ Stützstellen.

Betrachten wir als erstes das Konvergenzverhalten im Produktbinomialmodell, so zeigen die numerischen Ergebnisse eine Konvergenzordnung von $1/(d + 1)$, wie wir in Abschnitt 3.2 postuliert haben. Der Anfangsfehler liegt in allen Dimensionen bei ungefähr 10^{-4} . Für das Dünngitter-Binomialverfahren verschlechtert sich die Konvergenzrate zwar auch mit zunehmender Dimension, allerdings nur um einen logarithmischen Faktor (siehe Abschnitt 3.3.3). Der Anfangsfehler ist von der gleichen Größenordnung wie beim Produktbinomialverfahren. Für jede Dimension erkennen wir deutlich die verbesserten Konvergenzeigenschaften der Dünngitter-Binomialmethode gegenüber dem Produktmodell.

(a) $K = 0$				(b) $K = 50$			
Modell	$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$	Modell	$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$
BEG	1/3	1/5	1/9	BEG	1/3	1/5	1/9
Produkt	1/3	1/5	1/9	Produkt	1/3	1/5	1/9
DB	3/4	1/2	2/5	DB	3/4	1/2	2/5

(c) $K = 80$				(d) $K = 100$			
Modell	$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$	Modell	$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$
BEG	1/3	1/5	1/9	BEG	1/3	1/5	1/9
Produkt	1/3	1/5	1/9	Produkt	1/3	1/5	1/9
DB	1/2	1/5	1/6	DB	1/2	1/5	1/6

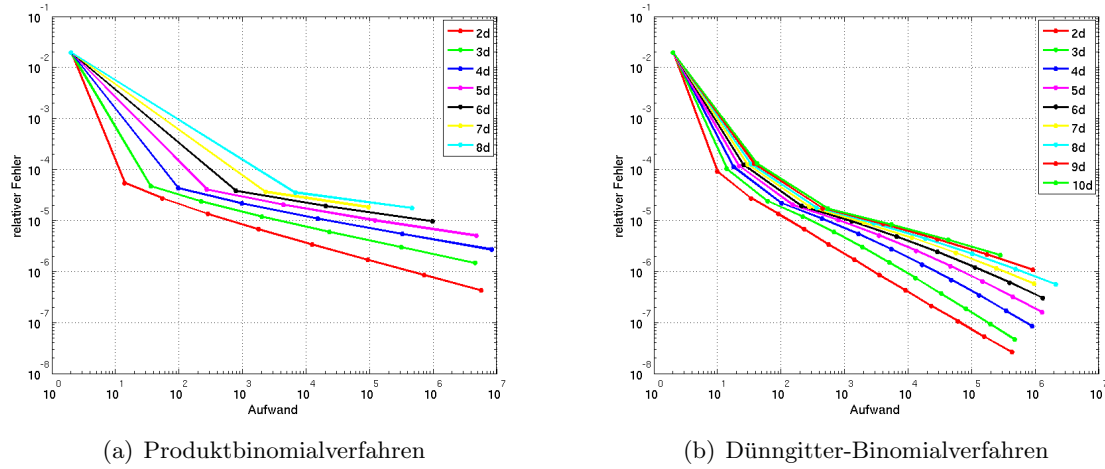
Tabelle 4.9: Asymptotische Konvergenzraten der Europäischen Call-Option

Zusammenfassend können wir sagen, dass das Dünngitter-Binomialverfahren im Falle einer hinreichend glatten Auszahlungsfunktion für alle Dimensionen deutlich verbesserte Konvergenzeigenschaften gegenüber dem BEG- und dem Produktbinomialverfahren aufweist. Es ist deutlich effizienter als das Produktbinomialverfahren, welches wiederum effizienter als das BEG-Verfahren ist. Bis auf den logarithmischen Faktor, mit dem sich die Konvergenzordnung für zunehmende Dimension verschlechtert, bricht das Dünngitter-Binomialverfahren den Fluch der Dimension, der in den beiden anderen Methoden auftritt. Zusätzlich ist der Speicherbedarf deutlich geringer. Somit stellt das entwickelte Dünngitter-Binomialverfahren selbst in hohen Dimensionen eine effiziente Methode zur Berechnung des Preises einer Option mit glatter Auszahlungsfunktion dar.

Im Falle einer nicht glatten Auszahlungsfunktion stellt das Produktbinomialverfahren eine Verbesserung in Hinsicht auf den Anfangsfehler dar, das Dünngitter-Binomialverfahren führt jedoch zu keinen besseren Konvergenzeigenschaften. Aus diesem Grunde sind hierfür das BEG- oder das Produktbinomialverfahren effizientere Alternativen. Um den Optionspreis einer hochdimensionalen Option, die eine nicht glatte Auszahlungsfunktion besitzt, zu berechnen, sind daher weitere Verbesserungen der Dünngitter-Binomialmethode notwendig.

4.4 Power Baskets

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir das Konvergenzverhalten Europäischer Optionen für das BEG-, das Produkt- und das Dünne Binomialmodell ausführlich untersucht. Dabei haben wir gesehen, dass das Dünngitter-Binomialverfahren im Falle einer glatten Auszahlungsfunktion weitaus bessere Konvergenzeigenschaften aufweist als die beiden anderen Methoden. Im Falle einer nicht glatten Payoff-Funktion ist aus den numerischen Ergebnissen nur eine langsame bzw. keine Konvergenz des Dünngitter-Binomialverfahrens erkennbar, was in der Theorie der Dünne Gitter begründet liegt. Aus diesem Grunde wollen wir uns in diesem Abschnitt auf die Analyse einer Amerikanischen Put-Option mit glatter Auszahlungsfunktion konzentrieren.

Abb. 4.8: Vergleich der Konvergenzraten für $d = 2, \dots, 10$

Wir betrachten eine Put-Option, da der Wert einer Amerikanischen Call-Option mit dem der entsprechenden Europäischen Call-Option übereinstimmt. Somit zeigt die Amerikanische Call-Option das gleiche Konvergenzverhalten wie die Europäische Call-Option aus Abschnitt 4.3. Wir wählen die selben Optionsparameter wie in Abschnitt 4.3 über Europäische Optionen und das arithmetische Mittel als Basket, damit wir die numerischen Ergebnisse für die beiden Optionstypen miteinander vergleichen können. Auch hier interessieren uns vor allem die verbesserten Konvergenzeigenschaften des Dünngitter-Binomialverfahrens.

Wie bei den Europäischen Call-Optionen wollen wir eine zwei-, eine vier- und eine achtdimensionale Amerikanische Put-Option betrachten. Die Werte für die Optionsparameter wählen wir analog aus Tabelle 4.7. Als Basket der Option betrachten wir auch hier das arithmetische Mittel. Im Falle einer Put-Option lässt sich die Glattheit der Auszahlungsfunktion nicht so einfach über die Wahl des Ausübungspreises $K = 0, 50, 80, 100$ steuern, wie dies bei den Call-Optionen der Fall war. Aus diesem Grund wählen wir für die Konvergenzanalyse der Amerikanischen Put-Option $K = 100$ als Ausübungspreis und glätten die Auszahlungsfunktion. Das bedeutet, dass wir im Folgenden anstelle der gewohnten Auszahlungsfunktion

$$\mathcal{H}_P(B) = (K - B(T))^+ \quad (4.4.1)$$

die geglättete Payoff-Funktion

$$h_P(B) = K \cdot e^{-0.2 \cdot B(T)} \quad (4.4.2)$$

verwendet werden. Hier bezeichnet $B(T)$ wie gewohnt den Wert des Baskets zum Fälligkeitszeitpunkt. Zum Vergleich stellen wir die beiden Funktionen in Abbildung 4.9 dar. Eine Amerikanische Put-Option mit geglätteter Payoff-Funktion wollen wir im Folgenden als Power Basket bezeichnen.

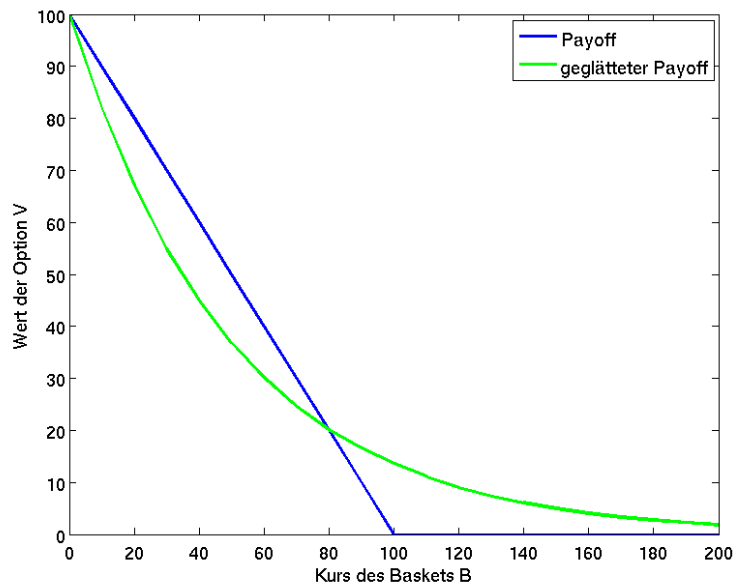


Abb. 4.9: Auszahlungsfunktion und geglättete Auszahlungsfunktion einer Put-Option mit Ausübungspreis $K = 100$ zum Fälligkeitszeitpunkt T

Die Verwendung der geglätteten Auszahlungsfunktion ermöglicht es uns, den Einfluss eines vorzeitigen Ausübungsrechts und einer glatten Payoff-Funktion auf das Konvergenzverhalten getrennt voneinander zu untersuchen. Wie anfangs kurz erläutert, haben wir die Auswirkungen der Glattheit bereits im vorigen Abschnitt ausführlich diskutiert. Aus diesem Grunde konzentrieren wir uns im Folgenden auf die Charakteristik des Amerikanischen Typs.

Abbildung 4.10 zeigt den relativen Fehler in Abhängigkeit vom Aufwand für das zwei-, das vier- und das achtdimensionale BEG-, Produkt- und das Dünngitter-Binomialverfahren. Wie wir schon im vorherigen Abschnitt über die Konvergenz von Europäischen Optionen erläutert haben, ist der Aufwand des BEG- und Produktbinomialverfahrens von der Ordnung $\mathcal{O}(M^{d+1})$. Aufgrund des hohen Speicherbedarfs ist die Berechnung des achtdimensionalen Optionspreises mit einem dieser beiden Verfahren nicht effizient. Deshalb stellen wir für diese Dimension nur den Fehler der Dünngitter-Binomialmethode dar. Für Power Baskets existieren keine analytischen Lösungen. Aus diesem Grund berechnen wir für die zwei- und die vierdimensionale Option Referenzlösungen mit dem BEG-Verfahren und einer hohen Anzahl an Zeitschritten. Im achtdimensionalen Fall verwenden wir als Referenz den Optionspreis zum Level 7 aus dem

$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$
0.000002463570	0.000001417788	0.000001033385

Tabelle 4.10: Referenzwerte für den Power Basket

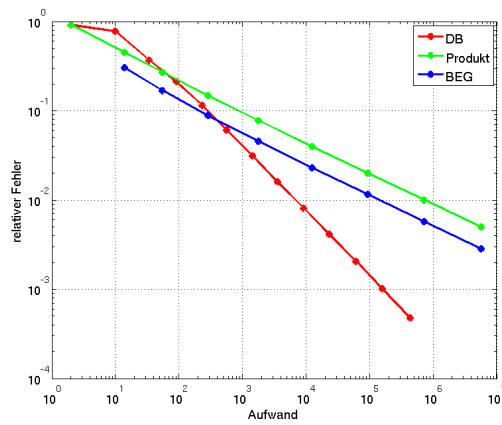
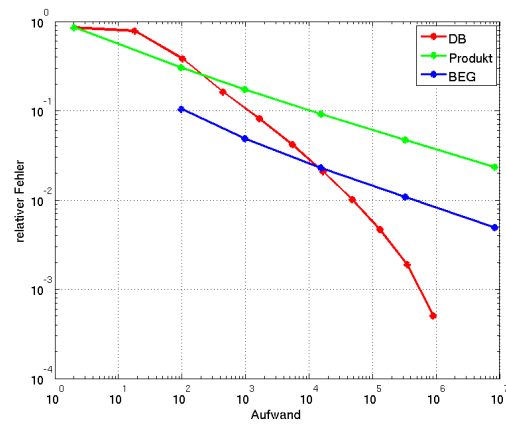
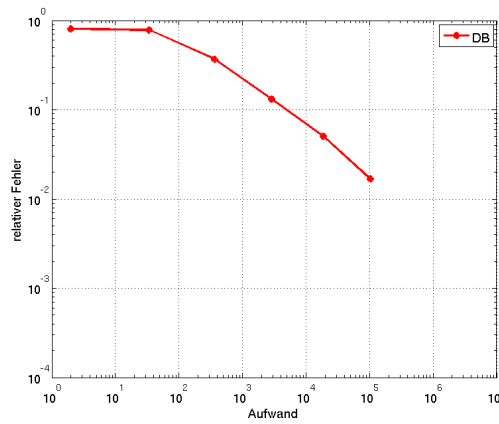
(a) $d = 2$ (b) $d = 4$ (c) $d = 8$

Abb. 4.10: Konvergenzraten des BEG-, Produkt- und Dünngitter-Binomialverfahrens für $K = 100$

Dünngitter-Binomialverfahren. Wir geben die Referenzwerte in Tabelle 4.10 an.

Für alle Dimensionen weist der Power Basket ein der Europäischen Call-Option sehr ähnliches Konvergenzverhalten auf. Der hauptsächliche Unterschied besteht darin, dass der Anfangsfehler für den Power Basket im BEG-Modell etwas niedriger ist als beim Produkt- und beim Dünngitter-Binomialverfahren. Bei der Europäischen Call-Option zeigt sich ein entgegengesetzter Sachverhalt.

Für den zweidimensionalen Fall lässt sich eine Konvergenzrate von $1/3$ für das BEG- und das Produktbinomialmodell ablesen. Die Konvergenzrate des Dünngitter-Binomialverfahrens beträgt ungefähr $3/4$. Dies stimmt mit den numerischen Ergebnissen aus Abschnitt 4.3 über die Konvergenzeigenschaften von Europäischen Optionen überein. Der Anfangsfehler liegt bei ungefähr $3 \cdot 10^{-1}$ für das BEG-, bei $5 \cdot 10^{-1}$ für das Produkt- und bei $8 \cdot 10^{-1}$ für das Dünngitter-Binomialverfahren. Wir sehen also, dass auch bei Betrachtung einer zweidimensionalen Amerikanischen Option das Dünngitter-Binomialverfahren bei geringfügig höherem Anfangsfehler ein deutlich verbessertes Konvergenzverhalten gegenüber den beiden anderen Methoden aufweist, für den Fall, dass wir eine geglättete Payoff-Funktion zugrunde legen.

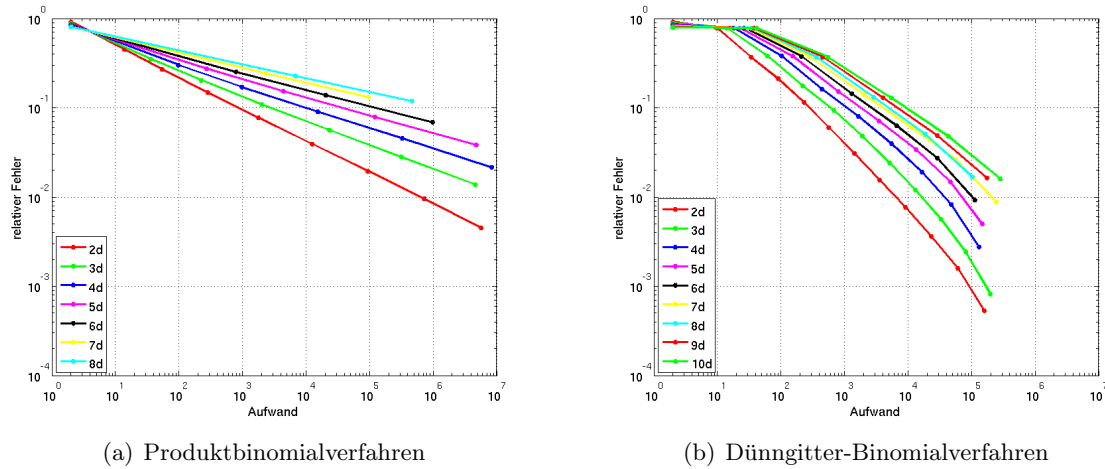
Auch für den vierdimensionalen Power Basket bestätigen sich die Konvergenzergebnisse, die wir für die Europäische Call-Option in vier Dimensionen gesehen haben. Sowohl das BEG- als auch das Produktbinomialverfahren konvergieren mit einer Rate von $1/5$. Die Konvergenzrate des Dünngitter-Binomialverfahrens beträgt ungefähr $1/2$. Bezüglich des Anfangsfehlers ist wieder ein gegenteiliger Sachverhalt zu der Europäischen Call-Option festzustellen. Für das BEG-Verfahren liegt dieser bei 10^{-1} , für das Produkt- und das Dünngitter-Binomialverfahren bei ungefähr $3 \cdot 10^{-1}$. Somit sind auch in vier Dimensionen für die Dünngitter-Binomialmethode bessere Konvergenzeigenschaften sowohl für Europäische als auch für Amerikanische Optionen gegeben, wenn die Auszahlungsfunktion hinreichend glatt ist.

Für den achtdimensionalen Fall zeigt sich der Fluch der Dimension: Der Aufwand für das BEG- und das Produktbinomialverfahren wird so groß, dass die Optionspreisberechnung durch den begrenzten Speicherplatz im Rechner limitiert ist. Aus diesem Grund sind die Konvergenzraten für diese beiden Verfahren nicht dargestellt. Wir erwarten aber Raten in Höhe von $1/9$. Die Konvergenzrate des Dünngitter-Binomialverfahrens beträgt ungefähr $2/5$. Damit stellt es selbst in hohen Dimensionen ein effizientes Verfahren zur Optionspreisberechnung dar, sofern wir eine glatte Auszahlungsfunktion gewährleisten können.

Wir fassen in Tabelle 4.11 noch einmal die asymptotischen Konvergenzraten des Power Baskets für die drei Binomialverfahren zusammen. Die Raten werden mit Hilfe von Regressionsgeraden unter Vernachlässigung der ersten Punkte ermittelt.

Modell	$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$
BEG	$1/3$	$1/5$	$1/9$
Produkt	$1/3$	$1/5$	$1/9$
DB	$3/4$	$1/2$	$2/5$

Tabelle 4.11: Asymptotische Konvergenzraten des Power Baskets

Abb. 4.11: Vergleich der Konvergenzraten für $d = 2, \dots, 10$

Zum Abschluss vergleichen wir in Abbildung 4.11 das Konvergenzverhalten für verschiedene Dimensionen, wie wir dies auch bei den Europäischen Optionen getan haben. Dort sind in Abbildung 4.11(a) die Konvergenzraten des Produktbinomialverfahrens und in 4.11(b) die des Dünngitter-Binomialverfahrens dargestellt. Für alle Dimensionen wählen wir für die Optionsparameter die selben Werte. Als Basket verwenden wir das arithmetische Mittel und als Auszahlungsfunktion die geglättete Payoff-Funktion. Die Referenzwerte berechnen wir mit dem Dünngitter-Binomialverfahren zu einem hohem Level.

Vergleichen wir die beiden Abbildungen, so erkennen wir deutlich die verbesserten Konvergenzeigenschaften des Dünngitter-Binomialverfahrens. Im Produktbinomialmodell bestätigt sich auch für Power Baskets die Gesamtkomplexität von $\mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{d+1}}\right)$, die wir schon mehrfach gesehen haben. Die Konvergenz der Dünngitter-Binomialmethode verschlechtert sich zwar auch mit zunehmender Dimension, allerdings nur um einen logarithmischen Faktor. Auch dies stimmt mit den numerischen Ergebnissen für Europäische Optionen überein.

Insgesamt haben wir festgestellt, dass das Dünngitter-Binomialverfahren Optionen sowohl von Europäischem als auch von Amerikanischem Typ bis in hohe Dimensionen effizient bewerten kann, sofern die Glattheit der Auszahlungsfunktion gewährleistet ist. Mit diesem Verfahren gelingt es uns, den Fluch der Dimension, der uns die Anwendung des BEG- und des Produktbinomialverfahrens nur in kleinen Dimensionen erlaubt, bis auf einen logarithmischen Faktor zu umgehen. Zusätzlich kann es Optionen, die ein vorzeitiges Ausübungsrecht beinhalten, bewerten. Damit haben wir ein effizientes Verfahren zur Bewertung von Amerikanischen Basket-Optionen entwickelt. Um den Optionspreis einer Option, die eine nicht glatte Auszahlungsfunktion besitzt, in hohen Dimensionen zu berechnen, sind weitere Verbesserungen der Dünngitter-Binomialmethode wie örtliche Adaptivität oder Transformationen der Payoff-Funktion notwendig.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine Erweiterung der eindimensionalen Binomialmethode entwickelt, die auf dem Dünngitter-Ansatz aus [Smo63] basiert. Damit ist es erstmalig gelungen, den Fluch der Dimension, der in den bisher vorgestellten mehrdimensionalen Erweiterungen des Binomialverfahren [BEG89] und [KR91] auftritt, zu brechen. Das neue Dünngitter-Binomialverfahren haben wir erfolgreich auf die Bewertung von Europäischen Optionen und Power Baskets angewandt.

Die wesentliche Aufgabe bestand darin, isotrope und anisotrope Binomialbäume zu konstruieren, deren Optionspreise mit Hilfe der Kombinationstechnik aus dem Dünngitter-Ansatz [Smo63] kombiniert werden. Die Konstruktion dieser Bäume ist uns durch eine bestimmte Tensorproduktbildung von eindimensionalen Binomialbäumen gelungen. Dabei bestand der wesentliche Unterschied zum Vorgehen der bekannten mehrdimensionalen Binomialmodelle aus [BEG89, KR91] darin, dass keine direkte Approximation der d -dimensionalen Verteilung der zugrunde liegenden Aktienkurse vorgenommen, sondern die eindimensionale Verteilung des Wiener-Prozesses durch einen Binomialbaum, der als W -Baum bezeichnet wird, approximiert wurde. Die Erweiterung auf d Dimensionen gelang uns durch Tensorproduktbildung von eindimensionalen W -Bäumen. Den d -dimensionalen S -Baum, welcher die d -dimensionale Verteilung der zugrunde liegenden Aktienkurse approximiert, erhielten wir dann durch anschließende Transformation. Die Wahrscheinlichkeiten ergaben sich als Produkt der eindimensionalen Wahrscheinlichkeiten. Im Falle von nur einem zugrunde liegenden Wertpapier entsprach unser Verfahren der eindimensionalen Binomialmethode nach Jarrow und Rudd aus [JR83].

Die Effizienz des Dünngitter-Binomialverfahrens wurde für Optionen mit hinreichend glatten Auszahlungsfunktionen in verschiedenen numerischen Tests bestätigt. Insbesondere ließ das Verfahren gegenüber der BEG- und der Produktbinomialmethode, und zwar sowohl für Europäische als auch für Amerikanische Optionen, deutlich verbesserte Konvergenzeigenschaften erkennen, die nahezu unabhängig von der Dimension waren. Letztere Methoden unterlagen dem Fluch der Dimension, so dass der Aufwand exponentiell mit der Dimension anstieg und die Optionspreisberechnung aufgrund des begrenzten Speicherplatzes im Rechner erschwert wurde. Dagegen stellte das Dünngitter-Binomialverfahren selbst in hohen Dimensionen eine effiziente und flexible Methode zur Preisberechnung von Optionen mit ausreichend glatten Payoff-Funktionen dar.

Die vorgestellten Ergebnisse lassen noch mehrere interessante Ansatzpunkte für weiter gehende wissenschaftliche Untersuchungen erkennen. Wie wir gesehen haben, wies das Dünngitter-Binomialverfahren für Basket-Optionen mit glatten Auszahlungsfunktionen Konvergenzeigenschaften auf, die nahezu unabhängig von der Dimension waren. Im Falle einer nichtglatten Payoff-Funktion war das verbesserte Konvergenzverhalten nicht mehr erkennbar. Um eine solche Option in hohen Dimensionen bewerten zu können, sind weitere Verbesserungen der Dünngitter-Binomialmethode notwendig. Hier sind zwei Ansätze denkbar, die die Nichtglattheit der Auszahlungsfunktion behandeln. Mögliche Beispiele sind die Verwendung örtlicher Adaptivität, wie sie in [BD03] und [FG99] vorgestellt wird, oder Transformationen der Payoff-Funktion, wie sie in (siehe [Aea07], [RW07] und [GH08]) beschrieben werden.

Zusätzlich sind verschiedene Erweiterungen des Dünngitter-Binomialverfahrens vorstellbar. So besteht die Möglichkeit, den Dünngitter-Ansatz aus [Smo63] auch auf Multinomialbäume anzuwenden, für die dann die schnelle Gauss-Transformation von Broadie und Yamamoto aus [BY03] verwendet werden könnte. Es ist auch denkbar, das Dünngitter-Binomialverfahren der Bewertung von pfadabhängigen Optionen anzupassen, bei denen die Auszahlung vom gesamten Kursverlauf des Basiswertes abhängt. Abschließend sei darauf hingewiesen, dass neben dem Black-Scholes-Modell auch die Verwendung anderer Modelle von großem Interesse sein könnte. Beispiele hierfür sind die Erweiterung auf lokale oder stochastische Volatilitäten und auf stochastische Zinsraten. Details zu diesen Alternativen finden sich z. B. in [Hul06].

Bezeichnungen

Allgemeine Bezeichnungen:

\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen mit Null
$E[\cdot]$	Erwartungswert
$E^*[\cdot]$	äquivalentes Martingalmaß
$Var[\cdot]$	Varianz
dt	infinitesimaler Zeitzuwachs
W_t	Wiener-Prozess
$N(\mu, \sigma^2)$	Gauß'sche Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ
$B(n, p)$	Binomialverteilung mit den Parametern n und p
$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der kumulativen Standardnormalverteilung
$\mathcal{O}(\cdot)$	Landau-Symbol
a^+	$\max\{a, 0\}$
$\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$	d -dimensionaler Multiindex
$ \cdot _1$	Betragssummennorm
$ \cdot _\infty$	Maximumsnorm

Bezeichnungen im Zusammenhang mit Optionen:

$t \in \mathbb{R}^+$	laufende Zeit, $0 \leq t \leq T$
$T \in \mathbb{R}^+$	Fälligkeitszeitpunkt, Laufzeit der Option
$K \in \mathbb{R}^+$	Ausübungspreis der Option
$r \in \mathbb{R}^+$	risikoloser Zinssatz

Plain Vanilla Optionen:

$S(t) \in \mathbb{R}^+$	Kurs des Basiswertes in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t
$\mathcal{H}(S) \in \mathbb{R}^+$	Auszahlungsfunktion der Option in Abhängigkeit vom Preis S des Basiswertes
$h(S) \in \mathbb{R}^+$	geglättete Auszahlungsfunktion der Option in Abhängigkeit vom Preis S des Basiswertes
$V(S, t) \in \mathbb{R}^+$	Wert der Option zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit vom Preis S des Basiswertes
$\mu \in \mathbb{R}$	Drift des stochastischen Prozesses $S(t)$
$\sigma \in \mathbb{R}^+$	Volatilität des stochastischen Prozesses $S(t)$
d_1, d_2	Parameter der Black-Scholes-Formel

Basket-Optionen:

$d \in \mathbb{N}$	Dimension der Option, Anzahl an zugrunde liegenden Wertpapieren
$S_i(t) \in \mathbb{R}^+$	Kurs des i -ten zugrunde liegenden Wertpapiers in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t
$B(t) \in \mathbb{R}^+$	Wert des Baskets in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t
$\mathcal{H}(B) \in \mathbb{R}^+$	Auszahlungsfunktion der Option in Abhängigkeit vom Preis B des Baskets
$h(B) \in \mathbb{R}^+$	geglättete Auszahlungsfunktion der Option in Abhängigkeit vom Preis B des Baskets
$V(B, t) \in \mathbb{R}^+$	Wert der Option zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit vom Preis B des Baskets
$\mu_i \in \mathbb{R}$	Drift des stochastischen Prozesses $S_i(t)$
$\sigma_i \in \mathbb{R}^+$	Volatilität des stochastischen Prozesses $S_i(t)$
$\rho_{ij} \in [-1, 1]$	Korrelationskoeffizient zwischen dem i -ten und j -ten Aktienkurs
Σ	Korrelationsmatrix
$\sigma_{ij} \in \mathbb{R}$	(i, j) -ter Eintrag aus der Korrelationsmatrix

Bezeichnungen im Zusammenhang mit Binomialverfahren:

M	Anzahl an Zeitschritten
Δt	Zeitschrittweite
$t_l, l = 0, \dots, M$	diskreter Zeitpunkt in $[0, T]$
$u_i > 1$	Faktor für eine Kurssteigerung des i -ten Wertpapiers
$d_i < 1$	Faktor für einen Kursabfall des i -ten Wertpapiers
$p_k, k = 1, \dots, 2^d$	Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Zustände
W_M^d	d -dimensionaler isotroper W -Baum
S_M^d	d -dimensionaler isotroper S -Baum
$W_{\mathbf{k}}^d$	d -dimensionaler anisotroper W -Baum
$S_{\mathbf{k}}^d$	d -dimensionaler anisotroper S -Baum
$\ell \in \mathbb{N}_0$	Level der Kombinationstechnik
$V_{0,0}^M \in \mathbb{R}^+$	Optionspreis, der mittels des isotropen Baums S_M^d berechnet wird
$V_{0,0}^{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^+$	Optionspreis, der mittels des anisotropen Baums $S_{\mathbf{k}}^d$ berechnet wird
$\hat{V}_{0,0}^{\ell} \in \mathbb{R}^+$	Optionspreis, der mittels der Kombinationstechnik zum Level ℓ berechnet wird

Verwendete Abkürzungen:

BS	Black-Scholes
CRR	Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein
JR	Binomialmodell nach Jarrow und Rudd
TN	Binomialmodell nach Tian
ZA	Binomialmodell mit zentriertem Ausübungspreis
LR	Binomialmodell nach Leisen und Reimer
BEG	Binomialverfahren von Boyle, Evnine und Gibbs
Produkt	Produktbinomialverfahren
DB	Dünngitter-Binomialverfahren

Literaturverzeichnis

- [ABG98] P. Acworth, M. Broadie, and P. Glasserman. A comparison of some Monte Carlo and Quasi Monte carlo methods for option pricing. In H. Niederreiter et al., editor, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1996*, pages 1–18. Springer, 1998.
- [Aea07] A. Andricopoulos et al. Extending quadrature methods to value multi-asset and complex path dependent options. *Journal of Financial Economics*, 83(2):471–499, 2007.
- [AW01] J. Alford and N. Webber. Very high order lattice methods for one factor models. Working Paper, 2001.
- [Bau01] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin, 5. edition, 2001.
- [BD03] H.-J. Bungartz and S. Dirnstorfer. Multivariate quadrature on adaptive Sparse Grids. *Computing*, 71(1):89–114, 2003.
- [BEG89] P. Boyle, J. Evnine, and S. Gibbs. Numerical evaluation of multivariate contingent claims. *The Review of Financial Studies*, 2(2):241–250, 1989.
- [BG97] M. Broadie and P. Glasserman. Pricing American-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1323–1352, 1997.
- [BG04a] M. Broadie and P. Glasserman. A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options. *Journal of Computational Finance*, 7(4):35–72, 2004.
- [BG04b] H.-J. Bungartz and M. Griebel. Sparse Grids. *Acta Numerica*, 13:1–123, 2004.
- [Boy77] P. Boyle. Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3):323–338, 1977.
- [Boy88] P. Boyle. A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(1):1–12, 1988.
- [BR94] C. Ball and A. Roma. Stochastic volatility option pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29(4):589–607, 1994.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [BS78] M. Brennan and E. Schwartz. Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(2):461–474, 1978.

- [BY03] M. Broadie and Y. Yamamoto. Application of the fast Gauss transform to option pricing. *Management Science*, 49(8):1071–1088, 2003.
- [CRR79] J. Cox, S. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3):229–263, 1979.
- [FG99] S. Figlewski and B. Gao. The adaptive mesh model: A new approach to efficient option pricing. *Journal of Financial Economics*, 53(3):313–351, 1999.
- [GG98] T. Gerstner and M. Griebel. Numerical integration using Sparse Grids. *Numerical Algorithms*, 18(3-4):209–232, 1998.
- [GGH08] T. Gerstner, M. Griebel, and M. Holtz. Praktikumsausarbeitung Computational Finance. Institut für Numerische Simulation, Universität Bonn, WS 2007/2008.
- [GH08] T. Gerstner and M. Holtz. Valuation of performance-dependent options. *Applied Mathematical Finance*, 15(1):1–20, 2008.
- [GHK07] T. Gerstner, M. Holtz, and R. Korn. Valuation of performance-dependent options in a Black-Scholes framework. In D. Edelman J. Appleby and J. Miller, editors, *Numerical Methods for Finance*, pages 203–214. Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [Gla03] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- [GSZ92] M. Griebel, M. Schneider, and C. Zenger. A combination technique for the solution of Sparse Grid problems. In R. Bequwens and P. de Groen, editors, *Iterative Methods in Linear Algebra*, pages 263–281. Elsevier, North-Holland, 1992.
- [Hol04] M. Holtz. Konstruktion B-Spline-basierter monotoner Mehrgitterverfahren zur Bewertung Amerikanischer Optionen. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, 2004.
- [Hul06] J. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, München, 6. edition, 2006.
- [HW90] J. Hull and A. White. Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(1):87–100, 1990.
- [JR83] R. Jarrow and A. Rudd. *Option Pricing*. Irwin Professional Pub, 1983.
- [Kar05] V. Kargin. Lattice option pricing by multidimensional interpolation. *Mathematical Finance*, 15(4):635–647, 2005.
- [KR91] B. Kamrad and P. Ritchken. Multinomial approximating models for options with k state variables. *Management Science*, 37(12):1640–1652, 1991.
- [Kwo98] Y. Kwok. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer, Singapore, 1998.
- [Lev04] G. Levy. *Computational Finance - Numerical Methods for Pricing Financial Instruments*. Elsevier, 2004.

- [LR95] D. Leisen and M. Reimer. Binomial models for option valuation - examining and improving convergence. Discussion Paper No. B-309, 1995.
- [LR96] D. Leisen and M. Reimer. Binomial models for option valuation - examining and improving convergence. *Applied Mathematical Finance*, 3(4):319–346, 1996.
- [LS01] F. Longstaff and E. Schwartz. Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14(1):113–147, 2001.
- [Omb88] E. Omberg. On the theory of perfect hedging. Santa Clara University, Santa Clara, Calif. 95053, 1988.
- [Rub00] M. Rubinstein. On the relation between binomial and trinomial option pricing models. *Journal of Derivatives*, 2000.
- [RW07] C. Reisinger and G. Wittum. Efficient hierarchical approximation of high-dimensional option pricing problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(1):440–458, 2007.
- [San99] K. Sandmann. *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. Springer, Berlin, 1999.
- [Sey02] R. Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer, Berlin, 2002.
- [Smo63] S. Smolyak. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Soviet Math. Dokl.*, 4:240–243, 1963.
- [SP99] K. Sircar and G. Papanicolaou. Stochastic volatility, smile & asymptotics. *Applied Mathematical Finance*, 6(2):107–145, 1999.
- [Tia93] Y. Tian. A modified lattice approach to option pricing. *Journal of Futures Markets*, 13(5):563–577, 1993.
- [Wil98] P. Wilmott. *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*. Wiley, Chichester, 1998.
- [WW] C. Wallner and U. Wystup. Efficient computation of option price sensitivities for options of american style. Wilmott. <http://www.mathfinance.de>.
- [Zim05] H. Zimmermann. *Finance derivatives*. Verlag Neue Zürcher Zeitung, 1. edition, 2005. www.wvz.unibas.ch/finance/teaching/generallecturenotes/Deriv.pdf.