

DIPLOMARBEIT

Effiziente Nahfeldkubatur
in der
Galerkin-Randelementmethode

Angefertigt am Institut für Angewandte Mathematik

Vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

März 2002

Von

Markus Rech

Aus

Bonn

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Integralgleichungen	13
2.1	Die Integralgleichungsmethode	13
2.1.1	Die Fundamentallösung	13
2.1.2	Oberflächenpotentiale	14
2.1.3	Die variationelle Formulierung	16
2.2	Die Randelementmethode	17
2.2.1	Das Galerkinverfahren	18
2.2.2	Triangulierung und Konvergenz	19
2.2.3	Die volldiskrete Lösung	21
3	Das Nah- und das Fernfeld	23
3.1	Die Matrixassemblierung	23
3.2	Schnelle Matrix-Vektor-Multiplikation	26
4	Nahfeldkubatur	29
4.1	Die Duffy-Transformation	29
4.1.1	Fast singuläre Integrale	29
4.1.2	Singuläre Integrale	35
4.2	Variierende Tensorproduktquadratur	40
4.2.1	Fast singuläre Integrale	41
4.2.2	Singuläre Integrale	44
4.3	Der Raumwinkelansatz	46
4.3.1	Potentialgleichung	48
4.3.2	Helmholtzgleichung	55
4.3.3	Lamé- und Stokes-Gleichungen	59
4.3.4	Eingliederung in das Galerkinverfahren	62
4.3.5	Interpolation im Raumwinkelansatz	66
4.4	Die Singularität als Gewichtsfunktion	68

5 Implementierungsdetails	71
5.1 Variierende Tensorproduktquadratur	71
5.2 Raumwinkelansatz	71
6 Numerische Vergleiche	73
6.1 Fast singuläres Nahfeld	74
6.2 Singuläres Nahfeld	76
6.3 Asymptotik	79
7 Numerisches Beispiel	81
8 Zusammenfassung und Ausblick	85
A Mathematische Hilfsmittel	87
A.1 Untermannigfaltigkeiten	87
A.2 Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten	88

Kapitel 1

Einleitung

Die mathematische Formulierung physikalischer Modelle geschieht in der Regel mit Hilfe von Differential- und Integralgleichungen. Darüberhinaus besteht ein großes Interesse an Integralgleichungen, denen keine physikalische Modellierung, sondern die äquivalente Umformulierung bestimmter partieller Differentialgleichungen zugrundeliegt. Es ist die Rede von elliptischen Differentialgleichungen und der *Integralgleichungsmethode*.

Bei Kenntnis einer Fundamentallösung Φ des zugehörigen Differentialoperators L wird die ursprünglich im Gebiet Ω ansässige Differentialgleichung zurückgeführt auf eine Integralgleichung auf dem kompakten Gebietsrand Γ , wobei Ableitungen der Fundamentallösung den *Kern* des Integraloperators bilden [15]. Beim *Einfachschichtpotentialansatz* tritt die Fundamentallösung selbst als solcher auf: Betrachtet man die homogene Operatorgleichung $Lu = 0$, so führen beispielsweise die Dirichlet-Randwerte b zu der Randintegralgleichung

$$\int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) = b(x)$$

mit der Lösung φ , aus der sich dann die Lösung der Differentialgleichung problemlos berechnen läßt. Hiermit ist ein Dimensionsgewinn verbunden, denn der zweidimensionale Rand bietet verschiedene Vorteile gegenüber dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ als Träger einer Operatorgleichung. So ist zum Beispiel nach der Diskretisierung mittels Finiter Elemente die Dimension des neuen Systems bei gleicher Auflösung kleiner als die des originalen. Desweiteren zeichnet sich die *Randelementmethode*, d. h. die Finite-Elemente-Diskretisierung der Randintegralgleichung, durch hohe Genauigkeit und relativ einfache Gittererzeugung aus. Andererseits überträgt sich die Lokalität von L nicht auf den Integraloperator, was im Diskretisierungsprozeß für vollbesetzte Matrizen sorgt. Diese wiederum haben bekanntlich einen hohen Rechenaufwand zur Folge. Die Matrix-Vektor-Multiplikation erfordert beim Lösen des diskreten Integralgleichungssystems einen im Freiheitsgrad N quadratisch anwachsenden Aufwand, wengleich N eine Ordnung kleiner ist als der entsprechende Parameter N_D der Finite-Elemente-Räume für die Differentialgleichung. In verschiedenen Arbeiten wird diese Problematik diskutiert und es werden Methoden wie das Panel-Clustering oder die Multiskalen-Matrixkompression zur Effizienzsteigerung vorgestellt, welche immer

auf einer dünnbesetzten Approximation der Systemmatrix A_I basiert. Neben dem Diskretisierungsfehler entsteht damit ein Kompressionsfehler, den es so zu kontrollieren gilt, daß die aufgrund der Kompression gestörte Lösung mit unverminderter Ordnung gegen die exakte Lösung der Integralgleichung konvergiert, siehe beispielsweise [17], [22], [14] und [26].

Eine weitere Gemeinsamkeit all dieser Verfahren besteht in der Notwendigkeit, die Matrizen teilweise explizit assemblieren zu müssen. Beim Galerkin-Verfahren entsteht so ein gewaltiger Aufwand, denn es handelt sich im wesentlichen um die vierdimensionale Integration des Kerns über Dreieckpaare (π_x, π_y) der Randtriangulierung mit geringem Abstand zueinander. Im allgemeinen sind diese Integrale nicht analytisch berechenbar und man muß auf Kubaturverfahren, das mehrdimensionale Analogon zu Quadraturverfahren, zurückgreifen. Dadurch entsteht erneut ein Approximationsfehler, so daß der Kubaturgrad dem Diskretisierungsparameter angepaßt werden muß, um die Konvergenzordnung der Galerkin-Lösung wiederum nicht zu gefährden. Es stellt sich heraus, daß im sogenannten *Nahfeld* große Kubaturgrade nötig sind, wofür die Diagonalsingularität des Kerns verantwortlich ist. Und das bedeutet einen hohen Rechenaufwand, zumal die Auswertung des Integranden relativ viel kostet. Sind die beiden Dreiecke nicht disjunkt, so versagen Standardkubaturverfahren komplett und der schwach-singuläre Integrand ist über die *Duffy-Transformation* [10] erst zu regularisieren. Für den Fall, daß der Kern des Integraloperators zudem Cauchy- oder sogar hypersingulär ist, sind vorher auf kontinuierlicher Ebene regularisierte Integralbegriffe wie der Cauchy-Hauptwert bzw. das part-fini-Integral heranzuziehen.

Hier ist nun eine Fallunterscheidung, wie man sie bei der Definition einer *zulässigen Triangulierung* durchführt, vonnöten, die ergibt, daß im Fall der Flächensingularität $(\pi_x = \pi_y)$ der Aufwand zur Integraalauswertung am geringsten ist und sukzessive ansteigt mit abnehmendem Grad der Singularität. Die unangenehmste Situation findet sich schließlich im fast singulären Nahfeld, in dem Paare disjunkter Dreiecke mit kleinem Abstand zueinander liegen. Die Ursache hierfür liegt in der Gegebenheit, daß im *singulären* Nahfeld nach einer inneren Integration über niederdimensionale Querschnitte des Integrationsgebiets der verbleibende Integrand für die äußeren Integrationen analytisch ist und mit konstantem Kubaturgrad ausgeführt werden kann. Je größer die Dimension der Schnittmenge aus Integrationsgebiet und zweidimensionaler Singularität des Kerns ist, desto früher in Bezug auf die geschachtelte Integration kann zu einem konstanten Kubaturgrad für die restlichen »partiellen« Integrale übergegangen werden. In [22] werden vierdimensionale Transformationen, die diese Querschnitte über dem α -dimensionalen Einheitswürfel $[0, 1]^\alpha$ mit $1 \leq \alpha \leq 3$ parametrisieren, dargestellt. Setzt sich der Rand Γ zudem aus stückweise ebenen Flächenstücken zusammen, so kann die äußere Integration nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge sogar elementar durchgeführt werden, denn die besagten vierdimensionalen Transformationen regularisieren in dem Fall nicht nur, sondern bewirken desweiteren eine Trennung der Variablen mit polynomialem Faktor. Die asymptotische Komplexität wird folglich von den *fast singulären* Integralen bestimmt, bezüglich derer sich die Gauß-Legendre-Tensorproduktquadratur gegenüber der Interpolationskubatur als vorteilhaft erwiesen hat und – eine uniforme Triangulierung vorausgesetzt – exponentiell konvergiert. Diese Produktquadratur kommt auch im singulären Nahfeld bei der »inneren« Integration

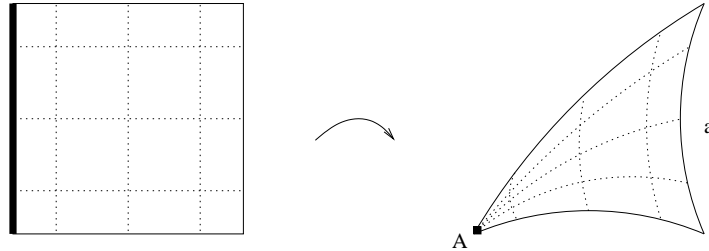
über $[0, 1]^\alpha$ zum Einsatz. Damit ist festzuhalten: Der Aufwand bezüglich einer der vier Kategorien »Gleiches Dreieck«, »Gemeinsame Kante«, »Gemeinsame Ecke« und »Fast singuläres Nahfeld« beträgt je Doppelintegral $\mathcal{O}(\log^\alpha(N))$. Der Exponent α entspricht der Anzahl der Richtungen, in denen der Gauß-Legendre-Grad in Abhängigkeit von N erhöht werden muß: In einer Richtung, falls $\pi_x = \pi_y$ gilt, und in zwei, drei bzw. vier Richtungen in den restlichen Kategorien in dieser Reihenfolge. Diese Konfiguration stellt den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen dar, wobei wir bei polynomialem Rand je nach Lage der Dreiecke in $4 - \alpha$ Dimensionen elementar integrieren.

Daß die Lösung des Problems vor allen Dingen im fast singulären Nahfeld und im Fall der gemeinsamen Ecke erstrebenswert ist, liegt nicht nur an dem höheren Aufwand je Dreieck-Paar, sondern zudem an dem quantitativen Übergewicht dieser beiden Kategorien innerhalb des Gesamt-Nahfeldes. Das Problem der Flächen- und der Kantensingularität kann als gelöst angesehen werden. Man beachte, daß jedes Dreieck π mit lediglich drei anderen eine Kante gemeinsam hat, wogegen viele Dreiecke π in einem Eckpunkt oder überhaupt nicht berühren, aber nahe dran liegen. Wir beziehen uns in dieser Arbeit auf das Nahfeld, das es innerhalb des Panel-Clustering zu erzeugen gilt. Die Zahl der Dreieckspaare darin ist asymptotisch durch $\mathcal{O}(N)$ beschränkt [17]. Somit stellen wir eine Komplexität von $\mathcal{O}(N \log^\alpha N)$ zur Erzeugung der einzelnen Kategorien und einen Gesamtaufwand von $\mathcal{O}(N \log^4 N)$ fest.

Es wurden in der Vergangenheit vor allen Dingen im fast singulären Nahfeld verschiedene Versuche der Effizienzsteigerung unternommen. In [2] beispielsweise treten innerhalb der Tensorproduktquadratur die Gauß-Legendre-Formeln in Kombination mit der Gauß-Jacobi-Quadratur auf. Zur Vermeidung von hohen Kubaturgraden wird in [27] die Unterteilung der Dreiecke empfohlen. Unentbehrlich ist diese bei Anwendung der Multiskalen-Matrixkompression, wenn über das Kartesische Produkt aus Dreiecken unterschiedlicher Größenordnungen integriert wird [29]. Das Ziel, die im singulären Bereich mögliche Trennung der Variablen auf den fast singulären zu übertragen, verfolgt die Arbeit [22]. Sie führt das Integral über $\pi_x \times \pi_y$ mit $\pi_x \cap \pi_y = \emptyset$ auf sechs Integrale über Paare mit gemeinsamer Ecke zurück und nutzt so die bessere Asymptotik ($\mathcal{O}(N \log^3 N)$) in dieser Kategorie aus. Das geht allerdings zu Lasten einer größeren Konstanten in der Aufwandsabschätzung, denn es sind jetzt *sechs* dreidimensionale Integrale an Stelle von *einem* vierdimensionalem zu berechnen. Die Einführung von Polarkoordinaten im Rahmen des *Kollokationsverfahrens* [18] ermöglicht auch im Galerkin-Verfahren [21] die elementare Integration über eine Dimension und stellt eine vielversprechende Alternative dar mit einem ebenfalls auf $\mathcal{O}(N \log^3 N)$ verbesserten Aufwand im fast singulären Nahfeld. Dieser Methode sind zwar nur polynomiale Ränder zugänglich, jedoch wurde in [22] diskutiert, warum die Integration über eine stückweise ebene Ersatzoberfläche im allgemeinen ausreicht.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung effizienter Techniken zur Nahfeldkubatur. Eine erste Aufwandsverbesserung gegenüber der klassischen Tensor-Gauß-Quadratur konnte dabei durch die Einführung der *Variierenden Tensorproduktquadratur* erzielt werden. Dieser unserem Wissen nach neuen Methode liegt die Beobachtung zugrunde, daß bei der Anwendung sogenannter *conical product rules* der Verzerrung des Kartesischen Kubaturgitters keine Rechnung getragen wird. Das dreieckige Randelement π wird

wegen der Tensorfaktorisierung über einem Quadrat parametrisiert, wodurch in der Nähe der Ecke A von π , der eine ganze Kante des Quadrats zugeordnet wird, eine unrentable Anhäufung von Kubaturpunkten auftritt.



Genau derselbe Effekt wird bei der Regularisierung durch die Duffy-Transformation ausgenutzt, wenn in dieser Ecke eine schwache Punktsingularität existiert. Ist der Integrand allerdings im gesamten Dreieck π – wie im fast singulären Fall – glatt, so *variiert* der Quadraturgrad bei dieser Methode bezüglich des Faktors, der über die zur gegenüberliegenden Seite a parallelen Linien quadriert. Er wird entsprechend der Länge dieser gestauchten Linien gewählt: Je näher diese dem besagten Eckpunkt von π sind, desto mehr Punkte können gespart werden. Während im fast singulären Nahfeld die zweifache Anwendung, d. h. bezüglich beider Dreiecke, möglich ist, erlauben die Kategorien der Kanten- und der Punktsingularität immerhin noch eine einfache. Eine genauere Analyse der vierdimensionalen regularisierenden Transformationen ergibt, daß hier zwei Transformationen eines einfacheren Typs enthalten sind, von denen die eine tatsächlich regularisiert. Die andere hingegen transformiert die bereits erwähnten zwei- bzw. dreidimensionalen Querschnitte, Dreiecke bzw. Prismen mit dreieckigen Grundseiten, ausschließlich wegen der Tensorfaktorisierung auf den α -dimensionalen Einheitswürfel mit $\alpha = 2, 3$. In der Nähe der Naht, die sich durch das gesamte Integrationsgebiet zieht, tritt wieder eine Anhäufung von Kubaturpunkten auf und die Variierende Tensorproduktquadratur ist erneut Effizienz steigernd anwendbar.

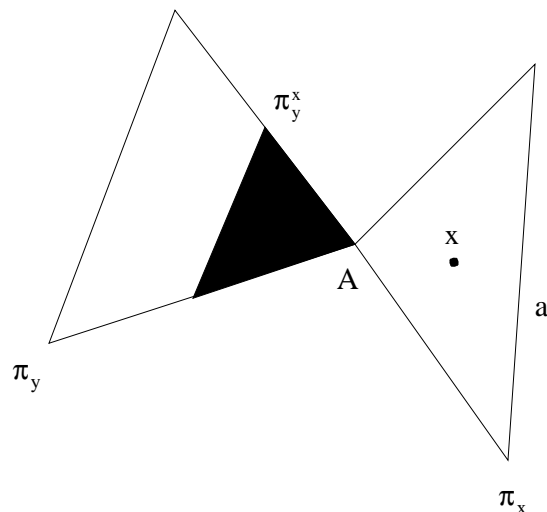
Eine vollkommen andere Idee beruht auf einer Formel von Z. P. Nowak, die zweidimensionale Flächenintegrale, wie sie beim Kollokationsverfahren auftreten, exakt bestimmt. Man weiß, daß sich im Fall ebener Dreiecke und $L = -\Delta$ das Doppelschichtpotential bezüglich π

$$D\varphi(x) := \int_{\pi} \frac{\partial}{\partial n(y)} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y)$$

in einem festen Punkt x über einen Raumwinkel, den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks auf der Einheitssphäre, auswerten läßt. Der Gaußsche Integralsatz ermöglicht anschließend die Erweiterung auf das Einfachschichtpotential [15]. Hier knüpft die vorliegende Arbeit an und entwickelt zuerst entsprechende Formeln für das hypersinguläre Potential der Potentialgleichung und anschließend für das Einfachschicht-, Doppelschicht- und hypersinguläre Potential der Lamé- und der Stokes-Gleichungen. Die Intuition besteht in einer

Faktorisierung der Kerne in einen singulären und einen polynomialen Anteil. Die Potentiale zum singulären Anteil lassen sich wieder auf das Laplacesche Doppelschichtpotential zurückführen, woraus sich schließlich die eigentlichen Potentiale inklusive Polynomanteil rekursiv ergeben. Die Helmholtz-Gleichung bildet diesbezüglich eine Ausnahme und muß getrennt betrachtet werden, denn eine Faktorisierung wie in den anderen Fällen ist hier nicht durchführbar. Wir zerlegen daher die Fundamentallösung Φ_H *additiv* in einen singulären und einen hinreichend glatten Rest, indem wir deren trigonometrischen Zähler in seine Taylor-Reihe entwickeln. Das zugehörige Potential des singulären Anteils läßt sich einmal mehr dank partieller Integration auf bekannte Größen reduzieren. Auf den glatten Rest sind abstrakte Kubaturformeln mit hinreichend hohem, aber konstantem Exaktheitsgrad anwendbar, weshalb er innerhalb dieses *Raumwinkelansatzes* ausgeklammert werden kann.

Im fast singulären Nahfeld bilden diese Formeln nun einen der beiden zweidimensionalen Faktoren in einer Tensorproduktkubatur über $\pi_x \times \pi_y$. Das bedeutet konkret, daß in den Stützstellen einer Kubaturformel Q_{π_x} das Potential vermöge obiger Formeln bezüglich π_y ausgewertet wird und eine zweidimensionale Kubatur über π_x übrigbleibt. Das hat den Vorteil, daß der Kubaturgrad nur noch auf einem der Dreiecke erhöht werden muß, da der andere Faktor bis auf Rundungsfehler exakt integriert. Die Implementierung der klassischen oder der Variierenden Tensorproduktquadratur als komplementärem Faktor Q_{π_x} vorausgesetzt hat das einen Aufwand von $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ im fast singulären Nahfeld zur Folge. Damit übernimmt die Kategorie »Gemeinsame Ecke« die Verantwortung für die Gesamt-Asymptotik, die jetzt $\mathcal{O}(N \log^3 N)$ beträgt. Eine Eingliederung ist folglich auch im Fall der Punktsingularität erstrebenswert. Die kann leider nicht kanonisch wie im Fastsingulären erfolgen, weil die Kubaturverfahren Q_{π_x} über π_x aufgrund der Singularität versagen würden.



Eine neue Idee besteht darin, die Eingliederung mit der im Anfang beschriebenen Duffy-Transformation aus [23] zu kombinieren. Zum Verständnis dieser Methode ist eine alternative Sichtweise dieser Transformationen hilfreich. Wir haben noch nicht erwähnt, daß die Regularisierung der singulären Integranden auf einer Unterteilung des Integrationsgebiets

in Untergebiete beruht. In der hier betrachteten Situation sind es derer zwei. Letztendlich wird für festes $x \in \pi_x$ bezüglich y nicht mehr über das gesamte Dreieck π_y wie bei disjunkten Dreiecken, sondern nur noch über ein von x abhängiges Teildreieck π_y^x integriert. Es wird desto kleiner, je näher x dem Schnittpunkt von π_x und π_y kommt. Hier finden also trotz der Regularisierung Auswertungen der Potentiale statt – und zwar bezüglich der Dreiecke π_y^x in $x \in \pi_x$. Eine Eingliederung obiger Formeln wäre an dieser Stelle möglich. Es ist jedoch von Vorteil, zuerst zu transformieren, um elementar bezüglich x über Linien integrieren zu können, die strahlförmig von der Singularität in A zur gegenüberliegenden Seite a von π_x verlaufen. Nach dieser machen wir die Transformation in den verbleibenden drei Dimensionen wieder rückgängig und so bleibt eine eindimensionale Integration bezüglich x über a . Der Integrand ist das Potential in Abhängigkeit von $x \in a$ bezüglich $\pi_y^x = \pi_y$. Es bieten sich eindimensionale Gauß-Legendre-Formeln für dieses Integral an, deren Quadraturgrad logarithmisch in N angehoben werden muß. Damit haben wir die Komplexität in dieser Kategorie von $\mathcal{O}(\log^3 N)$ auf $\mathcal{O}(\log N)$ und damit den Gesamtaufwand zur Nahfelderzeugung auf $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ verringert. Uns ist kein vergleichbares Ergebnis bekannt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:

Kapitel 2 stellt bekannte Ergebnisse zur Theorie und Numerik von Integralgleichungen bereit. Wir konzentrieren uns dabei auf die Potential- und die Helmholtz-Gleichung sowie den Einfachschichtpotentialansatz. Hervorzuheben ist die Anknüpfung an das *Lemma von Strang* zur hinreichenden Wahl der Kubaturgenauigkeit.

Kapitel 3 beleuchtet die Unterscheidung zwischen Nah- und Fernfeld aus zwei unterschiedlichen Richtungen, der Matrixassemblierung und der Matrix-Vektor-Multiplikation. Wir orientieren uns in dieser Arbeit, insbesondere bei den numerischen Vergleichen, an dem Nahfeld, wie es beim Panel-Clustering definiert wird. Daher erfolgt hier eine Darstellung der dafür notwendigen Oberflächenstrukturierung.

Kapitel 4 stellt den Hauptteil der Arbeit dar. Wir erinnern an die klassische Tensorproduktquadratur und beziehen uns dabei auf [29]. Desweiteren führen wir diesbezüglich eine Fehleranalyse durch, die unter Annahme eines polygonalen Randes ohne eine von Rahmendaten abhängige Konstante auskommt und so die sorgfältige Angabe von hinreichenden Kubaturgraden ermöglicht. Es wird auf eine ableitungsfreie Fehlerabschätzung für die Gauß-Legendre-Quadratur zurückgegriffen [9], wozu die analytische Fortsetzbarkeit des Integranden in Ellipsen der komplexen Ebene bezüglich der einzelnen Variablen entscheidend ist. Es ist möglich, die Größe der Ellipsen in Abhängigkeit der Dreiecksdurchmesser und des Dreieckabstandes zu bestimmen. Somit sind einfache Kubaturgradkriterien angebar. Außerdem führen wir die Variierende Tensorproduktquadratur ein. Die Ergebnisse bezüglich der klassischen Produktquadratur lassen sich durch kleine Änderungen auf das neue Verfahren übertragen, was für eine sinnvolle Verteilung der variierenden Quadraturgrade unentbehrlich ist. Bei der Rückführung des VTQ-Fehlers auf den der einzelnen Faktoren ist eine Aufspaltung des Fehlers, wie sie in [29] für die Tensorproduktquadratur angewendet wird, allerdings nicht möglich, da der variierende Faktor nicht mehr mit dem fixen vertauscht werden kann. Wir führen eine andere Aufspaltung durch, die diese Vertauschbarkeit nicht benötigt. Danach geben wir die wichtigsten Eigenschaften der regu-

larisierenden Transformationen, wie sie in [23] erklärt sind, wider. Bezüglich der Wahl der hinreichenden Kubaturgrade greifen wir ebenfalls auf diese Arbeit zurück. Außerdem wird dargestellt, wie die VTQ auf die singulären Fälle »Gemeinsame Kante« und »Gemeinsame Ecke« erweiterbar ist.

Der dritte Abschnitt dieses Kapitels hat den Raumwinkelansatz zum Inhalt. Nach einer Darstellung der Formeln für Einfachschicht- und Doppelschichtpotential der Potentialgleichung entwickeln wir ähnliche Formeln für deren hypersinguläres Potential. Anschließend erfolgen die Herleitungen für das Einfachschichtpotential der Helmholtz-Gleichung. Leider ist es nicht möglich, diese auf andere Ansätze wie den Ansatz von Brakhage-Werner [5] zu übertragen. Wir gehen kurz auf die Schwierigkeiten ein. Die Raumwinkelformeln für die Lamé- und die Stokes-Gleichungen werden in einem gemeinsamen Unterabschnitt betrachtet. Erfreulicherweise ist hier die Angabe von Formeln für alle Ansätze möglich. Ein weiterer Unterabschnitt widmet sich der Eingliederung der Raumwinkelformeln in das Galerkin-Verfahren. Neben dem fast-singulären Fall gehen wir auf den der Ecksingularität ein. Hier stellt die Eingliederung die Voraussetzung dar für die Verbesserung der asymptotischen Komplexität. Die Raumwinkelformeln benötigen eine Reihe von nicht-elementaren Operationen wie beispielsweise den Logarithmus. In einem letzten Unterabschnitt wollen wir eine Idee erläutern, wie die Effizienz dieser Formeln gesteigert werden kann, indem die nicht-elementaren Operationen approximiert werden mittels Interpolation vorab tabellierter Werte. Es ist darauf zu achten, daß dieser Approximationsfehler keine signifikante Vergrößerung des Gesamtfehlers der semi-analytischen Integration bewirkt. Diese Methode stellt praktisch den Versuch dar, die Exaktheit der Raumwinkelformel in Effizienz umzuwandeln.

Im abschließenden Abschnitt dieses Kapitels erläutern wir, warum es nicht möglich ist, die Schnelligkeit mit Kubaturverfahren bezüglich der Singularität angepaßter Maße zu steigern.

Die letzten drei Kapitel dieser Arbeit bilden den Numerikteil. In Kapitel 5 beginnen wir mit Hinweisen zur Implementierung. Bei der Anwendung der Raumwinkelformeln müssen beispielsweise Dreiecke in eine bestimmte Ebene transformiert werden. Wir geben dazu eine günstige Möglichkeit an.

In Kapitel 6 vergleichen wir die Laufzeiten der verschiedenen Verfahren zur Nahfeldassemblierung am Beispiel der Helmholtz-Gleichung miteinander. Das Nahfeld stammt von einer Oberflächenstrukturierung, wie sie beim Panel-Clustering entsteht.

Zum Schluß betrachten wir in Kapitel 7 eine Anwendung. Es handelt sich dabei um ein Helmholtz-Innenraumproblem mit Dirichlet-Randwerten. Wir simulieren die schallweiche Streuung einer Kugelwelle.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Michael Griebel und ebenso Herrn Dr. Klaus Giebermann für die motivierenden Diskussionen und wertvollen Ratschläge.

Kapitel 2

Integralgleichungen

2.1 Die Integralgleichungsmethode

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Umformulierung einer Randwertaufgabe in eine Randintegralgleichung durch einen Potentialansatz, der in den ersten beiden Unterabschnitten dargestellt wird. Danach folgen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen. Die Ausführung konzentriert sich auf das Einfachschichtpotential und die Dirichlet-Randwertaufgabe, also auf schwach-singuläre Fredholmsche Integralgleichungen erster Art. Für eine ausführliche Darstellung beispielsweise komplizierterer Sprungrelationen schlage man in [15] nach.

2.1.1 Die Fundamentallösung

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei ein beschränktes, \mathcal{C}_{stw}^1 -berandetes Gebiet (siehe Anhang), $\Omega^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ dessen Außenraum. Der kompakte Rand $\Gamma := \partial\Omega = \partial\Omega^+$ trenne die beiden Gebiete. Unser Ausgangspunkt ist der lineare, elliptische Differentialoperator L mit konstanten Koeffizienten. Die klassische Form der zugehörigen Dirichlet-Randwertaufgabe mit homogener rechter Seite lautet

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega^{(+)}, \quad (2.1)$$

$$\gamma_0 u = b \text{ in } \Gamma \quad (2.2)$$

$$\text{mit } \gamma_0 = u|_{\Gamma} \text{ und } u \in \mathcal{C}^2(\Omega^{(+)}) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}^{(+)}).$$

Definition 2.1 Die zu L gehörige Fundamentallösung $\Phi(x, y) = \tilde{\Phi}(x - y)$ erfüllt die Identität

$$L_x \Phi(\cdot, y) = \delta_y \quad (2.3)$$

mit dem Diracschen Funktional δ_y im distributionellen Sinne und hat in $x = y$ eine Singularität möglichst schwacher Ordnung.

Beispiel Zwei wichtige skalare Differentialgleichungen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sind

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{(Potentialgleichung)} \\ \text{und } \Delta u + k^2 u &= 0 && \text{(Helmholtz-Gleichung)} \end{aligned}$$

mit den Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|_2} \\ \text{und } \Phi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik\|x - y\|_2)}{\|x - y\|_2}. \end{aligned}$$

Die Helmholtz-Gleichung für die \mathbb{C} -wertige Unbekannte u beschreibt die Ausbreitung zeit-harmonischer akustischer Wellen in $\Omega^{(+)}$. Die Dirichlet-Randbedingungen besagen, daß der Druck am Rand des Gebietes gleich Null sei und modellieren die Streuung an schallweichen Hindernissen [7]. Der Parameter $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ heißt Wellenzahl und $\lambda \in \mathbb{R}$ Wellenlänge.

Es seien $y_i, i = 1 \dots k$, Punkte in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^{(+)}$. Dann genügt das von den endlich vielen Punktladungen erzeugte Potential

$$u(x) = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \Phi(x, y_i)$$

der Differentialgleichung (2.1), ohne dabei im allgemeinen die Randbedingung (2.2) zu erfüllen. Mit einer kontinuierlichen Verteilung der $y_i \in \Gamma$ sieht es besser aus. Die Summation geht dann in Integration über.

2.1.2 Oberflächenpotentiale

Mit Hilfe der folgenden Oberflächenpotentiale werden wir die Differentialgleichung (2.1) lösen. Die Integration über Flächen wird in Definition A.6 im Anhang erklärt.

Definition 2.2 *Es sei $\Gamma \in \mathcal{C}_{stw}^1$, $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ und $n(y)$ der nach außen gerichtete, fast überall definierte Normalenvektor an Γ in y . Mit der Fundamentallösung $\Phi(x, y)$ der Potential- oder der Helmholtz-Gleichung definieren wir für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$*

$$S\varphi(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \tag{2.4}$$

$$\text{und } D\varphi(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n(y)} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \tag{2.5}$$

das Einfach- und das Doppelschichtpotential mit der Belegung φ .

Bemerkung Es gibt neben diesen noch ein hypersinguläres Potential. Es wird sich mit Hilfe des Laplace-Doppelschichtpotentials eine Möglichkeit ergeben, verschiedene Oberflächenpotentiale effizient auszuwerten. In diesem Kapitel soll das Einfachschichtpotential im Vordergrund stehen.

Satz 2.1 *Das Einfach- und das Doppelschichtpotential mit stetiger Belegung φ lösen die Differentialgleichung (2.1).*

Beweis Die Behauptung folgt durch Vertauschen von Integration und Differentiation unter Verwendung von [13, Abschn. 11, Satz 2]. \square

Satz 2.2 *Sei $\Gamma \in \mathcal{C}_{stw}^1$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 . Gilt für die in $\Gamma \setminus x_0$ stetige Funktion f*

$$f(x) \leq C|x - x_0|^{-\lambda} \text{ mit } \lambda < 2,$$

so ist f über Γ integrierbar. f heißt dann schwach singulär.

Beweis Falls $\Gamma = \mathbb{R}^2$, ist die Aussage bekannt. Der allgemeine Fall folgt, indem man den Integranden $\varphi(\tau(t))\sqrt{g(t)}$ im \mathbb{R}^2 betrachtet. \square

Bemerkung Die Fundamentallösung $\Phi(x, y)$ ist für festes $x \in \Gamma$ schwach singulär. Daher existiert (2.4) auch für $x \in \Gamma$.

Nähert sich $x \in \Omega^{(+)}$ einem $a \in \Gamma$, dann geht die parameterbehaftete Integration

$$S\varphi(x) = \int_{\Gamma} \frac{1}{|x - y|} \varphi(y) ds(y)$$

eines stetigen in die eines schwach singulären Integranden über. Was bedeutet das für die Glattheit der Funktion $S\varphi(x)$?

Satz 2.3 *Es sei $\Gamma \in \mathcal{C}_{stw}^1$ und $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$. Das Einfachschichtpotential ist dann stetig im \mathbb{R}^3 .*

Beweis Siehe [15, 8.1.7].

Die Stetigkeit des Einfachschichtpotentials und die Dirichlet-Randbedingung (2.2) führen zu der Randintegralgleichung

$$S\varphi(x) = b(x), \quad x \in \Gamma \tag{2.6}$$

als einer Fredholmschen Integralgleichung erster Art. Es ist damit möglich, die Innen- und die Außenraumaufgabe simultan zu lösen. Es zeigt sich, daß das Abklingverhalten des Einfachschichtpotentials für $x \rightarrow \infty$ in den Rahmen der Außenraum-Problemstellung paßt.

Satz 2.4 *Die Dirichlet-Außenraumlösung (2.1)/(2.2) ist eindeutig, falls*

$$|u(x)| = \mathcal{O}(1/r) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty$$

$$\text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\nabla u(x)| = \mathcal{O}(1/r^2) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty \text{ (Potentialgleichung)} \\ |(\frac{\partial}{\partial r} - ik)u(x)| = \mathcal{O}(1/r^2) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty \text{ (Helmholtz-Gleichung)} \end{array} \right.$$

gleichmäßig für alle $x / \|x\|_2$ erfüllt sind. Die Dirichlet-Innenraumaufgabe der Potentialgleichung hat höchstens eine Lösung. Bei der Helmholtz-Gleichung gibt es irreguläre Wellenzahlen, für die die Innenraumaufgabe nicht mehr eindeutig lösbar ist. Ist k^2 kein Eigenwert der Potentialgleichung mit Dirichlet-Randwerten, so gibt es auch hier höchstens eine Innenraumlösung.

Beweis Siehe [7] und [15].

Bemerkung Das Einfach- und das Doppelschichtpotential erfüllen die Ausstrahlungsbedingungen. Man spricht im Falle der Helmholtz-Gleichung auch von der *Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung*.

2.1.3 Die variationelle Formulierung

Es sei $\Gamma \in \mathcal{C}^{k,\kappa}$ und $1/2 < l \leq k + \kappa$. Dann läßt sich der Spuroperator γ_0 aus (2.2) stetig auf $H^l(\Omega^{(+)})$ fortsetzen [30, Satz 8.7]. Der lineare Spuroperator

$$\gamma_0 : H^l(\Omega) \rightarrow H^{l-1/2}(\Gamma)$$

erlaubt folgende Problemstellung:

Es sei $b \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung des inneren Dirichlet-Problems der Potentialgleichung, falls

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} &= 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{mit } \gamma_0 u &= b \end{aligned} \tag{2.7}$$

gilt. Dagegen heißt $u \in H^1(\Omega)$ schwache Helmholtz-Innenraumlösung, falls u

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - k^2(u, v)_{L^2(\Omega)} &= 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{mit } \gamma_0 u &= b \end{aligned} \tag{2.8}$$

genügt. Die Definition der Sobolev-Räume findet sich im Anhang.

Satz 2.5 Für $\Gamma \in \mathcal{C}^{0,1}$ und $\sigma \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sind die Operatoren

$$S : H^{-\frac{1}{2}+\sigma}(\Gamma) \rightarrow H_{loc}^{1+\sigma}(\mathbb{R}^3) \quad \text{und} \tag{2.9}$$

$$(\gamma_0 \circ S) : H^{-\frac{1}{2}+\sigma}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}+\sigma}(\Gamma) \tag{2.10}$$

mit S aus (2.4) stetig. Wir schreiben in (2.10) im folgenden anstatt $\gamma_0 \circ S$ einfach S .

Beweis Siehe [8].

Bemerkung Man beachte, daß für $\Gamma \in \mathcal{C}^{0,1}$ die Räume $H^l(\Gamma)$ nur für $l \leq 1$ definiert sind und die Aussage (2.10) optimal ist.

Korollar 2.1 *Der Operator $S : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ ist kompakt.*

Beweis Die Verkettung von kompakter Einbettung mit stetigem S

$$L^2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{S} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$$

ist kompakt. □

Wir können somit die stetige Sesquilinearform $a : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{K}$

$$a(\varphi, \psi) := \langle S\varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \overline{\psi(x)} ds(y) ds(x) \quad (2.11)$$

definieren. Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Duale Paarung $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{K}$. Konkret gilt also für alle $\varphi, \psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$|a(\varphi, \psi)| \leq C \|\varphi\|_{\Gamma, -1/2} \|\psi\|_{\Gamma, -1/2}. \quad (2.12)$$

Wir nehmen an, daß die Sesquilinearform $a(\cdot, \cdot)$ koerziv ist

$$|\Re a(\varphi, \varphi)| \geq c_1 \|\varphi\|_{\Gamma, -\frac{1}{2}}^2 - c_2 \|\varphi\|_{\Gamma, t}^2 \quad (t < -1/2) \quad (2.13)$$

und mit dem Energieraum $X := H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ die Bedingungen

$$\inf_{\varphi \in X} \sup_{\psi \in X} \frac{a(\varphi, \psi)}{\|\varphi\|_{\Gamma, -\frac{1}{2}} \|\psi\|_{\Gamma, -\frac{1}{2}}} \geq \alpha > 0 \quad (2.14)$$

$$\text{und } \forall \psi \in X \exists \varphi \in X : a(\varphi, \psi) \neq 0 \quad (2.15)$$

erfüllt. Die Ungleichung (2.14) heißt *inf-sup-Bedingung*.

Es sei $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Dann heißt $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ schwache Lösung der Randintegralgleichung (2.6), falls

$$a(\varphi, \psi) = \langle b, \psi \rangle \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (2.16)$$

gilt. Nach [4, Satz 3.3.6] ist $S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ein Isomorphismus. Damit ist (2.16) eindeutig lösbar. Der Operator S aus (2.9) liefert die Lösung von (2.7) bzw. (2.8).

2.2 Die Randelementmethode

Wir nutzen die variationelle Formulierung der Integralgleichung (2.16), um diese mittels Finiter Elemente zu diskretisieren. Die Träger unserer Ansatz- und Testfunktionen sind Teile des Randes Γ , daher spricht man von der *Randelementmethode*.

2.2.1 Das Galerkinverfahren

Neben dem Kollokationsverfahren (siehe [15]) zählt das Galerkin-Verfahren zu den wichtigsten Diskretisierungsverfahren bei der Integralgleichungsmethode. Während beim Kollokationsverfahren die Diskretisierung erfolgt, indem die Identität (2.6) nicht mehr für alle $x \in \Gamma$, sondern nur noch in endlich vielen Kollokationspunkten $x_i \in \Gamma$ gefordert wird, ist es beim Galerkin-Verfahren Gleichung (2.16), die nicht mehr für alle $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sondern nur noch für Funktionen aus endlichdimensionalen Unterräumen von $H^{-1/2}(\Gamma)$ zu erfüllen ist. Ersetze also in obiger Variationsformulierung (2.16) den Hilbertraum $H^{-1/2}(\Gamma)$ durch eine ausschöpfende Folge von endlichdimensionalen Unterräumen S_h und suche zu $b \in H^{1/2}(\Gamma)$ die Galerkin-Lösung $\varphi_G \in S_h$, die

$$a(\varphi_G, \psi) = (b, \psi)_{\Gamma,0} \quad \forall \psi \in S_h \quad (2.17)$$

erfüllt als eine Näherung an die exakte Lösung φ aus (2.16). Wegen der Koerzivität (2.13) gelten die Bedingungen (2.14) und (2.15) auch noch, wenn man $X = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ durch S_h ersetzt [16, Theorem 8.2.8].

Satz 2.6 *Es sei $b \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann gibt es genau ein φ_G , das (2.17) löst.*

Beweis Mit [4, Satz 3.3.6].

Wählt man eine Basis $(\varphi_j)_{j \in J}$ von S_h und gilt $\varphi = \sum_{j=1}^N w_j \varphi_j \in S_h$, dann ist (2.17) äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$A_h w = b_h \quad (2.18)$$

mit den Koeffizienten $a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ und $b_i = \langle b, \varphi_i \rangle$. Wir treffen nun auf eine Reihe von Problemen, die beim Aufstellen der Matrix und beim Lösen des Gleichungssystems entstehen:

- Das Problem (2.16) ist zwar sachgemäß gestellt [4], was durch die relativ starke Norm im Bildraum erreicht wird, aber numerisch instabil. Entscheidet man sich bei der Wahl der S_h nämlich für die nodale Basis (siehe Unterabschnitt 2.2.2), so daß $\|\varphi\|_{\Gamma,0} \simeq h \|w\|_2$ gilt, dann hat die Kompaktheit von S auf $L^2(\Gamma)$ (Korollar 2.1) erst die Unbeschränktheit der Inversen S^{-1} und dann $\|A_h^{-1}\|_2 \rightarrow \infty$ für $h \rightarrow \infty$ zur Folge.
- Für die spektrale Kondition der A_h gilt $\kappa_2(A_h) = \mathcal{O}(h^{-1})$ unter der Annahme, daß erneut die nodale Basis den Raum S_h erzeugt [14]. Damit sind die Matrizen zwar besser konditioniert als jene, die bei elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstehen, aber dennoch nicht gut. Das führt beim Lösen beispielsweise mit Krylovraumverfahren zu vielen Iterationsschritten. Vorkonditionierer wirken dem entgegen.
- Ist N die Dimension von S_h , dann beträgt der Aufwand für eine Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathcal{O}(N^2)$, denn A_h ist vollbesetzt.

- Für jeden Matrixeintrag sind vierdimensionale Doppelintegrale über Γ zu bestimmen.

In dieser Arbeit steht der letzte Punkt im Vordergrund. Zunächst sollen die S_h konstruiert und die Frage beantwortet werden, wie die Konvergenz der φ_G gegen φ von der Wahl der Unterräume S_h abhängt.

2.2.2 Triangulierung und Konvergenz

Wie bei den Finiten Elementen der elliptischen Differentialgleichungen setzen sich unsere Ansatz- und Testfunktionen stückweise aus Polynomen zusammen und haben einen kleinen Träger, was aber leider wegen der globalen Integraloperatoren und im Gegensatz zur Situation bei den Differentialgleichungen nicht zu dünnbesetzten Matrizen führt. Gemäß dem Träger dieser Splinefunktionen und zur Unterscheidung von ihren Vorbildern, den Finiten Elementen, heißen diese *Randelemente* und das Diskretisierungsverfahren *Randelementmethode*.

Triangulierung

Definition 2.3 Eine zulässige Triangulierung von Γ ist eine Zerlegung

$$\mathcal{T}_n := \{\pi_\nu : 1 \leq \nu \leq n\}$$

von Γ in (gekrümmte) Dreiecke mit

$$\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^n \pi_\nu \quad \text{und} \quad \pi_\nu \cap \pi_\mu \in \{\emptyset, \text{gemeins. Punkt}, \text{gemeins. Kante}\}, \text{ falls } \nu \neq \mu.$$

Die Maschenweite $h := \max_\nu \{\text{diam}(\pi_\nu) : \pi_\nu \in \mathcal{T}_n\}$ ist der entscheidende Diskretisierungsparameter, weshalb wir auch $\mathcal{T}_h := \mathcal{T}_n$ schreiben. Eine zulässige Triangulierung heißt uniform, falls mit von π unabhängigen Konstanten c_1 und c_2

$$c_1 h^2 \leq |\pi| \leq c_2 h^2 \tag{2.19}$$

gilt.

Nun zu den Ansatz- und Testräumen: Wir nehmen an, daß es eine zu \mathcal{T}_h gehörige reguläre Parametrisierung $(\tau_\nu)_\nu$

$$\tau_\nu : \Delta_{ref} \rightarrow \pi_\nu$$

gibt, so daß $\Gamma \in \mathcal{C}_{stw}^{k,\kappa} \Rightarrow \tau_i \in \mathcal{C}^{k,\kappa}$ gilt. Dabei bezeichnet

$$\Delta_{ref} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

das Referenzelement. Es werden die Splineräume $S_{h,\eta}$,

$$\begin{aligned} S_{h,0} &:= \{\varphi \in L^\infty(\Gamma) : \varphi|_\pi \text{ ist konstant für alle } \pi \in \mathcal{T}_h\} \quad \text{und} \\ S_{h,1} &:= \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma) : \varphi \circ \tau_\nu \text{ ist linear auf } \Delta_{ref} \text{ für alle } 1 \leq \nu \leq n\}, \end{aligned}$$

betrachtet. Die Dimension dieser werde mit N bezeichnet und im Falle $\eta = 0$ gilt $N = n$.

Bemerkung Unsere Darstellung umfaßt ein konformes Galerkin-Verfahren mit identischen Ansatz- und Testfunktionen.

Im Falle der stückweise konstanten Ansatzfunktionen wählen wir als Basis die charakteristischen Funktionen χ_π . Die Räume $S_{h,1}$ werden von der *Lagrange-* oder *nodalen Basis* aufgespannt, die durch $\varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}$ charakterisiert wird. Die x_i sind dabei die Knotenpunkte, d. h. die Ecken der Dreiecke.

Satz 2.7 \mathcal{T}_h sei eine uniforme Triangulierung und $\varphi = \sum_i w_i \varphi_i$. Dann gilt mit von h unabhängigen Konstanten C_1 und C_2

$$C_1 \|\varphi\|_{\Gamma,0} \leq h \|w\|_2 \leq C_2 \|\varphi\|_{\Gamma,0} \quad (2.20)$$

$$\text{und} \quad C_1 h^{-2} \leq n \leq C_2 h^{-2}. \quad (2.21)$$

Beweis Siehe [4].

Konvergenz

Die diskrete inf-sup-Bedingung und die Stetigkeit der Sesquilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ermöglichen die Abschätzung des Galerkinfehlers in der Energienorm durch den Approximationsfehler

$$\|\varphi - \varphi_G\|_{\Gamma,-1/2} \leq C \inf_{\psi \in S_h} \|\varphi - \psi\|_{\Gamma,-1/2} \quad (\text{Cea-Lemma [4, 3.3.7]}). \quad (2.22)$$

Ausschlaggebend ist also die bestmögliche Approximation, welche im folgenden Satz charakterisiert wird.

Satz 2.8 (Approximationseigenschaft) Für alle s, σ mit $-2 \leq \sigma \leq s \leq \eta + 1$ und $\sigma \leq \eta$ gibt es eine Konstante $C(\sigma, s)$, so daß für alle $\varphi \in H^s(\Gamma)$ ein $\tilde{\varphi} \in S_{h,\eta}$ existiert mit

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\Gamma,\sigma} \leq C h^{s-\sigma} \|\varphi\|_{\Gamma,s}. \quad (2.23)$$

Hierbei bestimmt $\eta = 0, 1$ die Wahl der Ansatzfunktionen.

Beweis Siehe [3] und [6].

Damit erhalten wir Konvergenz, vorausgesetzt, die Matrixelemente sind ungestört.

Satz 2.9 Es seien Γ, b und S hinreichend glatt bzw. regulär. Dann konvergiert die Galerkinlösung gegen die exakte Lösung φ der Randintegralgleichung

$$\|\varphi - \varphi_G\|_{\Gamma,-1/2} \leq C h^{\eta+3/2} \|\varphi\|_{\Gamma,\eta+1} \leq C h^{\eta+3/2} \|b\|_{\Gamma,\eta+2}. \quad (2.24)$$

Beweis Cea-Lemma, Approximationseigenschaft und Regularität.

Falls $-2 \leq \sigma \leq s \leq \eta$ gilt, ist es möglich, starke gegen schwache Sobolevnormen unter Verlust von h -Potenzen abzuschätzen:

$$\|\varphi\|_{\Gamma,s} \leq C(\sigma, s) h^{\sigma-s} \|\varphi\|_{\Gamma,\sigma} \quad (\text{Inverse Ungleichung}). \quad (2.25)$$

Beweis [6] und [14].

2.2.3 Die volldiskrete Lösung

Die Galerkinlösung wird in der Praxis nicht berechnet, denn bei der Assemblierung der Matrix und der rechten Seite ersetzt die numerische Integration die analytische und liefert damit Approximationen

$$a_h(\varphi, \psi) := Q_{\Gamma \times \Gamma}[\varphi \Phi \psi] = \sum_{\pi_x \in \mathcal{I}_h} \sum_{\pi_y \in \mathcal{I}_h} Q_{\pi_x \times \pi_y}[\varphi \Phi \psi] \quad \forall \varphi, \psi \in S_h \quad (2.26)$$

an die ursprüngliche Sesquilinearform

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \overline{\psi(x)} ds(y) ds(x)$$

und

$$b_h(\psi) := Q_{\Gamma}[b \psi] \quad \forall \psi \in S_h$$

an die rechte Seite

$$b \in H^{1/2} = H^{-1/2'} \text{ mit } \langle b, \psi \rangle = \int_{\Gamma} b(x) \overline{\psi(x)} ds(x).$$

Bemerkung Die Kubaturformeln bestehen aus Punktauswertungen des Integranden, weshalb die gestörten (Sesqui)-Linearformen ausschließlich für stückweise stetige Funktionen erklärt werden können. Dies schränkt die Störungsanalyse aber nicht ein.

Es ist zu beachten, daß weder die Eindeutigkeit oder Existenz einer Lösung φ_h von

$$a_h(\varphi_h, \psi) = b_h(\psi) \quad \forall \psi \in S_h, \quad (2.27)$$

noch die Konvergenz dieser gegen die exakte Lösung φ apriori klar sind. Gilt für ein $\epsilon > 0$

$$|a(\varphi, \psi) - a_h(\varphi, \psi)| \leq C h^\epsilon \|\varphi\|_{\Gamma, -\frac{1}{2}} \|\psi\|_{\Gamma, -\frac{1}{2}},$$

so erfüllt $a_h(\cdot, \cdot)$ für hinreichend kleines $h \leq h_0$ die diskrete inf-sup-Bedingung

$$\inf_{\varphi \in S_h} \sup_{\psi \in S_h} \frac{|a_h(\varphi, \psi)|}{\|\varphi\|_{\Gamma, -\frac{1}{2}} \|\psi\|_{\Gamma, -\frac{1}{2}}} \geq \tilde{\gamma} > 0 \quad (2.28)$$

und das volldiskrete System (2.27) ist für $h < h_0$ eindeutig lösbar und stabil (siehe dazu [16, Lemma 6.5.3] und [24]).

Es stellen sich in diesem Zusammenhang zwei wichtige Fragen.

1. Wie genau müssen die Integrale approximiert werden, damit die Konvergenzrate der Galerkin-Lösung für die gestörte Galerkinlösung erhalten bleibt?

2. Was bedeutet das für den Kubaturgrad des gewählten Verfahrens?

Die zweite Frage wird in den nächsten Kapiteln ausführlich diskutiert. Auf die erste Frage liefert folgender Störungssatz eine Antwort.

Lemma 2.1 (1. Lemma von Strang) *Es sei (2.28) erfüllt und φ bzw. φ_h seien die Lösungen von (2.16) bzw. von (2.27). Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_h\|_{\Gamma, -1/2} \leq & C \left(\inf_{v_h \in S_h} \left\{ \|\varphi - v_h\|_{\Gamma, -1/2} + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{\Gamma, -1/2}} \right\} \right. \\ & \left. + \sup_{w_h \in S_h} \left\{ \frac{(b, w_h)_{\Gamma, 0} - (b_h, w_h)_{\Gamma, 0}}{\|w_h\|_{\Gamma, -1/2}} \right\} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Beweis Siehe [24, Lemma 8].

Nach diesem Satz ist die Konvergenz offensichtlich nur dann möglich, wenn die Integrale mit feiner werdender Triangulierung \mathcal{T}_h genauer approximiert werden. Es findet hier also ein zweiter Grenzwertprozeß statt. Folgende Bedingungen an die gestörten Formen erweisen sich als hinreichend für die Erhaltung der Galerkin-Konvergenzordnung (2.24):

$$|a(\varphi, \psi) - a_h(\varphi, \psi)| \leq C h^{\eta+3/2} \|\varphi\|_{\Gamma, \eta} \|\psi\|_{\Gamma, -1/2} \quad \forall \varphi, \psi \in S_h \quad (2.30)$$

$$\text{und} \quad |b(\psi) - b_h(\psi)| \leq C h^{\eta+3/2} \|\psi\|_{\Gamma, -1/2} \quad \forall \psi \in S_h. \quad (2.31)$$

Beweis [24, Theorem 9].

Die Auswertung der diskreten Form (2.26) setzt sich aus maximal n^2 Teil-Kubaturen, den sogenannten *Dreieck-gegen-Dreieck-Kubaturen*, zusammen: Je kleiner die Träger von φ und ψ , desto weniger. So besteht die Berechnung eines Matrixkoeffizienten im Falle der stückweise konstanten Ansatzfunktionen ($S_h = S_{h,0}$) aus nur einer Dreieck-gegen-Dreieck-Kubatur. Den Brückenschlag zur Herleitung hinreichender Kubaturgrade bilden Fehlerabschätzungen von

$$\begin{aligned} & |E_{\pi_x \times \pi_y}[\varphi \Phi \psi]| := \\ & \left| \int_{\pi_x} \int_{\pi_y} \Phi(x, y) \varphi(y) \psi(x) ds(y) ds(x) - Q_{\pi_x \times \pi_y}[\varphi \Phi \psi] \right|, \end{aligned} \quad (2.32)$$

auf die im nächsten Kapitel eingegangen wird. Was noch fehlt, ist eine (2.30) entsprechende Forderung an diesen lokalen Approximationsfehler.

Satz 2.10 *Gegeben seien beliebige Kubaturverfahren $Q_{\pi_x \times \pi_y}$ für alle $(\pi_x, \pi_y) \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h$. Erfüllen diese die Forderung*

$$|E_{\pi_x \times \pi_y}[\varphi \Phi \psi]| \leq C h^{\eta+3.5} \|\varphi\|_{\pi_y, \eta} \|\psi\|_{\pi_x, -1/2} \quad \forall \varphi, \psi \in S_h, \quad (2.33)$$

so konvergiert die gestörte Lösung φ_h von (2.27) mit der Rate der Galerkinlösung (2.24). Der Übergang vom lokalen zum globalen Fehler kostet also zwei h -Potenzen.

Beweis Siehe [24, Lemma 10].

Kapitel 3

Das Nah- und das Fernfeld

Die entscheidenden Nachteile der Randelement- gegenüber der Finite-Elemente-Methode resultieren aus den Eigenschaften des (schwach-) singulären Kerns Φ . Wegen der Globalität des Trägers $\text{supp } \Phi$ erfordert ein Projektionsverfahren die Berechnung aller N^2 Matrixkoeffizienten. Diese ist aufgrund der Diagonalsingularität des Kerns zur Matrixdiagonale hin sehr aufwendig. Beim Galerkin-Verfahren handelt es sich zudem um Doppelintegrale, die die analytische Assemblierung der Matrix im allgemeinen verhindern. Desweiteren ist die vollbesetzte Matrix für einen hohen Aufwand bei der Matrix-Vektor-Multiplikation verantwortlich.

Dem gegenüber steht die im Vergleich zu den FE-Räumen kleinere Dimension der Randelementräume bei gleicher Maschenweite h : Betrachtet man den Einheitswürfel $\bar{\Omega} = [0, 1]^3$ und eine Triangulierung mit Würfeln bzw. Quadraten, so besteht der gesamte Würfel aus $1/h^3$ Elementen, während die Oberfläche Γ lediglich in $6/h^2$ Vierecke zerfällt. Hier steht h ausnahmsweise für die Kantenlänge und nicht für die sich von dieser nur durch einen festen Faktor unterscheidenden Maschenweite. Ein zweiter sich daraus ergebender Vorteil der Randelementmethode gegenüber der FEM besteht in der Gittererzeugung. Diese macht besonders bei komplizierten Geometrien einen großen Anteil der Finite-Elemente-Methode aus. Die beiden folgenden Abschnitte werfen einen Blick auf die zwei grundlegenden Bestandteile einer Randelement-Simulation. Bezüglich beider motiviert das singuläre Verhalten des Kerns die Unterscheidung zwischen einem Nah- und einem Fernfeld.

3.1 Die Matrixassemblierung

In (2.33) am Ende des vergangenen Kapitels wurde das Maß bestimmt, in dem die Kubaturgenauigkeit in Abhängigkeit von h erhöht werden muß, um die Galerkin-Konvergenzrate zu erhalten. Es galt

$$|E_{\pi_x \times \pi_y}[\varphi \Phi \psi]| \leq Ch^{\eta+3.5} \|\varphi\|_{\pi_y, \eta} \|\psi\|_{\pi_x, -1/2} \quad \forall \varphi, \psi \in S_h.$$

Für den Fall $\eta = 0$ geben wir ein Kriterium für den absoluten Fehler an.

Satz 3.1 *Es sei $\eta = 0$, $\varphi = \sum_j v_j \chi_{\pi_j}$, $\psi = \sum_i w_i \chi_{\pi_i}$ und die Triangulierung \mathcal{T}_h uniform. Gilt für die Matrixkoeffizienten $a_{ij} := a(\chi_{\pi_j}, \chi_{\pi_i})$ und $a_{ij}^h := a_h(\chi_{\pi_j}, \chi_{\pi_i})$*

$$|a_{ij} - a_{ij}^h| \leq C h^6, \quad (3.1)$$

so konvergiert die volldiskrete Lösung (2.27) mit der optimalen Konvergenzrate (2.24) gegen die exakte Lösung.

Beweis Einsetzen von (3.1) ergibt

$$\begin{aligned} |E_{\pi_i \times \pi_j}[\varphi \Phi \psi]| &= |a(v_j \chi_{\pi_j}, w_i \chi_{\pi_i}) - a_h(v_j \chi_{\pi_j}, w_i \chi_{\pi_i})| \\ &= |v_j w_i| |a_{i,j} - a_{i,j}^h| \\ &\leq C |v_j w_i| h^6 \\ &\leq C |v_j w_i| h^4 \|\chi_{\pi_j}\|_{\Gamma,0} \|\chi_{\pi_i}\|_{\Gamma,0} \\ &\leq C |v_j w_i| h^{3,5} \|\chi_{\pi_j}\|_{\Gamma,0} \|\chi_{\pi_i}\|_{\Gamma,-1/2} \quad \text{wegen (2.25)} \\ &= C h^{3,5} \|\varphi\|_{\pi_j,0} \|\psi\|_{\pi_i,-1/2}. \end{aligned}$$

Somit ist (2.33) erfüllt. \square

Welche Konsequenzen hat diese Forderung für den Kubaturgrad der speziellen Kubaturformel? Muß dieser für $h \rightarrow 0$ erhöht werden? Wir werden sehen, daß der Kubaturgrad entscheidend von der Lage der Singularität abhängt. Dazu setzen wir

$$P_k(\pi) := \{f : \pi \rightarrow \mathbb{K} : f \circ \tau \text{ Polynom vom Grad } k\}.$$

Satz 3.2 *Es sei $Q_{\pi_x \times \pi_y}$ eine abstrakte Kubaturformel über $\pi_x \times \pi_y$ mit Exaktheitsgrad k , das heißt Polynome vom Grad $\leq k$ werden exakt integriert. $f : \pi_x \times \pi_y \rightarrow \mathbb{K}$ sei $k+1$ -mal stetig differenzierbar und $\Gamma \cap \pi_x$ und $\Gamma \cap \pi_y$ hinreichend glatt. Dann gilt mit $|\alpha| = k+1$*

$$\left| \int_{\pi_x \times \pi_y} f(x, y) ds(y) ds(x) - Q_{\pi_x \times \pi_y} f \right| \leq C h^{k+1} |\pi_x| |\pi_y| \|D^\alpha f\|_{\infty, \pi_x \times \pi_y}.$$

Beweis Mit Taylorscher Formel. Siehe dazu auch [22]. \square

Wir sehen, daß der Abstand $\delta := \text{dist}(\pi_x, \pi_y)$ eine entscheidende Rolle bei der Frage nach dem Kubaturgrad spielt. Ist dieser nämlich nach unten beschränkt, $\delta \geq c > 0$, so sind die Ableitungen des singulären Anteils des Kerns, $1/\|x-y\|_2$, gleichmäßig beschränkt und es reicht ein konstanter Exaktheitsgrad, um die Bedingung (3.1) zu erfüllen. Rücken dagegen für $h \rightarrow 0$ die Dreiecke näher zusammen, so muß der Kubaturgrad erhöht werden, wie folgendes einfaches Beispiel illustriert.

Wir betrachten $f(x) = |x|^{-1/2}$ auf der Intervallfamilie $I_h := [h, 2h]$. Die Substitution

$$\int_h^{2h} x^{-1/2} dx = \sqrt{h} \int_1^2 x^{-1/2} dx$$

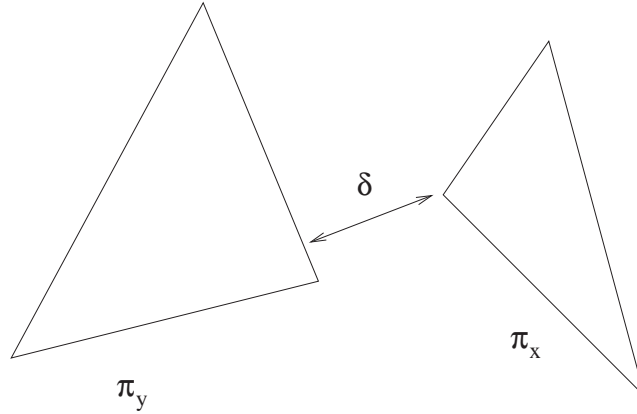


Abbildung 3.1: Zwei Dreiecke im Nahfeld

verdeutlicht, daß die verschiedenen h -abhängigen Integranden – abgesehen von dem Faktor \sqrt{h} – aus einem identischen Term bestehen. Damit kann kein Kubaturverfahren mit konstantem Exaktheitsgrad der Forderung (3.1) genügen, denn die Singularität des Integranden neutralisiert die schrumpfende Intervalllänge.

Satz 3.3 $E_{\pi_x \times \pi_y}^{(\gamma_x, \gamma_y)}$ sei das Produkt aus zwei abstrakten Kubaturformeln mit den Exaktheitsgraden γ_x und γ_y auf den Dreiecken $\pi_x, \pi_y \in \mathcal{T}_h$. Außerdem gelte $\Phi(x, y) \leq C|x - y|^{-d}$. Falls $\gamma_y \geq \eta$ und $\gamma_x = \gamma_y + \eta$, dann gilt mit $\delta > 0$ für alle $p \in P_\eta(\pi_x), q \in P_\eta(\pi_y)$:

$$\left| E_{\pi_x \times \pi_y}^{(\gamma_x, \gamma_y)}(q \Phi p) \right| \leq Ch^2 \delta^{-d} \left(\frac{h}{\delta} \right)^{\gamma_y + 1} \|p\|_{\pi_x, 0} \|q\|_{\pi_y, \eta}. \quad (3.2)$$

Beweis Siehe [24, Theorem 4].

Dieser Satz bestätigt unser einfaches Beispiel: Falls $\delta \geq c > 0$ gilt, erreicht man mit hinreichend großen, aber fixen Graden γ_x und γ_y jede algebraische Konvergenzordnung. Setzt man dagegen $\delta = ah$ mit $a > 1$ in die obige Abschätzung ein, dann wird die erforderliche Rate (2.33) offensichtlich mit keinem konstanten Kubaturgrad erreicht.

Ein Vergleich von (3.2) mit (2.33) ergibt

Satz 3.4 Es sei $d = 1$, η , δ und h wie oben. Dann sichern in Abhängigkeit von h und δ die Kubaturgrade

$$\gamma_y = \left\lceil \eta + 1 + (\eta + 3) \frac{\log \delta}{\log \frac{h}{\delta}} \right\rceil \quad \text{und} \quad \gamma_x = \gamma_y + \eta \quad (3.3)$$

die Konvergenzrate (2.24). $\lceil x \rceil$ bezeichnet dabei die kleinste ganze Zahl größer oder gleich x .

Beweis [24, Theorem 11].

Es ergibt sich also in natürlicher Weise die Unterscheidung zwischen Nah- und Fernfeld. Man könnte nun versuchen, die Begriffe *Nah-* und *Fernfeld* klar zu fassen, indem man Dreieck-Paare dem Fernfeld zuordnet, falls mit einem beschränkten Exaktheitsgrad einer bestimmten Kubaturregel die asymptotische Konsistenzbedingung (2.33) erfüllt wird. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit aber einem anderen Punkt widmen. Der Aufwand einer Randelements-Simulation wird nämlich zunächst von der Fernfeldassemblierung und der Matrix-Vektor-Multiplikation beim Lösen der Gleichungssysteme (jeweils $\mathcal{O}(N^2)$) bestimmt.

3.2 Schnelle Matrix-Vektor-Multiplikation

Das Ziel eines Kompressionsverfahrens besteht darin, die vollbesetzten Matrizen A_h mittels dünnbesetzter \tilde{A}_h zu approximieren und somit die quadratische Komplexität der Matrix-Vektor-Multiplikation zu durchbrechen. Dieser Approximationsprozeß hat erneut eine Störung der Galerkin-Lösung zur Folge. Es gibt verschiedene Verfahren, die zwischen dem Kompressionsfehler und der Effizienzsteigerung sorgfältig abwägen. Oberstes Gebot ist dabei einmal mehr die Erhaltung der Galerkin-Konvergenzrate.

Die Multiskalen-Matrixkompression bedient sich einer geschickten Wavelet-Basiswahl zur Darstellung der Galerkin-Lösung, bezüglich der die Matrix A_h numerisch dünnbesetzt ist; d. h. man kann ohne großen Genauigkeitsverlust viele Koeffizienten von A_h durch Null ersetzen. Das hat den Vorteil, daß im Rahmen der Matrix-Vektor-Multiplikation die Operationen bezüglich dieser Einträge entfallen. Desweiteren kann man auf deren Berechnung verzichten, vorausgesetzt man kennt ein Kriterium zur Identifikation (siehe z. B. [26]).

Bezüglich der Geometrie robuster ist das Panel-Clustering-Verfahren, welchem auch komplizierte Randmannigfaltigkeiten, auf denen keine hierarchisch strukturierten Funktionenräume existieren, zugänglich ist. Es bedarf lediglich einer hierarchischen Strukturierung der Oberflächentriangulierung, welche aber keine Glattheitsanforderungen an Γ stellt und zu einer additiven Zerlegung von A_h in eine Nah- und eine Fernfeldmatrix führt. Die Glattheit des Kerns im Fernfeld erlaubt dann eine approximative, lokale Trennung der Variablen und diese wiederum eine Faktorisierung der Fernfeldmatrix in zwei dünnbesiedelte, nicht quadratische Faktoren. Die Trennung der Variablen erfolgt in [22] zum Beispiel mittels Entwicklung des Kerns in Taylorpolynome. Die Anwendung von Kugelflächenfunktionen in [14] steigert nochmals die Effizienz. Dieses Verfahren wurde ursprünglich für das Kollokationsverfahren von Hackbusch und Nowak in [17] eingeführt und später von Sauter auf das Galerkinverfahren verallgemeinert (siehe [22]).

Beiden Methoden gemeinsam ist die explizite Erzeugung der Nahfeldmatrix. Wir orientieren uns in dieser Arbeit an dem Panel-Clustering-Algorithmus, ohne die Matrixkompression wirklich durchzuführen. Vielmehr werden wir unsere Methoden im Nahfeld, wie es beispielsweise in [14] erklärt wird, testen. Für eine ausführliche Darstellung der Kernentwicklung zur Trennung der Variablen sei auf die angegebene Literatur verwiesen. Wir

wollen also nur kurz die Oberflächenstrukturierung darstellen und damit Fern- und Nahfeld einführen.

Definition 3.1 (Cluster-Baum) *Ein Cluster τ ist eine nichtleere Vereinigung von Dreiecken $\pi \in \mathcal{T}_h$. Jedes Cluster besitze ein Zentrum z_τ und einen Radius ρ_τ , so daß $B_{\rho_\tau} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - z_\tau| \leq \rho_\tau\}$ die kleinste τ enthaltende Kugel ist. Eine Menge von Clustern bildet einen Clusterbaum \mathcal{C}_h , falls sie die Bedingungen*

1. $\Gamma \in \mathcal{C}_h$ und $\mathcal{T}_h \subset \mathcal{C}_h$,
2. $\tau_1 \neq \tau_2 \in \mathcal{C}_h \Rightarrow \tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset \vee \tau_1 \subset \tau_2 \vee \tau_2 \subset \tau_1$ und
3. ein Cluster τ_1 ist ein Sohn von Cluster τ_2 , falls für $\tau' \neq \tau_2$ gilt:
 $\tau_1 \subset \tau' \subset \tau_2 \Rightarrow \tau' = \tau_1$. Cluster τ_2 ist dann der Vater von τ_1

erfüllt. Ein Cluster τ heißt η -zulässig zu $\pi \in \mathcal{T}_h$ ($\eta \in (0, 1)$), falls $\rho_\tau \leq \eta \text{ dist}(\pi, z_\tau)$ gilt.

Definition 3.2 (Nah- und Fernfeld) *Es sei $\eta \in (0, 1)$. Das Fernfeld von $\pi_x \in \mathcal{T}_h$ besteht aus den Clustern*

$$\mathcal{F}_h(\pi_x) = \{\tau \in \mathcal{C}_h \setminus \mathcal{T}_h : \tau \text{ ist } \eta\text{-zulässig zu } \pi \text{ und alle Vorfahren von } \tau \text{ nicht}\},$$

wogegen das Nahfeld aus den Dreiecken

$$\mathcal{N}_h(\pi_x) = \{\pi_y \in \mathcal{T}_h : \text{alle Vorfahren von } \pi \text{ sind nicht } \eta\text{-zulässig zu } \pi \}$$

besteht. Es gilt $\Gamma = \mathcal{N}_h(\pi) \cup \mathcal{F}_h(\pi)$ für alle $\pi \in \mathcal{T}_h$.

Satz 3.5 *Es sei \mathcal{T}_h eine uniforme Triangulierung der Oberfläche Γ , \mathcal{C}_h der Cluster-Baum aus Definition 3.1 und $0 < \eta < 1$. Dann gilt:*

$$|\mathcal{N}_h(\pi)| \leq C_\Gamma \frac{1}{\eta^2} \tag{3.4}$$

$$|\mathcal{F}_h(\pi)| \leq C_\Gamma \frac{1}{\eta^2} \log(N). \tag{3.5}$$

Beweis Siehe [17].

Bemerkung

- Im Fernfeld können nicht alle Matrixeinträge mit konstanter Stützstellenanzahl berechnet werden. Es handelt sich hier jedoch nach der Matrixfaktorisierung nur noch um zweidimensionale Integrale (siehe [14]).
- Bei großen Problemen spielt die Restriktion des Speicherplatzes eine wichtige Rolle. Matrixkompression wirkt sich hier in gleichem Maße günstig aus wie bezüglich der Effizienzsteigerung bei der Matrix-Vektor-Multiplikation. In der Praxis erweist es sich als sinnvoll, die Einträge der beiden Fernfeldmatrizen nicht abzuspeichern, sondern bei jedem Zugriff neu zu berechnen, um weiteren Speicherplatz zu sparen.

Die Anzahl der zu berechnenden Nahfeldmatrixeinträge ist laut Satz 3.5 durch $\mathcal{O}(N)$ begrenzt. Das singuläre Verhalten des Kerns treibt den notwendigen Kubaturgrad der vierdimensionalen Integration aber in solchem Maße in die Höhe, daß die Nahfeldkubatur den Flaschenhals der Randelementmethode darstellt.

Kapitel 4

Nahfeldkubatur

4.1 Die Duffy-Transformation

In Satz 3.3 blieb die spezielle Form der Kubaturformeln unbestimmt und lediglich der Exaktheitsgrad ging in die Fehlerabschätzung ein. Das führte zu einer Abschätzung, die nur für $\delta > h$ Konvergenz sichert. Vollkommen ausgeklammert war zudem der Fall, daß die Dreieck-Paare nicht disjunkt, die zu integrierende Funktion also singulär ist. Einen Ausweg bildet die *Duffy-Transformation* [10]. Bei den fast singulären Integralen erlaubt sie im Rahmen eines Tensorproduktansatzes die Anwendung von Gaußquadraturformeln, die, eine uniforme Triangulierung vorausgesetzt, auch für $\delta < h$ exponentiell konvergieren; im Fall der singulären Integrale regularisiert sie den Integranden und macht erst dadurch die Anwendung klassischer Quadraturformeln möglich.

Im ersten Unterabschnitt orientieren wir uns an Kubaturfehlerabschätzungen aus der Arbeit von von Petersdorff und Schwab [29] und führen für polygonal berandete Gebiete eine sorgfältige Fehleranalyse durch. Die vierdimensionalen regularisierenden Transformationen im darauf folgenden Unterabschnitt entstammen der Arbeit von Sauter [23], der ähnliche erstmals in seiner Dissertation [22] angegeben hat.

4.1.1 Fast singuläre Integrale

Die herkömmliche eindimensionale Interpolationsquadratur mit n festen Stützstellen erreicht gemäß der n Freiheitsgrade, gegeben durch die n Gewichte, einen Exaktheitsgrad von $n - 1$. Die Gauß-Quadratur (siehe [9, 2.7]) verzichtet auf die Festlegung der Stützstellen apriori und bestimmt die Gewichte *und* die Stützstellen so, daß Polynome bis zum Grad $2n - 1$ exakt integriert werden. Die Nullstellen der Legendre-Polynome bilden dabei bekanntlich die Stützstellen der Gauß-Legendre-Formeln, der Formeln, die bezüglich des *Lebesgue*-Maßes Polynome exakt integrieren. Grundsätzlich lassen sich zu allgemeinen Massen Gauß-Formeln entwickeln, was stets auf die Untersuchung orthonormaler Polynome, zu denen die Legendre-Polynome zählen, hinausläuft. Gerade diese Tatsache verhindert eine Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall, denn eine abgeschlossene Theorie zu mehrdimensionalen orthonormalen Polynomen beschränkt sich auf Spezialfälle. Handelt

es sich beim Integrationsgebiet jedoch um einen achsenparallelen Quader, so wird über einen Tensorproduktansatz die Anwendung der Gaußformeln auch im Mehrdimensionalen möglich. Zunächst aber zu einer ableitungsfreien Abschätzung des eindimensionalen Fehlers.

Satz 4.1 *f sei im Intervall $I = [-1, 1]$ reell-analytisch und in die abgeschlossene Ellipse $\mathcal{E}_{-1,1}^\rho \subset \mathbb{C}$ mit Foci 1 und -1 und Halbachsensumme ρ analytisch fortsetzbar. Dann gilt für den Fehler E^n der n -Punkt Gauß-Legendre-Formel G^n*

$$|E^n| := \left| \int_{-1}^1 f(x) dx - G^n f \right| \leq C \rho^{-2n} \max_{z \in \partial \mathcal{E}_{-1,1}^\rho} |f(z)|. \quad (4.1)$$

Beweis Siehe [9, 4.6.1.11].

Die eindimensionalen Gaußformeln sind vermöge folgender Vorschrift auf Funktionen beliebig hoher Dimension anwendbar.

Definition 4.1 (Tensorprodukt) *Es seien*

$$Q_i g := \sum_{j=1}^{n_i} \omega_j^{(i)} g(x_j^{(i)}) \quad (i = 1, 2)$$

Kubaturformeln über Ω_i und $f \in \mathcal{C}^0(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Dann wird durch

$$Qf = Q_1 Q_2 f := \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \omega_j^{(1)} \omega_k^{(2)} f(x_j^{(1)}, x_k^{(2)})$$

eine $n_1 \cdot n_2$ -Punkt-Formel, das Tensorprodukt von Q_1 und Q_2 , über $\Omega_1 \times \Omega_2$ erklärt.

Die Aufspaltung des Produktfehlers

$$(I - Q)f = I_1 [(I_2 - Q_2) f] + Q_2 [(I_1 - Q_1) f] \quad (4.2)$$

mit $I f := I_1 I_2 f := \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$

führt diesen auf den der einzelnen Faktoren zurück (siehe [29, 4.2]). An unsere Bedürfnisse angepaßt bedeutet dies konkret ...

Satz 4.2 *Es sei $u \in [-1, 1]^4$ und $\hat{u}_i := (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_4) \in [-1, 1]^3$. Die Funktion $f : [-1, 1]^4 \rightarrow \mathbb{K}$ erlaube für $i \in I = \{1, 2, 3, 4\}$ und alle $\hat{u}_i \in [-1, 1]^3$ eine analytische Fortsetzung nach $\mathcal{E}_{-1,1}^{\rho_i} \subset \mathbb{C}$ als Funktion von u_i . Definiere für alle $i \in I$*

$$M_i := \max_{\hat{u}_i \in [-1, 1]^3} \max_{u_i \in \mathcal{E}^{\rho_i}} |f(u)|. \quad (4.3)$$

Dann gilt für alle $i \in I$ und $n_i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \left(I - G_{u_1}^{n_1} G_{u_2}^{n_2} G_{u_3}^{n_3} G_{u_4}^{n_4} \right) f \right| &\leq C \sum_{i=1}^4 \max_{\hat{u}_i \in [-1,1]^3} (I_i - G_{u_i}^{n_i}) f(u) \\ &\leq C \sum_{i=1}^4 \rho_i^{-2n_i} M_i. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Beweis Der Satz ist nur geringfügig allgemeiner als Proposition 4.3 in [29], wo $\rho_1 = \rho_2$ und $\rho_3 = \rho_4$ gefordert wird. Letztendlich wird mit der Aufspaltung (4.2) Satz 4.1 angewendet.

Bemerkung Vorerst soll die Einschränkung $\rho_1 = \rho_2$ und $\rho_3 = \rho_4$ aus [29] erhalten bleiben. Später wollen wir dann untersuchen, ob mit einer Verallgemeinerung des Tensorproduktansatzes die Effizienz gesteigert werden kann.

Die Duffy-Transformation

$$\tilde{D} : \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\xi + 1)/2 \\ ((\xi + 1)/2)((\eta + 1)/2) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

bildet $[-1, 1]^2$ auf das Element $\Delta_{ref} = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \tilde{x}_2 \leq \tilde{x}_1 \leq 1\}$ ab und ermöglicht so die Anwendung der Produktquadratur auf Dreiecke:

$$\begin{aligned} \int_{\pi} f(x) ds(x) &= \int_{\Delta_{ref}} f(\tau(\tilde{x})) \sqrt{g_{\tau}} d\tilde{x} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\tau \circ \tilde{D}(\xi, \eta)) (\xi + 1)/4 \sqrt{g_{\tau}} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.2 konvergiert das Gauß-Tensorprodukt exponentiell in $n := \min_i \{n_i\}$, falls der Integrand koordinatenweise analytisch ins Komplexe fortsetzbar ist. In [29] werden die Halbachsensummen insofern bestimmt, daß es eine vom Kern und Γ abhängige Konstante γ gibt, so daß

$$\rho_i = 1 + \gamma \frac{\delta}{h}. \quad (4.6)$$

gilt. Im folgenden soll für polygonale Oberflächen die Konstante γ in einer Fehleranalyse explizit bestimmt werden. Danach können wir dann hinreichende Kubaturgrade angeben.

Lemma 4.1 *Der Kern $k(x, y)$ habe eine $\|x - y\|_2^{-d}$ -charakteristische Singularität. Die beiden ebenen Dreiecke π_x und π_y mit positivem Abstand $\delta > 0$ mögen die Durchmesser h_x und h_y haben. Dann ist unabhängig von $\hat{u}_i \in [-1, 1]^3$*

$$\tilde{f}(u) := k(\tau_x \circ \tilde{D}(u_1, u_2), \tau_y \circ \tilde{D}(u_3, u_4)) : [-1, 1]^4 \rightarrow \mathbb{K}$$

bezüglich u_i in die Ellipse $\mathcal{E}_{-1,1}^{\rho_i} \subset \mathbb{C}$ analytisch fortsetzbar. Es ist ρ_i aus (4.6) mit

$$\gamma < \gamma^* := 2 \quad (4.7)$$

und $h = h_x$, falls $i = 1, 2$, und $h = h_y$ sonst.

Beweis Ohne Einschränkung sei $i = 1$. Für festes $\hat{u}_1 = (u_2, u_3, u_4)$ sei $h_{u_2} \leq h_x$ die Länge der Strecke $s_{u_2} := \{x = \tau_x \circ \tilde{D}(u_1, u_2) : u_1 \in [-1, 1]\} \subset \pi_x$. Desweiteren mögen die Dreiecke so im Raum liegen, daß $s_{u_2} = \{(x_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : -h_{u_2}/2 \leq x_1 \leq h_{u_2}/2\}$ gilt. Das Linienintegral in (4.4) bezüglich \tilde{f} lautet dann

$$\begin{aligned} I_i \tilde{f}(u) &= \int_{-1}^1 k(\tau_x \circ \tilde{D}(u_1, u_2), \tau_y \circ \tilde{D}(u_3, u_4)) du_1 \\ &= \int_{-1}^1 k((h_{u_2}/2 \cdot z_1, 0, 0), y) dz_1. \end{aligned}$$

Die analytische Fortsetzbarkeit des Integranden wird ausschließlich durch den Term

$$G(z_1) = \sqrt{(h_{u_2}/2 \cdot z_1 - y_1)^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

bestimmt. Wählt man den Hauptzweig der Wurzelfunktion [11, 5.2], so ist $G(z_1)$ und somit $k(z_1, 0, 0)$ holomorph in der von den zwei Halbgeraden

$$\begin{aligned} g_{1,2} &:= \{z_1 \in \mathbb{C} : (h_{u_2}/2 \cdot z_1 - y_1)^2 + y_2^2 + y_3^2 = -c, 0 \leq c \in \mathbb{R}, \pm \Im z_1 \geq 0\} \\ &= \left\{ z_1 \in \mathbb{C} : z_1 = \frac{2}{h_{u_2}} \left(y_1 \pm i \sqrt{c + y_2^2 + y_3^2} \right), c \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

»aufgeschnittenen« komplexen Ebene $\mathbb{C} \setminus (g_1 \cup g_2)$. Diese beiden Halbgeraden werden durch die Punkte

$$Y_{1,2} = \frac{2}{h_{u_2}} \left(y_1 \pm i \sqrt{y_2^2 + y_3^2} \right) \in \mathbb{C} \quad (4.8)$$

beschränkt. Es gilt

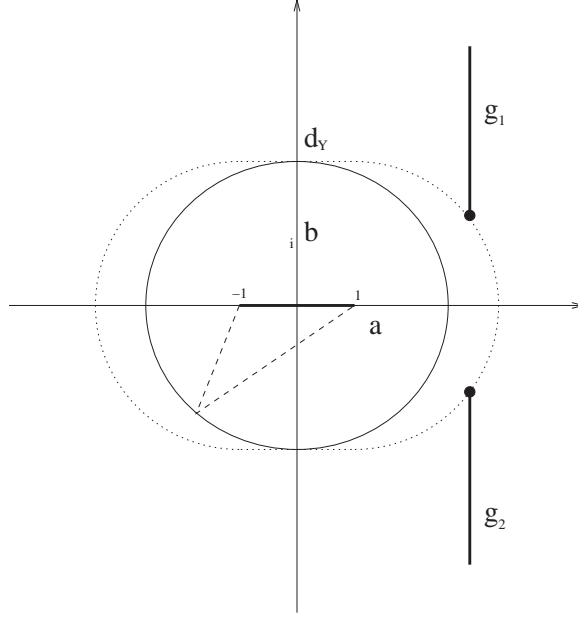
$$\begin{aligned} d_Y &:= \text{dist}_{\mathbb{C}}(Y_{1,2}, [-1, 1]) \\ &= \frac{2}{h_{u_2}} \text{dist}_{\mathbb{R}^3}(y, s_{u_2}) \geq \frac{2}{h_{u_2}} \delta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Schließlich sieht man, daß zu vorgegebenem d_Y gerade die $Y_{1,2}$ mit verschwindendem Realteil die Größe der gesuchten Ellipse am stärksten einschränken (siehe Abbildung 4.1). Für die Neben- und Hauptachse der Ellipse mit den Foci -1 und 1, die in $Y_1 = i d_Y$ und $Y_2 = -i d_Y$ zwei Scheitelpunkte hat, gilt $b = d_Y$ und $a = \sqrt{d_Y^2 + 1}$ und somit $\rho_1 = d_Y + \sqrt{d_Y^2 + 1}$. Wegen (4.9) und $h_{u_2} \leq h_x$ folgt

$$\begin{aligned} \rho_1 &\geq 2 \frac{\delta}{h_x} + \sqrt{1 + \left(2 \frac{\delta}{h_x} \right)^2} \\ &\geq 2 \frac{\delta}{h_x} + 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von \hat{u}_1 und gilt damit gleichmäßig bezüglich \hat{u}_1 . \square

Die Ansatzfunktionen und die Gramschen Determinanten haben zwar keinen Einfluß auf die Größe der Ellipsen, dafür aber auf das Verhalten des Integranden auf selbigen.

Abbildung 4.1: Analytische Fortsetzung in eine Ellipse nach \mathbb{C}

Lemma 4.2 *Es seien $|k(x, y)| \leq C \|x - y\|_2^{-d}$, $\tilde{f}(u)$, δ , ρ_i mit $\gamma < \gamma^*$ wie in Lemma 4.1 und $\eta = 0, 1$ der Grad der Ansatzfunktionen. Dann gilt für M_i aus (4.3)*

$$M_i \leq \begin{cases} C \delta^{-d} \rho_i^{\eta+1} h_x^2 h_y^2 & , \text{ falls } i = 1, 3 \\ C \delta^{-d} \rho_i^\eta h_x^2 h_y^2 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } f(u) := \tilde{f}(u) (\varphi_i \circ \tau_x \circ \tilde{D}(u_1, u_2)) (\varphi_j \circ \tau_y \circ \tilde{D}(u_3, u_4)) \\ \times \sqrt{g_{\pi_x}} \sqrt{g_{\pi_y}} (u_1 + 1)(u_3 + 1)/8.$$

Hierbei sind die φ_i die Basiselemente aus $S_{h,\eta}$.

Beweis Die Abschätzungen

$$\max_{\hat{u}_i} \max_{u_i \in \mathcal{E}^{\rho_i}} |(\varphi_i \circ \tau_x \circ \tilde{D}(u_1, u_2))| \leq C \rho_i^\eta \quad (i = 1, 2), \\ \max_{u_1 \in \mathcal{E}^{\rho_1}} |(u_1 + 1)| \leq \rho_1 \quad \text{und} \quad \sqrt{g_{\pi_x}} \leq C h_x^2$$

sind klar. Nicht trivial hingegen ist

$$\max_{\hat{u}_i \in [-1, 1]^3} \max_{u_i \in \mathcal{E}^{\rho_i}} \tilde{f}(u) \leq C \delta^{-d}. \quad (4.11)$$

Es sei o. E. $s_{u_2} = \{(x_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : -h_x/2 \leq x_1 \leq h_x/2\}$. Auf der Ellipse $\mathcal{E}_{-h_x/2, h_x/2}^{\tilde{\rho}_1}$ mit Halbachsensumme

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{h_x}{2} \rho_1 = \frac{h_x}{2} \left(\gamma \frac{\delta}{h_x} + 1 \right) = \frac{\gamma}{2} \delta + \frac{h_x}{2}$$

wird der Kern in (4.11) letztendlich ausgewertet und für die nichtskalierten Singularitäten gilt

$$\tilde{Y}_{1,2} = \frac{h_x}{2} Y_{1,2} = y_1 \pm i\sqrt{y_2^2 + y_3^2} \in \mathbb{C}.$$

Wegen $\tilde{\rho}_1 \leq \frac{\gamma}{\gamma^*} \delta + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\gamma^*} \delta\right)^2 + \left(\frac{h_x}{2}\right)^2}$ folgt für die Nebenachse \tilde{b} von $\mathcal{E}_{-h_x/2, h_x/2}^{\tilde{\rho}_1}$

$$\tilde{b} \leq \frac{\gamma}{\gamma^*} \delta$$

und damit

$$\text{dist}_{\mathbb{C}} \left(\tilde{Y}_{1,2}, \mathcal{E}_{-h_x/2, h_x/2}^{\tilde{\rho}_1} \right) \geq \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma^*} \right) \delta. \quad (4.12)$$

Die Voraussetzung $|k(x, y)| \leq C|x - y|^{-d}$ sichert dann

$$\begin{aligned} \max_{\hat{u}_i \in [-1, 1]^3} \max_{u_i \in \mathcal{E}^{\rho_i}} \tilde{f}(u) &\leq C \left(\text{dist}_{\mathbb{C}} \left(\tilde{Y}_{1,2}, \mathcal{E}_{-h_x/2, h_x/2}^{\tilde{\rho}_1} \right) \right)^{-d} \\ &\leq C\delta^{-d} \quad \text{wegen (4.12)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Zusammenfassend erhalten wir

Satz 4.3 *Unter den Voraussetzungen der Lemmata 4.1 und 4.2 gilt*

$$\left| \left(I - G_{u_1}^{n_1} G_{u_2}^{n_2} G_{u_3}^{n_3} G_{u_4}^{n_4} \right) f \right| \leq C h_x^2 h_y^2 \delta^{-d} \sum_{i=1}^4 \left(1 + \gamma \frac{\delta}{h_{(x,y)}} \right)^{-2n_i + \langle \eta \rangle}. \quad (4.13)$$

Dabei gilt $h_{(x,y)} := h_x$, falls $i = 1, 2$, und $h_{(x,y)} := h_y$ sonst; $\langle \eta \rangle := \eta + 1$, falls $i = 1, 3$, und $\langle \eta \rangle := \eta$ sonst.

Beweis Lemma 4.1, Lemma 4.2 und Satz 4.2.

Korollar 4.1 *Das Gaußsche Tensorprodukt konvergiert bei uniformer Triangulierung \mathcal{T}_h exponentiell. Es sei $\eta = 0$. Gilt für die Grade*

$$n_i \geq r_i + \frac{-\log(\delta^d) + 2|\log h|}{2 \log \rho_i}, \quad (4.14)$$

dann konvergiert die gestörte Galerkinlösung φ_h mit der Konvergenzrate (2.24) gegen die exakte Lösung φ . Hier gilt $r_i = \frac{1}{2}$, falls $i = 1, 3$ und $r_i = 0$ sonst.

Beweis Einsetzen von (4.14) in (4.13) ergibt (3.1). □

	Identische Dreiecke	Gemeinsame Kante	Gemeinsame Ecke	Fast sing. Nahfeld
#	$\pi_x = \pi_y$ N	$\pi_x \cap \pi_y = \text{Kante}$ $3N$	$\pi_x \cap \pi_y = \text{Ecke}$ $\approx 9N$	$\delta > 0$, aber klein $\gg 9N$

Tabelle 4.1: Anzahl der Paare in den Kategorien

4.1.2 Singuläre Integrale

Haben die beiden Dreiecke π_x und π_y einer zulässigen Triangulierung (Def. 2.3) keinen positiven Abstand δ , so ist eine weitere Fallunterscheidung notwendig. Insgesamt unterscheiden wir bei der Nahfeldkubatur zwischen vier verschiedenen Kategorien (siehe Tabelle 4.1). Der Integrand ist in den ersten drei Fällen unbeschränkt und weist eine Singularität *im* Integrationsgebiet auf. Die entsprechenden Referenzdreiecke

1. $\Delta_x^h = \Delta_y^h = \Delta_{ref}^h := \{\hat{y} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \hat{y}_2 \leq \hat{y}_1 \leq h\}$,
2. $\Delta_x^h := \Delta_{ref}^h$, $\Delta_y^h = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^2 : (\hat{y}_1, -\hat{y}_2)^T \in \Delta_{ref}^h\}$ und
3. $\Delta_x^h := \Delta_{ref}^h$, $\Delta_y^h = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^2 : -\hat{y} \in \Delta_{ref}^h\}$

spiegeln die gegenseitige Lage der Originaldreiecke π_x und π_y zueinander wider. Über diese Referenzelemente werden die originalen Dreiecke schließlich parametrisiert:

$$\begin{aligned}\tau_x &: \Delta_x^h \rightarrow \pi_x, \\ \tau_y &: \Delta_y^h \rightarrow \pi_y.\end{aligned}$$

Damit wird nach einer Unterteilung von $\Delta_x^h \times \Delta_y^h$ in sechs (Identische Dreiecke, Gemeinsame Kante) bzw. zwei (Gemeinsame Ecke) Teilgebiete D_i die Regularisierung des singulären Integranden mittels vierdimensionaler Varianten der Duffy-Transformation (4.5) möglich. Für eine genaue Darstellung der Teilgebiete und der Transformationen verweisen wir auf Sauter [23]. Wir wollen uns in diesem Unterabschnitt auf schwach singuläre Kerne beschränken. Die Darstellung bezüglich Cauchy- und hypersingulärer Kerne findet sich ebenfalls bei Sauter.

Identische Dreiecke

Das zu bestimmende Integral lautet

$$If = \int_0^h \int_0^{\hat{x}_1} \int_0^h \int_0^{\hat{y}_1} \Phi^{loc}(\hat{x}, \hat{y}) \varphi_j^{loc}(\hat{y}) \varphi_i^{loc}(\hat{x}) g_\pi(\hat{x}) g_\pi(\hat{y}) d\hat{y} d\hat{x},$$

wenn man $\Phi^{loc}(\hat{x}, \hat{y}) := \Phi(\tau(\hat{x}), \tau(\hat{y}))$ und $\varphi_j^{loc} := \varphi_j \circ \tau$ setzt. Nach Einführung der Relativkoordinaten $z = \hat{y} - \hat{x}$, die die Singularität fixieren, gilt

$$If = \sum_{i=1}^6 \int_{D_i} \Phi^{loc}(\hat{x}, z + \hat{x}) \varphi_j^{loc}(z + \hat{x}) \varphi_i^{loc}(\hat{x}) g_\pi(\hat{x}) g_\pi(z + \hat{x}) d\hat{x} dz.$$

Die Koordinatentransformationen $(\hat{x}^{(i)}, z^{(i)})$ bilden jetzt $(\eta, w_1, w_2, w_3) \in R_1 \times T_3^h$ auf D_i ab. Hier steht T_d^h für den d -dimensionalen Simplex $\{\hat{x} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\hat{x}|_{l^1} < h\}$ und R_d für den Würfel $[0, 1]^d$. Setzt man

$$H_{loc}(\hat{x}, \hat{y}) := \varphi_i^{loc}(\hat{x}) \varphi_j^{loc}(\hat{y}) g_\pi(\hat{x}) g_\pi(\hat{y})$$

so ist schließlich

$$If = \int_{R_1} \int_{T_3^h} \omega_1 \sum_{i=1}^6 \Phi^{loc}(\hat{x}^{(i)}, \hat{x}^{(i)} + z^{(i)}) H^{loc}(\hat{x}^{(i)}, z^{(i)} + \hat{x}^{(i)}) d\omega d\eta. \quad (4.15)$$

Lemma 4.3 Q_ω und Q_η seien Kubaturformeln über T_3^h und R_1 . Dann gilt

$$(I - Q_\omega Q_\eta) f \leq \max_{\eta \in R_1} (I_\omega - Q_\omega) f(\eta, \omega) + \max_{\omega \in T_3^h} (I_\eta - Q_\eta) f(\eta, \omega). \quad (4.16)$$

Beweis Mit (4.2) wie in [29, 4.2]. □

Satz 4.4 Es sei f wie in (4.15) und der Rand Γ sei bi-Lipschitz-stetig (siehe [23]) und stückweise analytisch. Dann ist

$$f((\tilde{\eta} + 1)/2, \omega)$$

für alle $\tilde{\eta} \in [-1, 1]$ analytisch in $\omega \in T_3^h$ und für alle $\omega \in T_3^h$ bezüglich $\tilde{\eta}$ in eine Ellipse $\mathcal{E}_{-1,1}^\rho$ mit Halbachsensumme $\rho > 1$ analytisch fortsetzbar.

Beweis Siehe [25].

Für die hinreichenden Kubaturgrade ergibt sich dann

Korollar 4.2 Es sei $Q_\eta := G_\eta^n$ die n -Punkt Gauß-Legende-Formel über $[-1, 1]$ und Q_ω eine abstrakte Kubaturformel über T_3^h mit Exaktheitsgrad γ_ω . Unter der Voraussetzung

$$\gamma_\omega = 2 \quad \text{und} \quad n \geq \frac{3 |\log h|}{2 \log \rho} \quad (4.17)$$

ist die Bedingung (3.1) in Bezug auf Kubatur über gleiche Dreiecke erfüllt.

Beweis Wir wenden Lemma 4.3 an. Daß der erste Summand von (4.16) die Bedingung erfüllt zeigt man mit Taylor. Es gilt $|T_3^h| \leq h^3$ und der Exaktheitsgrad 2 liefert die restlichen drei h -Potenzen. Die Behauptung folgt für den zweiten Summanden in (4.16) aus Satz 4.1 und Satz 4.4 durch Einsetzen. □

Gemeinsame Kante

Nun sind Integrale der Form

$$If = \int_0^h \int_0^{\hat{x}_1} \int_0^h \int_0^{-\hat{y}_1} \Phi^{loc}(\hat{x}, \hat{y}) \varphi_j^{loc}(\hat{y}) \varphi_i^{loc}(\hat{x}) g_{\pi_x}(\hat{x}) g_{\pi_y}(\hat{y}) d\hat{y} d\hat{x}$$

zu berechnen, wobei $\Phi^{loc}(\hat{x}, \hat{y}) := \Phi(\tau_x(\hat{x}), \tau_y(\hat{y}))$ und $\varphi_i^{loc} := \varphi_i \circ \tau_x$ bzw. $\varphi_j^{loc} := \varphi_j \circ \tau_y$ gesetzt wurde. Anders als in der Kategorie »Identische Dreiecke« ist f hier genau dann singulär, wenn $z_1 := \hat{y}_1 - \hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{y}_2 = 0$ gilt. Mit $z_2 := \hat{y}_2$ und $z_3 := \hat{x}_2$ und

$$H_{loc}(\hat{x}, \hat{y}) := \varphi_i^{loc}(\hat{x}) \varphi_j^{loc}(\hat{y}) g_{\pi_x}(\hat{x}) g_{\pi_y}(\hat{y})$$

gilt

$$If = \sum_{i=1}^6 \int_{D_i} \Phi^{loc} \left(\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 + \hat{x}_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) H_{loc} \left(\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 + \hat{x}_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) d\hat{x}_1 dz.$$

Diese D_i weichen von obigen ab und werden neben den neuen Koordinatentransformationen $(\hat{x}_1^{(i)}, z^{(i)})$ wieder in [23] beschrieben. Letztere bilden jetzt $(\eta, \omega) \in R_2 \times T_2^h$ auf D_i ab. Mit

$$\tilde{f}(\eta, \omega) := \Phi^{loc} \left(\begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(i)} \\ z_3^{(i)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1^{(i)} + \hat{x}_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} \end{pmatrix} \right) H_{loc} \left(\begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(i)} \\ z_3^{(i)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1^{(i)} + \hat{x}_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{gilt dann } If = \sum_{i=1}^6 \int_{R_2} \int_{T_2^h} \eta_1 \omega_1^2 \tilde{f}(\eta, \omega) d\omega d\eta. \quad (4.18)$$

Lemma 4.4 *Es sei Q_ω eine abstrakte Kubaturformel über T_2^h und Q_η ein Tensorprodukt über R_2 mit eindimensionalen Gauß-Legendre-Faktoren. Dann gilt*

$$\begin{aligned} (I - Q_\omega Q_\eta) f &\leq \max_{\eta \in R_2} (I_\omega - Q_\omega) f(\eta, \omega) + \max_{\omega \in T_2^h} \max_{\eta_2 \in [0,1]} (I_{\eta_1} - Q_{\eta_1}) f(\eta, \omega) \\ &\quad + \max_{\omega \in T_2^h} \max_{\eta_1 \in [0,1]} (I_{\eta_2} - Q_{\eta_2}) f(\eta, \omega). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Beweis Mit (4.2) wie in [29, 4.2]. □

Satz 4.5 Γ erfülle die Bedingungen in Satz 4.4. Dann ist die Funktion

$$g(\tilde{\eta}, \omega) := \omega_1 \tilde{f}((\tilde{\eta} + 1)/2, \omega)$$

in (4.18) für alle $\tilde{\eta} \in [-1, 1]^2$ analytisch in $\omega \in T_2^h$. Außerdem ist sie für alle $\omega \in T_2^h$ und $\tilde{\eta}_1 \in [-1, 1]$ bezüglich $\tilde{\eta}_2$ und für alle $\tilde{\eta}_2 \in [-1, 1]$ bezüglich $\tilde{\eta}_1$ in eine Ellipse $\mathcal{E}_{-1,1}^\rho$ mit Halbachsensumme $\rho > 1$ analytisch fortsetzbar.

Beweis Siehe [25].

Somit sind wieder Standardkubaturformeln anwendbar.

Korollar 4.3 *Es sei $Q_\eta := G_\eta^n G_\eta^n$ das $n \times n$ Gauß-Legendre-Tensorprodukt über $[-1, 1]^2$ und Q_ω eine abstrakte Kubaturformel über T_2^h mit Exaktheitsgrad γ_ω . Mit*

$$\gamma_\omega = 2 \quad \text{und} \quad n \geq \frac{3 |\log h|}{2 \log \rho} \quad (4.20)$$

ist die Bedingung (3.1) wieder erfüllt.

Beweis Folgt wieder wie 4.2. Einziger Unterschied ist, daß jetzt nur $|T_2^h| \leq h^2$ gilt. Eine zusätzliche h -Potenz steuert aber die Determinante der Transformation bei, da der Kern nur schwach singulär ist. \square

Gemeinsame Ecke

Der Integrand in

$$If = \int_0^h \int_0^{\hat{x}_1} \int_0^{-h} \int_0^{-\hat{y}_1} \Phi^{loc}(\hat{x}, \hat{y}) H_{loc}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{y} d\hat{x}$$

ist genau dann singulär, wenn $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{y}_1 = \hat{y}_2 = 0$ gilt. Damit ist die Einführung von Relativkoordinaten überflüssig. Das Integrationsgebiet muß im Fall der gemeinsamen Ecke lediglich in zwei Teilgebiete zerlegt werden, um den Integranden zu regularisieren [23],

$$If = \sum_{i=1}^2 \int_{D_i} \Phi^{loc}(\hat{x}, \hat{y}) H_{loc}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{y} d\hat{x}.$$

Mit den Koordinatentransformationen $(\hat{x}^{(i)}, \hat{y}^{(i)})$, die $(\eta, \omega) \in R_3 \times T_1^h$ auf D_i abbilden, ergibt sich

$$If = \int_{R_3} \int_{T_1^h} \eta_1 \omega^3 \sum_{i=1}^2 \Phi^{loc}(\hat{x}^{(i)}, \hat{y}^{(i)}) H^{loc}(\hat{x}^{(i)}, \hat{y}^{(i)}) d\omega d\eta. \quad (4.21)$$

Lemma 4.5 *Q_ω sei eine abstrakte Kubaturformel über T_1^h und Q_η das Gaußsche Tensorprodukt über R_3 . Dann gilt*

$$\begin{aligned} (I - Q_\omega Q_\eta) f &\leq \max_{\eta \in R_3} (I_\omega - Q_\omega) f(\eta, \omega) \\ &+ \sum_{i=1}^3 \max_{\omega \in T_2^h} \max_{\hat{\eta}_i \in [0,1]^2} (I_{\eta_i} - Q_{\eta_i}) f(\eta, \omega). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Beweis Mit (4.2) wie in [29, 4.2]. \square

	Ident. Dreiecke	Gemeinsame Kante	Gemeinsame Ecke	Fast sing. Nahfeld
#	N	$3N$	$\approx 9N$	$\gg 9N$
d	3	2	1	0
$K(N)$	$\mathcal{O}(\log N)$	$\mathcal{O}(\log^2 N)$	$\mathcal{O}(\log^3 N)$	$\mathcal{O}(\log^4 N)$

Tabelle 4.2: Asymptotische Komplexität im Nahfeld

Satz 4.6 Γ sei wieder stückweise analytisch und bi-Lipschitz-stetig. Dann ist

$$g(\tilde{\eta}, \omega) := \omega \sum_{i=1}^2 \Phi^{loc}(\hat{x}^{(i)}, \hat{y}^{(i)}) H^{loc}(\hat{x}^{(i)}, y^{(i)})$$

für alle $\tilde{\eta} \in [-1, 1]^3$ analytisch in $\omega \in T_1^h$ und für alle $\omega \in T_1^h$ und alle $\hat{\eta}_i \in [-1, 1]^2$ bezüglich $\tilde{\eta}_i$ ($1 \leq i \leq 3$) in eine Ellipse $\mathcal{E}_{-1,1}^\rho$ mit Halbachsensumme $\rho > 1$ analytisch fortsetzbar.

Beweis Siehe [25].

Korollar 4.4 Q_ω sei eine abstrakte Kubaturformel über T_1^h mit Exaktheitsgrad γ_ω und $Q_\eta := G_\eta^n G_\eta^m G_\eta^n$ die Tensor-Gaußformel über R_3 . Unter der Voraussetzung

$$\gamma_\omega = 2 \quad \text{und} \quad n \geq \frac{3|\log h|}{2\log \rho} \quad (4.23)$$

ist die Bedingung (3.1), die die optimale Konvergenzrate für die gestörte Lösung sichert, erfüllt.

Beweis Wie (4.17) und (4.20). Es ist hier $|T_1^h| \leq h$, dafür liefert die Determinante zwei h -Potenzen. \square

Satz 4.7 Die affin-linearen Karten τ_x und τ_y mögen wieder ebene Dreiecke π_x und π_y beschreiben. Dann sind die regularisierten Integranden in (4.15), (4.18) und (4.21) polynomial in ω und die Integration über T_d^h elementar durchführbar.

Beweis Siehe [22], [2].

In Tabelle 4.2 sind die asymptotischen Komplexitäten der Doppelintegrale aufgeführt. Diese gelten sowohl für stückweise ebene wie auch für gekrümmte Oberflächen. Die Integration über T_d^h erfordert in beiden Situationen einen konstanten Aufwand: Entweder wird mit konstantem Kubaturgrad numerisch integriert oder es wird elementar integriert. Wir stellen fest: Je schwächer die Singularität, ...

- desto größer der Aufwand je Doppelintegral, nämlich $\mathcal{O}(\log^{4-d} N)$,
- desto mehr Doppelintegrale in der jeweiligen Kategorie.

Aus diesen Gründen gilt bei der Suche nach effizienteren Algorithmen unsere größte Aufmerksamkeit den beiden letzten Fällen. Wir beginnen mit einer Weiterentwicklung der Tensorproduktquadratur.

4.2 Variierende Tensorproduktquadratur

Die Anwendung der Duffy-Transformation in den letzten beiden Abschnitten hatte unterschiedliche Ziele: Während im singulären Fall der Integrand in erster Linie durch diese regularisiert und damit Standard-Kubaturverfahren anwendbar wurden, ging es im fast singulären Fall lediglich um die Anwendung der Gauß-Quadratur auf diesen über einen Tensorproduktansatz und deren bessere Konvergenz (vgl. Satz 3.3 mit Satz 4.3). Um die Wirkungsweise der Transformation in den unterschiedlichen Fällen zu illustrieren, betrachten wir folgendes Beispiel: Die Funktion

$$f(x, y) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

werde über das Dreieck $\Delta_h := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq h\}$ integriert, hat aber in 0 eine schwache Singularität. Die Regularisierung von f geschieht durch

$$D : [0, h] \times [0, 1] \rightarrow \Delta_h, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \eta \end{pmatrix},$$

indem die Gramsche Determinante $\sqrt{g_D} = \xi$ von D die schwache Singularität in 0 hebt:

$$(f \circ D) \sqrt{g_D} = \frac{\xi}{\xi \sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Die Anwendung des Tensorproduktansatzes auf

$$(f \circ D) : [0, h] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

entspricht der Anwendung des Verallgemeinerten Tensorprodukts [9, 5.6.1] auf

$$f : \Delta_h \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es macht keinen Unterschied, ob man zuerst Δ_h zu dem Rechteck $[0, h] \times [0, 1]$ »aufklappt«, um auf den dadurch regularisierten Integranden $f \circ D$ die klassische Produktquadratur anzuwenden oder ob auf das innere Integral von

$$\int_0^h \int_0^x f(x, y) dy dx$$

im Rahmen des Verallgemeinerten Produktansatzes Quadraturformeln $Q(x)$ angesetzt werden, die aus einer einzigen Formel \hat{Q} durch Skalierung hervorgehen. Für kleines x würde der Integrand f zwar immer singulärer, das Intervall $[0, x]$ aber entsprechend kleiner, was den x -unabhängigen Quadraturgrad in y -Richtung rechtfertigt. Welchen Effekt hat die Transformation $D : [0, 1]^2 \rightarrow \Delta_1$, wenn die Singularität – wie im regulären Nahfeld – nicht im Integrationsgebiet liegt? Dann wird der ohnehin glatte Integrand zusätzlich geglättet und die Quadratur über die Linien $s_x := \{(x, y) \in \Delta_1 : y \in [0, x]\}$ sicherlich desto genauer, je

kleiner x ist. Der Tensorproduktfehler hängt aber im wesentlichen vom maximalen Fehler der eindimensionalen Linienintegrale ab. Daher liegt eine Verallgemeinerung des klassischen bzw. des Verallgemeinerten Produktansatzes in dem Sinne nahe, daß die Integration über y nicht mit derselben, sondern mit frei wählbaren Quadraturformeln durchgeführt wird. Die Idee besteht darin, für kleine x entsprechend der Länge von s_x weniger Stützstellen zur Berechnung der Linienintegrale bezüglich y über s_x zu spendieren.

Definition 4.2 (Variierende Tensorproduktquadratur) *Es sei $Q_1 = \{(x_j), (\omega_j)\}$ eine Kubaturformel über A_1 und abhängig von $x \in A_1$ seien mit $Q_2(x) = \{(y_k(x)), (\eta_k(x))\}$ solche über A_2 definiert. Dann wird durch*

$$Q := Q_1 Q_2(x) := \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2(x_j)} \omega_j \eta_k(x_j) f(x_j, y_k(x_j)) \quad (4.24)$$

die Variierende Tensorproduktquadratur über $A = A_1 \times A_2$ erklärt. Sind die Formeln Q_1 und $Q_2(x)$ für alle $x \in A_1$ positiv, so ist auch die VTQ positiv.

Bemerkung Dieser Ansatz läßt sich in Anlehnung an den Verallgemeinerten Produktansatz natürlich auch für Gebiete erklären, die nicht durch Transformation auf ein Kartesisches Produkt $A_1 \times A_2$ zurückgeführt werden können. Wegen oben angesprochener Äquivalenz im Falle der Integration über Dreiecke begnügen wir uns aber mit der eben formulierten Version.

4.2.1 Fast singuläre Integrale

Die Rückführung des Produktquadraturfehlers auf den Fehler der einzelnen Faktoren im letzten Abschnitt beruhte auf der Aufspaltung (4.2). Und für diese ist die Vertauschbarkeit von Q_1 bzw. I_1 mit Q_2 essentiell, wenn mit I_1 die Integration über die erste Variable bezeichnet wird. Beim Verallgemeinerten Produktansatz ist das leider nicht möglich, da Q_2 von x abhängt. Dieser Ansatz spiegelt in größerem Maße die Idee der Aufsummierung von Linienintegralen und der damit verbundenen Festlegung der Quadraturreihenfolge wider. Darauf beruht auch folgende Abschätzung.

Lemma 4.6 *Es seien Q_1 und $Q_2(x)$ positive Formeln über A_1 bzw. A_2 und $Q := Q_1 Q_2(x)$ die VTQ über $A := A_1 \times A_2$ und $f : A \rightarrow \mathbb{K}$. Dann gilt für den Gesamtfehler*

$$\left| (I - Q) f \right| \leq C \left(\max_{x \in A_1} (E_2 f)(x) + \max_{y \in A_2} (E_1 f)(y) \right). \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \text{Dabei gelte} \quad (E_2 f)(x) &:= \left| \int_{A_2} f(x, y) dy - Q_2(x) f(x, y) \right| \\ \text{und} \quad (E_1 f)(y) &:= \left| \int_{A_1} f(x, y) dx - Q_1 f(x, y) \right|. \end{aligned}$$

Beweis Die folgende Aufspaltung benötigt nur die Vertauschbarkeit von Q_1 mit I_2 .

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x, y) dy dx - Qf(x, y) \right| &= \left| Q_1 \left[(E_2 f)(x) \right] + \int_{A_1} \int_{A_2} f(x, y) dy dx - Q_1 \int_{A_2} f(x, y) dy \right| \\ &\leq \left| Q_1 \left[(E_2 f)(x) \right] \right| + \left| \int_{A_2} E_1 f(x, y) dy \right| \\ &\leq C \left(\max_{x \in A_1} (E_2 f)(x) + \max_{y \in A_2} (E_1 f)(y) \right). \end{aligned}$$

Letzte Ungleichung folgt aus der Positivität der Gewichte von Q_1 . \square

Das nächste Lemma ist die Erweiterung von Lemma 4.2.

Lemma 4.7 Die Funktion $f : [-1, 1]^4 \rightarrow \mathbb{K}$ erlaube für alle $\hat{u}_i \in [-1, 1]^3$ als Funktion von u_i eine analytische Fortsetzung nach $\mathcal{E}_{-1,1}^{\rho_i} \subset \mathbb{C}$, falls $i \in \{1, 3\}$, und nach $\mathcal{E}_{-1,1}^{\rho_i(u_{i-1})} \subset \mathbb{C}$, falls $i \in \{2, 4\}$. Definiere für $i = 1, 3$

$$M_i := \max_{\hat{u}_i \in [-1, 1]^3} \max_{u_i \in \mathcal{E}^{\rho_i}} |f(u)|.$$

Zu allen $u_1, u_3 \in [-1, 1]$ seien $n_2(u_1), n_4(u_3) \in \mathbb{N}$ erklärt. Dann gilt für alle $n_1, n_2(u_1), n_3$ und $n_4(u_3) \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \left(I - G_{u_1}^{n_1} G_{u_2}^{n_2(u_1)} G_{u_3}^{n_3} G_{u_4}^{n_4(u_3)} \right) f \right| &\leq C \left(\sum_{i \in \{1, 3\}} \max_{\hat{u}_i \in [-1, 1]^3} (I_i - G_{u_i}^{n_i}) f(u) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in \{2, 4\}} \max_{\hat{u}_i \in [-1, 1]^3} (I_i - G_{u_i}^{n_i(u_{i-1})}) f(u) \right) \\ &\leq C \left(\sum_{i \in \{1, 3\}} \rho_i^{-2n_i} M_i + \sum_{i \in \{2, 4\}} \max_{\hat{u}_i \in [-1, 1]^3} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\rho_i(u_{i-1})^{-2n_i(u_{i-1})} \max_{u_i \in \mathcal{E}^{\rho_i(u_{i-1})}} |f(u)| \right) \right). \end{aligned}$$

Beweis Der Beweis verläuft genauso wie der von Satz 4.2 (in dieser Arbeit), man ersetzt nur Satz 4.2 in [29] durch Lemma 4.6 und beachtet, daß die Quadraturformeln in u_2 - und u_4 -Richtung von u_1 bzw. u_3 abhängen. \square

Satz 4.8 Die Strecke $s_{u_1} := \{x = \tau_x \circ \tilde{D}(u_1, u_2) : u_2 \in [-1, 1]\} \subset \pi_x$ habe die Länge h_{u_1} und $s_{u_3} := \{x = \tau_y \circ \tilde{D}(u_3, u_4) : u_4 \in [-1, 1]\} \subset \pi_y$ die Länge h_{u_3} . Die Voraussetzungen aus Satz 4.3 seien wieder erfüllt und

$$G_u^n := G_{u_1}^{n_1} G_{u_2}^{n_2(u_1)} G_{u_3}^{n_3} G_{u_4}^{n_4(u_3)} \quad (4.26)$$

das Variierende Tensorprodukt vom Gauß-Legendre-Typ. Für dessen Fehler gilt

$$\begin{aligned} \left| \left(I - G_u^n \right) f \right| &\leq C h_x^2 h_y^2 \delta^{-d} \left(\sum_{i \in \{1, 3\}} \left(1 + \gamma \frac{\delta}{h_{(x, y)}} \right)^{-2n_i + \eta + 1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in \{2, 4\}} \max_{u_{i-1} \in [-1, 1]} \left(1 + \gamma \frac{\delta}{h_{u_{i-1}}} \right)^{-2n_i(u_{i-1}) + \eta} \right), \end{aligned}$$

wobei $n_i(u_{i-1})$ für $i = 2, 4$ \mathbb{N} -wertige Funktionen auf $[-1, 1]$ sind.

Beweis Dieser Satz ist eine Folgerung aus Lemma 4.7 und aus Verallgemeinerungen der Lemmata 4.1 und 4.2: Diese gelten nämlich auch für die Variierende Tensorproduktquadratur. Man beachte nur, daß für $i = 2, 4$ die

$$\rho_i(u_{i-1}) = 1 + \gamma \frac{\delta}{h_{u_{i-1}}}$$

nicht konstant, sondern \mathbb{R}_+ -wertige Funktionen von u_{i-1} sind. Im Beweis von Lemma 4.1 wird lediglich auf die Abschätzung von h_{u_1} und h_{u_3} nach oben durch h_x verzichtet. \square

Eine einfache Folgerung ist nun

Korollar 4.5 *Es sei $\eta = 0$. Gilt für die Kubaturgrade der VTQ*

$$n_i \geq \frac{1}{2} + \frac{-\log(\delta^d) + 2|\log h|}{2\log \rho_i}, \text{ falls } i = 1, 3, \quad (4.27)$$

$$n_i(u_{i-1}) \geq \frac{-\log(\delta^d) + 2|\log h|}{2\log \rho_i(u_{i-1})}, \text{ falls } i = 2, 4, \quad (4.28)$$

dann konvergiert die gestörte Galerkinlösung φ_h mit der Konvergenzrate (2.24) gegen die exakte Lösung φ .

Beweis Wieder durch Einsetzen.

Wir wollen uns noch kurz der Frage zuwenden, welchen Einfluß die Wahl der Karte

$$\tau_x : \Delta_{ref} \rightarrow \pi_x$$

auf die Effizienz dieser Methode hat. Es mögen a , b , und c die Seiten, A , B und C die Eckpunkte von π_x bezeichnen, wobei die Seite a dem Punkt A gegenüberliege, ...

Gilt für die Seitenlängen $|a| \geq |b| \geq |c|$, dann ist die Wahl

$$\tau(0) = C \quad (4.29)$$

erstrebenswert. Denn einer genaueren Untersuchung zufolge geht in die fixe Stützstellenanzahl n_1 nicht der Dreiecksdurchmesser h_x , sondern die maximale Länge der $\tau(0)$ einschließenden Seiten ein. Und im Falle $\tau(0) = C$ sind das mit a und b die beiden längsten des Dreiecks. Damit werden in (4.28) die $n_2(u_1)$ minimiert, denn für die ist das minimale $|c|$ verantwortlich. Ist dagegen c eine der beiden $\tau(0)$ einschließenden Seiten und $|a| \geq |b| \gg |c|$, dann profitieren wir weder in u_1 - noch in u_2 -Richtung von dieser kurzen Seite (siehe Abbildung 4.2).

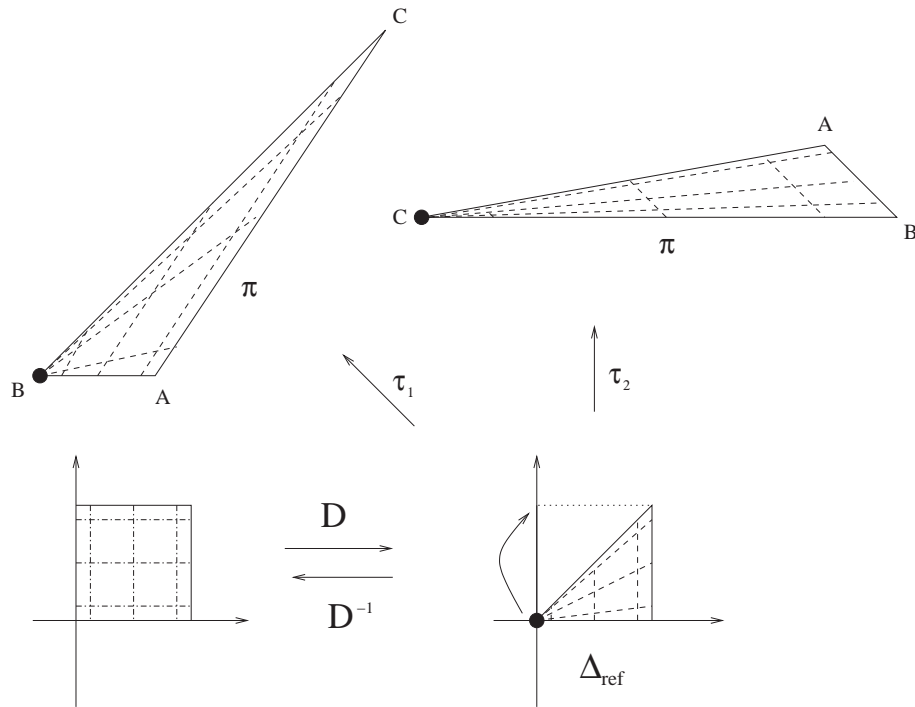


Abbildung 4.2: Glättung durch die Duffy-Transformation

4.2.2 Singuläre Integrale

Die regularisierenden vierdimensionalen Transformationen in den singulären Kategorien »Gemeinsame Kante« und »Gemeinsame Ecke« beinhalten jeweils zwei Transformationen des Duffy-Typs: Eine tatsächlich regularisierende und eine, die zwei- bzw. dreidimensionale Querschnitte der D_i lediglich wegen der Tensor-Gaußquadratur zu Quadern »aufklappt«.

Gemeinsame Kante

Die Teilgebiete D_i ($i = 1, \dots, 6$) sowie die zugehörigen Transformationen werden wie bereits erwähnt in [23] dargestellt. Wir erläutern anhand des Teilgebiets D_1 , wie die Variierende Tensorquadratur in diesem singulären Fall Effizienz steigernd eingebracht werden kann. Es sei also

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z_3 \leq h \\ -h \leq z_1 \leq -z_3 \\ -h - z_1 \leq z_2 \leq 0 \\ -z_1 - z_2 \leq \hat{x}_1 \leq h \end{array} \right\}$$

mit der zugehörigen Transformation $(\eta, \omega) \in R_2 \times T_2^h \rightarrow D_1$:

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \\ z_3^{(1)} \\ \hat{x}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 \cdot \eta_1 \\ \omega_1 \cdot (\eta_1 - 1) \\ \omega_1 \cdot \eta_2 \eta_1 \\ \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Abbildung 4.3 zeigt die dreidimensionale Projektion des vierdimensionalen Gebiets D_1 auf

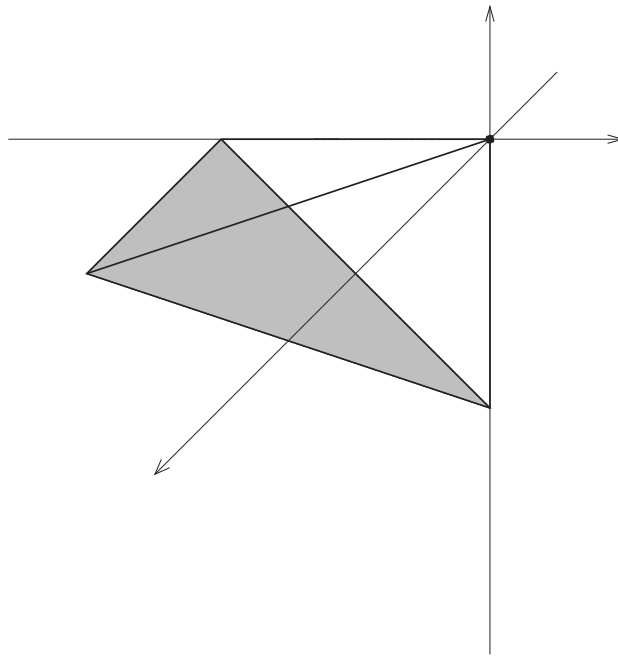


Abbildung 4.3: Projektion von D_1 auf den \mathbb{R}^3

den (z_1, z_2, z_3) -Raum: Eine Pyramide mit Spitze im Ursprung und dreieckiger Grundseite. In (4.30) werden die zu dieser Grundseite parallelen Querschnitte der Pyramide mittels der Koordinaten $(\eta_1, \eta_2) \in R_2$ parametrisiert. Die Multiplikation mit ω_1 – durch einen kleinen Punkt »·« in (4.30) gekennzeichnet – stellt den regularisierenden Anteil der vierdimensionalen Duffy-Transformation dar. Bildlich gesprochen wird D_1 im Ursprung, der Singularität, »aufgeklappt«. Dagegen hat die Multiplikation $\eta_1 \eta_2$ in der dritten Komponente von (4.30) keine regularisierende Wirkung und dient nur der Anwendung der Tensorproduktquadratur auf jene dreieckigen Querschnitte. Hier ist nun wie im fast singulären Nahfeld die Variierende Tensorproduktquadratur einsetzbar. Man beachte, daß bei stückweise ebenem Rand die VTQ über R_2 und die elementare Integration über T_2^h verknüpft werden können, da sie komplementär sind.

Gemeinsame Ecke

Besteht die Schnittmenge der beiden Dreiecke π_x und π_y aus einem Punkt, so ist die Unterteilung in zwei Gebiete D_1 und D_2 notwendig, um mit geeigneten Transformationen den Integranden auf $R_3 \times T_1^h$ zurückziehen und damit regularisieren zu können. Die dreidimensionalen Querschnitte, die ausschließlich der Tensor-Gauß-Quadratur wegen transformiert werden, sind jetzt Prismen mit dreieckigen Grundseiten. Die Koordinaten $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in R_3$ parametrisieren diese, so daß auf zweidimensionale Querschnitte wieder VTQ angewendet werden kann. Dies ist auch bei allgemeinen gekrümmten Rändern sinnvoll. Im nächsten Abschnitt werden wir allerdings eine andere Methode für stückweise ebene Ränder kennenlernen, die im Fall des gemeinsamen Punktes gerade über diese Dreiecke exakt integriert.

4.3 Der Raumwinkelansatz

Setzt sich die Oberfläche Γ aus ebenen Dreiecken zusammen, so ist es möglich, für einige Kerne Φ und polynomiales φ die Punkt- gegen Dreieck-Integrale

$$A_\Phi(\xi, \pi, \varphi) := \int_\pi \Phi(\xi, y) \varphi(y) ds(y), \quad (4.31)$$

wie sie beim Kollokationsverfahren auftreten, analytisch auszuwerten. Beim Galerkin-Verfahren ist für die wesentlichen Kategorien »Fast singuläres Nahfeld« und »Gemeinsame Ecke« immerhin noch eine semi-analytische Kubatur möglich, worauf im letzten Abschnitt dieses Kapitels eingegangen wird. Zunächst sollen im ersten Abschnitt diese Formeln für das Einfach- und Doppelschichtpotential des Laplace-Operators aus der ersten Auflage von [15] zitiert und bewiesen werden und danach auf den Kern des Hypersingulären Operators erweitert werden. In den folgenden Abschnitten wird dann untersucht, inwiefern diese Formeln auch auf die verschiedenen Ansätze des Helmholtz-, Stokes- und Lamé-Problems übertragbar sind. Erfreulicherweise funktioniert das für alle Ansätze der Stokes- und der Lamé-Gleichungen und für den Einfachschichtpotential-Ansatz der Helmholtzgleichung.

Ausgangspunkt ist die Berechnung des Laplace-Doppelschichtpotentials mit konstanter Belegung

$$A(\xi, \pi, 1) := \frac{1}{4\pi} \int_\pi \frac{\langle n(y), \xi - y \rangle}{\|\xi - y\|^3} ds(y)$$

bezüglich π in x mittels Bestimmung des *Raumwinkels*.

Definition 4.3 (Raumwinkel) *Der zu π und ξ gehörende Raumwinkel ist der Flächeninhalt $|\Delta_K|$ des Kugeldreiecks*

$$\Delta_K := \{x \in B_1(\xi) : \exists y \in \pi, \text{ so daß } x \in \overline{\xi y}\}.$$

Da das Integral (4.31) invariant ist unter orthonormalen Transformationen, kann angenommen werden, daß π in der x_1 - x_2 -Ebene liegt und $\xi = x_3 \cdot n$ gilt mit $n = e_3 = (0, 0, 1)^T$. Diese Transformation muß allerdings in der Praxis erst durchgeführt werden und dies möglichst effizient (siehe Kapitel 5). Damit ergibt sich $\langle n, \xi - y \rangle = x_3 - y_3 = x_3$. Es gilt

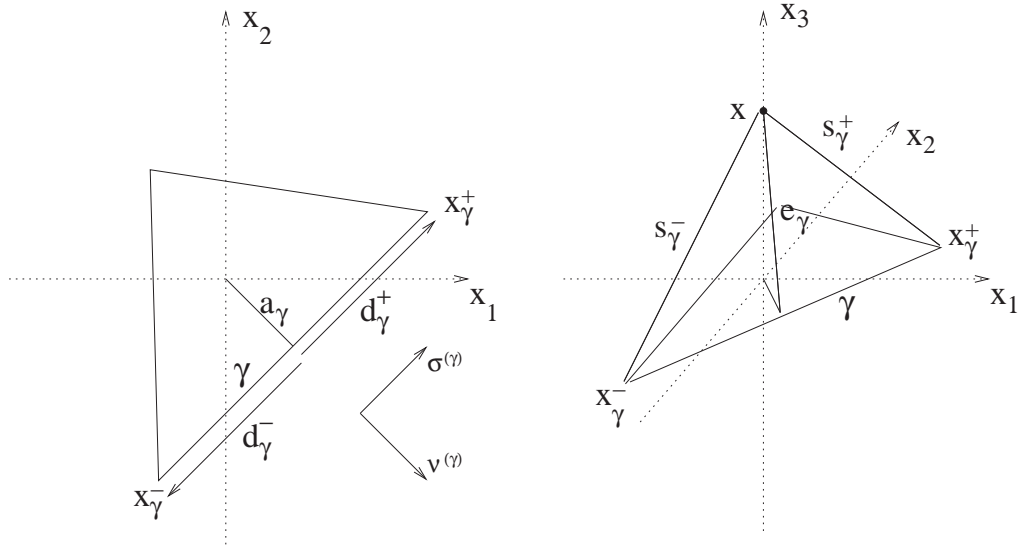


Abbildung 4.4: Punkt und Dreieck

Satz 4.9 $A(\xi, \pi, 1) = \frac{\text{sign}(x_3)}{4\pi} |\Delta_K|$.

Beweis Siehe [15, 8.2.14].

Es sei γ eine Seite von π , $\nu^{(\gamma)}$ die äußere Normale und $\sigma^{(\gamma)}$ der Tangentialvektor an diese, so daß $(\nu^{(\gamma)}, \sigma^{(\gamma)})$ und $(\nu^{(\gamma)}, \sigma^{(\gamma)}, n)$ positiv orientierte Orthonormalbasen der x_1 - x_2 -Ebene bzw. des \mathbb{R}^3 bilden. Der Eckpunkt x_γ^+ von γ folge auf x_γ^- , wenn man γ durch $\sigma^{(\gamma)}$ orientiert. Zusätzlich benötigen wir die Größen

$$\begin{aligned} a_\gamma &:= \langle y, \nu^{(\gamma)} \rangle, \quad y \in \gamma, \\ d_\gamma^\pm &:= \langle x_\gamma^\pm, \sigma^{(\gamma)} \rangle, \\ e_\gamma &:= \sqrt{x_3^2 + a_\gamma^2} \quad \text{und} \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$s_\gamma^\pm := \sqrt{e_\gamma^2 + d_\gamma^{\pm 2}}, \tag{4.33}$$

deren geometrische Bedeutung in Abbildung 4.4 illustriert wird. Man beachte, daß a_γ nicht von $y \in \gamma$ abhängt und wohldefiniert ist. Zur effizienten Berechnung des Raumwinkels setzen wir noch

$$\begin{aligned} c_\gamma^\pm &:= e_\gamma^2 + |x_3| s_\gamma^\pm, \\ A_\gamma &:= c_\gamma^+ c_\gamma^- + a_\gamma^2 d_\gamma^+ d_\gamma^-, \\ B_\gamma &:= a_\gamma (d_\gamma^+ c_\gamma^- - d_\gamma^- c_\gamma^+) \quad \text{und} \\ C_\gamma &:= \arg(A_\gamma + iB_\gamma) \in (-\pi, \pi]. \end{aligned} \tag{4.34}$$

In [15] ist an dieser Stelle ein Druckfehler und A_γ mit B_γ zu vertauschen. Falls $A_\gamma = B_\gamma = 0$ gilt, ist C_γ nicht definiert, was nur für $x_3 = 0$ eintreten kann.

Satz 4.10

$$A(\xi, \pi, 1) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x_3)}{4\pi} \sum_{\gamma} C_{\gamma} & \text{falls } x_3 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.35)$$

Beweis siehe [20].

4.3.1 Potentialgleichung**Einfach- und Doppelschichtpotential**

Das Einfach- und das Doppelschichtpotential mit polynomialer Belegung setzt sich aus Termen der folgenden Form zusammen

$$E_{jk} := \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \frac{y_1^j y_2^k}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2}} dy_1 dy_2$$

und $\tilde{D}_{jk} := \frac{x_3}{4\pi} \int_{\pi} \frac{y_1^j y_2^k}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2.$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes lassen sich die (höheren) Doppelschichtpotentiale und die Einfachschichtpotentiale auf $\tilde{D}_{00} = A(\xi, \pi, 1)$ und Linienintegrale

$$E_{jk}^{(\gamma)} := \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{y_1^j y_2^k}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2}} d\gamma \quad (4.36)$$

über alle Seiten γ von π zurückführen. Diese sind ebenfalls analytisch berechenbar.

Lemma 4.8 *Es sei $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_i \gamma_i$. Dann gilt mit $E_{0-1}^{(\gamma)} = E_{-10}^{(\gamma)} = 0$*

$$\begin{aligned} E_{00}^{(\gamma)} &= \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{s_{\gamma}^+ + d_{\gamma}^+}{s_{\gamma}^- + d_{\gamma}^-} \right) = \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{s_{\gamma}^- - d_{\gamma}^-}{s_{\gamma}^+ - d_{\gamma}^+} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{(s_{\gamma}^- - d_{\gamma}^-)(s_{\gamma}^+ + d_{\gamma}^+)}{e_{\gamma}^2} \right), \text{ falls } e_{\gamma} \neq 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$E_{00}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{\max\{|d_{\gamma}^+|, |d_{\gamma}^-|\}}{\min\{|d_{\gamma}^+|, |d_{\gamma}^-|\}} \right), \text{ falls } e_{\gamma} = 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} E_{0k}^{(\gamma)} &= \frac{1}{k} \left((2k-1) a_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} E_{0,k-1}^{(\gamma)} - (k-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_1^{(\gamma)} \right)^2 \right) E_{0,k-2}^{(\gamma)} \right. \\ &\quad \left. + \nu_1^{(\gamma)} G_{0,k-1}^{(\gamma)} \right), \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$E_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_{\gamma} E_{j-1,k}^{(\gamma)} - \nu_2^{(\gamma)} E_{j-1,k+1}^{(\gamma)} \right) / \nu_1^{(\gamma)}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0, \quad (4.40)$$

$$E_{j0}^{(\gamma)} = \frac{1}{j} \left((2j-1) a_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} E_{j-1,0}^{(\gamma)} - (j-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_2^{(\gamma)} \right)^2 \right) E_{j-2,0}^{(\gamma)} \right)$$

$$-\nu_2^{(\gamma)} G_{j-1,0}^{(\gamma)}), j \geq 1, \text{ und} \quad (4.39')$$

$$E_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_\gamma E_{j,k-1}^{(\gamma)} - \nu_1^{(\gamma)} E_{j+1,k-1}^{(\gamma)} \right) / \nu_2^{(\gamma)}, j \geq 0, k \geq 1. \quad (4.40')$$

Im Falle $|\nu_1^{(\gamma)}| < |\nu_2^{(\gamma)}|$ wende man (4.39') und (4.40') anstelle der Formeln (4.39) und (4.40) an. Dabei gilt

$$G_{jk}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \left((x_{1,\gamma}^+)^j (x_{2,\gamma}^+)^k s_\gamma^+ - (x_{1,\gamma}^-)^j (x_{2,\gamma}^-)^k s_\gamma^- \right).$$

Hier bezeichne $x_{i,\gamma}^\pm$ die i -te Komponente des Punktes $x_\gamma^\pm \in \mathbb{R}^2$. In (4.37) nehme man je nach i) $d_\gamma^\pm \geq 0$, ii) $d_\gamma^\pm < 0$ oder iii) $d_\gamma^- < 0, d_\gamma^+ \geq 0$ den Term, der die Auslöschung führender Stellen vermeidet.

Diese Formeln sind aus [15, 9.4.5 ff], dort teilweise fehlerhaft und ohne Beweis oder Referenz. Daher folgt ein ausführlicher Beweis.

Beweis $\tilde{\gamma}$ liege parallel zur x_1 -Achse und gehe aus γ durch Drehung um den Ursprung hervor, so daß $\sigma^{(\tilde{\gamma})} = -e_1 = (-1, 0)^T$ und folglich $a_{\tilde{\gamma}} = y_2$ gilt, falls $y \in \tilde{\gamma}$.

von (4.37):

$$\begin{aligned} E_{00}^{(\gamma)} = E_{00}^{(\tilde{\gamma})} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\log \left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \right) \right) \Big|_{y_1=-d_\gamma^+}^{-d_\gamma^-} \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{s_\gamma^- - d_\gamma^-}{s_\gamma^+ - d_\gamma^+} \right). \end{aligned}$$

von (4.38): folgt aus $\log(|x|)' = \frac{1}{x}$.

von (4.39): Es gilt

$$E_{0k}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^k}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} ds(y).$$

Also folgt mit $r := \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ und

$$G(y_1, y_2) := -\nu_1^{(\gamma)} (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1} r$$

aus

$$\frac{\partial}{\partial y_1} G(y) \Big|_{y_2=a_\gamma} = \nu_1^{(\gamma)2} (k-1) (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-2} r - \frac{\nu_1^{(\gamma)} y_1 (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1}}{r}$$

$$\begin{aligned}
&= (k-1)(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-2} \cdot \frac{(\nu_1^{(\gamma)}y_1)^2 + (\nu_1^{(\gamma)}y_2)^2 + (\nu_1^{(\gamma)}x_3)^2}{r} \\
&\quad - \frac{\nu_1^{(\gamma)}y_1(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-1}}{r} \\
&= (k-1)(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-2} \cdot \frac{y_2^2 + (\nu_1^{(\gamma)}x_3)^2}{r} + (k-1) \\
&\quad \times (\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-2} \cdot \frac{(\nu_1^{(\gamma)}y_1 + \nu_2^{(\gamma)}y_2)(\nu_1^{(\gamma)}y_1 - \nu_2^{(\gamma)}y_2)}{r} \\
&\quad - \frac{\nu_1^{(\gamma)}y_1(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-1}}{r} \\
&= (k-1)(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-2} \cdot \frac{a_\gamma^2 + (\nu_1^{(\gamma)}x_3)^2}{r} + k \frac{(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^k}{r} \\
&\quad - (k-1)(\nu_1^{(\gamma)}y_1 + \nu_2^{(\gamma)}y_2) \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-1}}{r} \\
&\quad - k \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^k}{r} + \frac{-\nu_1^{(\gamma)}y_1 \cdot (\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-1}}{r} \\
&= (k-1) \left(a_\gamma^2 + (\nu_1^{(\gamma)}x_3)^2 \right) \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-2}}{r} \\
&\quad + k \frac{(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^k}{r} - (2k-1)\nu_2^{(\gamma)}a_\gamma \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)}y_2 - \nu_1^{(\gamma)}y_1)^{k-1}}{r}
\end{aligned}$$

die Behauptung

$$\int_{-d_\gamma^+}^{-d_\gamma^-} \frac{\partial}{\partial y_1} G(y_1, a_\gamma) dy_1 = G_{0k-1}^{(\gamma)}.$$

(4.40) rechnet man einfach nach. □

Nun zu den eigentlichen Potentialen.

Satz 4.11 *Es sei $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \pi$. Dann gilt mit $E_{0,-1} := 0$*

$$E_{00} = -x_3 \tilde{D}_{00} + \sum_{\gamma} a_\gamma E_{00}^{(\gamma)}, \quad (4.41)$$

$$E_{0k} = \frac{1}{k+1} \left\{ x_3^2 (1-k) E_{0,k-2} + \sum_{\gamma} \left(x_3^2 \nu_2^{(\gamma)} E_{0,k-1}^{(\gamma)} + a_\gamma E_{0k}^{(\gamma)} \right) \right\}, \quad k \geq 1, \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
E_{jk} &= \frac{1}{j+k+1} \left(-x_3^2 (j-1) E_{j-2,k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma} \left(x_3^2 \nu_1^{(\gamma)} E_{j-1,k}^{(\gamma)} + a_\gamma E_{jk}^{(\gamma)} \right) \right), \quad k \geq 0, \quad j \geq 1, \quad (4.43)
\end{aligned}$$

$$\tilde{D}_{0k} = -x_3 \left\{ (1-k) E_{0,k-2} + \sum_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} E_{0,k-1}^{(\gamma)} \right\}, \quad k \geq 1, \quad (4.44)$$

$$\tilde{D}_{1k} = -x_3 \sum_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} E_{0k}^{(\gamma)}, \quad k \geq 0, \quad \text{und} \quad (4.45)$$

$$\tilde{D}_{jk} = -\tilde{D}_{j-2,k+2} - x_3^2 \tilde{D}_{j-2,k} + x_3 E_{j-2,k}, \quad j \geq 2, \quad k \geq 0. \quad (4.46)$$

Beweis Mit $r := \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2}$ sind die Vektorfelder und deren Divergenzen

$$(4.41) \quad G(y) = \left(\frac{y_1}{r}, \frac{y_2}{r} \right)^T, \quad \operatorname{div} G(y) = \frac{1}{r} + \frac{x_3^2}{r^3},$$

$$(4.42) \quad G(y) = \left(\frac{y_1 y_2^k}{r}, \frac{x_3^2 y_2^{k-1} + y_2^{k+1}}{r} \right)^T, \\ \operatorname{div} G(y) = \frac{(k+1) y_2^k}{r} + \frac{x_3^2 (k-1) y_2^{k-2}}{r},$$

$$(4.43) \quad G(y) = \left(\frac{x_3^2 y_1^{j-1} y_2^k + y_1^{j+1} y_2^k}{r}, \frac{y_1^j y_2^{k+1}}{r} \right)^T, \\ \operatorname{div} G(y) = \frac{(j+k+1) y_1^j y_2^k + (j-1) x_3^2 y_1^{j-2} y_2^k}{r},$$

$$(4.44) \quad G(y) = \left(0, \frac{y_2^{k-1}}{r} \right)^T, \quad \operatorname{div} G(y) = \frac{(k-1) y_2^{k-2}}{r} - \frac{y_2^k}{r^3} \quad \text{und}$$

$$(4.45) \quad G(y) = \left(\frac{y_2^k}{r}, 0 \right)^T, \quad \operatorname{div} G(y) = -\frac{y_1 y_2^k}{r^3}$$

in einer Umgebung von $\pi \subset \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar bzw. stetig und die Behauptung folgt aus dem Gaußschen Integralsatz (siehe [13]). \square

Bemerkung

Für $\xi \in \gamma^0 \setminus \gamma$ (γ^0 Gerade mit $\gamma \subset \gamma^0$) existieren die Integrale, man kann aber $E_{jk}^{(\gamma)} := 0$ setzen, da der Wert hier nicht in die Rechnung eingeht. Gleichung (4.38) werden wir an anderer Stelle noch benötigen.

Hypersingulärer Operator

Die Normalenableitung des Doppelschichtpotentials [15, 8.2.5/8.3] führt zu einer Integralgleichung mit dem hypersingulären Kern

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial n(x)} \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} \quad (4.47) \\ = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\langle n(y), n(x) \rangle}{\|x - y\|^3} - 3 \frac{\langle n(y), x - y \rangle \langle x - y, n(x) \rangle}{\|x - y\|^5} \right).$$

Das zugehörige Oberflächenpotential existiert im allgemeinen nur noch als part-fini Integral (siehe [28]). Wir werden später sehen, daß in den entscheidenden Situationen dieses mit

dem Lebesgue-Integral übereinstimmt und wir bei der Bestimmung analytischer Formeln diesen regularisierten Integralbegriff ignorieren können. Nimmt man wieder polynomiale Ansatzfunktion an, so reicht es in Bezug auf den ersten Summanden, Terme der Form

$$D_{jk} := \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \frac{y_1^j y_2^k}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2 \quad (4.48)$$

und in bezug auf den zweiten Terme der Form

$$\tilde{T}_{jk} := \frac{x_3}{4\pi} \int_{\pi} \frac{y_1^j y_2^k}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{5}{2}}} dy_1 dy_2 \quad (4.49)$$

zu bestimmen, da $\langle n(y), n(x) \rangle$ konstant ist und $\langle y - x, n(x) \rangle$ ein Polynom ersten Grades in y . Dieser lineare Faktor des Kerns wird hier als zusätzliche Ansatzfunktion interpretiert und es sind – falls die eigentlichen Ansatzfunktionen z. B. vom Grad 1 – die T_{jk} für $0 \leq j+k \leq 2$ auszuwerten.

Analog zu Lemma 4.8 bestimmen wir zuerst die Linienintegrale

$$D_{jk}^{(\gamma)} := \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{y_1^j y_2^k}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} d\gamma. \quad (4.50)$$

Lemma 4.9 *Es gilt mit $D_{0-1}^{(\gamma)} = D_{-10}^{(\gamma)} = 0$ und $e_{\gamma} \neq 0$*

$$D_{00}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{e_{\gamma}^2} \cdot \left(\frac{d_{\gamma}^+}{s_{\gamma}^+} - \frac{d_{\gamma}^-}{s_{\gamma}^-} \right), \quad (4.51)$$

$$D_{0k}^{(\gamma)} = \frac{1}{k-2} \left((2k-3) a_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} D_{0,k-1}^{(\gamma)} - (k-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_1^{(\gamma)} \right)^2 \right) \right. \\ \left. \times D_{0,k-2}^{(\gamma)} + \nu_1^{(\gamma)} G_{0,k-1}^{(\gamma)} \right), \quad 1 \leq k \neq 2, \quad (4.52)$$

$$D_{02}^{(\gamma)} = \nu_2^{(\gamma)} a_{\gamma} D_{01}^{(\gamma)} + \nu_1^{(\gamma)2} E_{00}^{(\gamma)} - \nu_1^{(\gamma)} G_{01}^{(\gamma)}, \quad (4.53)$$

$$D_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_{\gamma} D_{j-1,k}^{(\gamma)} - \nu_2^{(\gamma)} D_{j-1,k+1}^{(\gamma)} \right) / \nu_1^{(\gamma)}, \quad j \geq 1, k \geq 0, \quad (4.54)$$

$$D_{j0}^{(\gamma)} = \frac{1}{j-2} \left((2j-3) a_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} D_{j-1,0}^{(\gamma)} - (j-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_2^{(\gamma)} \right)^2 \right) \right. \\ \left. \times D_{j-2,0}^{(\gamma)} - \nu_2^{(\gamma)} G_{j-1,0}^{(\gamma)} \right), \quad 1 \leq j \neq 2, \quad (4.52')$$

$$D_{20}^{(\gamma)} = \nu_1^{(\gamma)} a_{\gamma} D_{10}^{(\gamma)} + \nu_2^{(\gamma)2} E_{00}^{(\gamma)} + \nu_2^{(\gamma)} G_{10}^{(\gamma)}, \quad \text{und} \quad (4.53')$$

$$D_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_{\gamma} D_{j,k-1}^{(\gamma)} - \nu_1^{(\gamma)} D_{j+1,k-1}^{(\gamma)} \right) / \nu_2^{(\gamma)}, \quad j \geq 0, k \geq 1. \quad (4.54')$$

Im Falle $|\nu_1^{(\gamma)}| < |\nu_2^{(\gamma)}|$ wende man (4.52'), (4.53') und (4.54') an. Die Hilfsgrößen $G_{jk}^{(\gamma)}$ lauten jetzt

$$G_{jk}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \left((x_{1,\gamma}^+)^j (x_{2,\gamma}^+)^k / s_{\gamma}^+ - (x_{1,\gamma}^-)^j (x_{2,\gamma}^-)^k / s_{\gamma}^- \right).$$

Hier bezeichne $x_{i,\gamma}^{\pm}$ wieder die i -te Komponente des Punktes $x_{\gamma}^{\pm} \in \mathbb{R}^2$.

Beweis $\tilde{\gamma}$ liege wieder parallel zur x_1 -Achse und gehe aus γ durch Drehung um den Ursprung hervor, so daß $\sigma^{(\tilde{\gamma})} = -e_1 = (-1, 0)^T$ und $a_{\tilde{\gamma}} = y_2$, falls $y \in \tilde{\gamma}$, gelten.

von (4.51):

$$\begin{aligned} D_{00}^{(\gamma)} = D_{00}^{(\tilde{\gamma})} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot (y_2^2 + x_3^2)} \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2}} \right) \Big|_{y_1=-d_\gamma^-}^{-d_\gamma^+} \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{e_\gamma^2} \cdot \left(\frac{d_\gamma^+}{s_\gamma^+} - \frac{d_\gamma^-}{s_\gamma^-} \right). \end{aligned}$$

von (4.52): Es gilt

$$D_{0k}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^k}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{\frac{3}{2}}} ds(y).$$

So folgt mit $r := \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ und

$$G(y_1, y_2) := -\nu_1^{(\gamma)} (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1} / r$$

aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} G(y) \Big|_{y_2=a_\gamma} &= \frac{\nu_1^{(\gamma)^2} (k-1) (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-2}}{r} + \frac{\nu_1^{(\gamma)} y_1 (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1}}{r^3} \\ &= (k-1) (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-2} \cdot \frac{(\nu_1^{(\gamma)} y_1)^2 + (\nu_1^{(\gamma)} y_2)^2 + (\nu_1^{(\gamma)} x_3)^2}{r^3} \\ &\quad + \frac{\nu_1^{(\gamma)} y_1 (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1}}{r^3} \\ &= (k-1) (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-2} \cdot \frac{y_2^2 + (\nu_1^{(\gamma)} x_3)^2}{r^3} + (k-1) \\ &\quad \times (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-2} \cdot \frac{(\nu_1^{(\gamma)} y_1 + \nu_2^{(\gamma)} y_2)(\nu_1^{(\gamma)} y_1 - \nu_2^{(\gamma)} y_2)}{r^3} \\ &\quad + \frac{\nu_1^{(\gamma)} y_1 (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1}}{r^3} \\ &= (k-1) (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-2} \cdot \frac{a_\gamma^2 + (\nu_1^{(\gamma)} x_3)^2}{r^3} + (k-2) \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^k}{r^3} \\ &\quad - (k-1) (\nu_1^{(\gamma)} y_1 + \nu_2^{(\gamma)} y_2) \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1}}{r^3} \\ &\quad - (k-2) \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^k}{r^3} + \frac{\nu_1^{(\gamma)} y_1 \cdot (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1}}{r^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k-1) \left(a_\gamma^2 + (\nu_1^{(\gamma)} x_3)^2 \right) \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-2}}{r^3} + (k-2) \times \\
&\quad \times \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^k}{r^3} - (2k-3) \nu_2^{(\gamma)} a_\gamma \cdot \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^{k-1}}{r^3}
\end{aligned}$$

die Behauptung

$$\int_{-d_\gamma^+}^{-d_\gamma^-} \frac{\partial}{\partial y_1} G(y_1, a_\gamma) dy_1 = G_{0k-1}^{(\gamma)}.$$

Genauso folgt (4.53) aus

$$\begin{aligned}
\nu_1^{(\gamma)} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1}{r} \Big|_{y_2=a_\gamma} &= \frac{-\nu_1^{(\gamma)^2}}{r} + \frac{(\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)^2}{r} \\
&\quad - \frac{\nu_2^{(\gamma)} y_2 (\nu_2^{(\gamma)} y_2 - \nu_1^{(\gamma)} y_1)}{r^3}.
\end{aligned}$$

(4.54) rechnet man einfach nach. □

Mit diesen Linienintegralen können wir nun die gesuchten Flächenintegrale bestimmen.

Satz 4.12 *Es sei $\xi \notin \pi$. Im Falle $a_\gamma = 0$ setze man $D_{jk}^{(\gamma)} = 0$. Dann gilt*

a) $x_3 \neq 0$

$$D_{jk} = \frac{1}{x_3} \tilde{D}_{jk}, \quad \forall j, k \geq 0, \quad (4.55)$$

$$\tilde{T}_{00} = \frac{1}{3x_3} \left(D_{00} + \sum_{\gamma} a_\gamma D_{00}^{(\gamma)} \right), \quad (4.56)$$

$$\tilde{T}_{1k} = -\frac{x_3}{3} \sum_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} D_{0k}^{(\gamma)}, \quad k \geq 0, \quad (4.57)$$

$$\tilde{T}_{jk} = -\tilde{T}_{j-2,k+2} - x_3^2 \tilde{T}_{j-2,k} + \tilde{D}_{j-2,k}, \quad j \geq 2, k \geq 0, \quad (4.58)$$

b) $x_3 = 0$

$$D_{00} = -\sum_{\gamma} a_\gamma D_{00}^{(\gamma)}, \quad (4.59)$$

$$D_{10} = -\sum_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} E_{00}^{(\gamma)}, \quad (4.60)$$

$$D_{01} = -\sum_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} E_{00}^{(\gamma)} \quad \text{und} \quad (4.61)$$

$$D_{jk} = \frac{1}{j+k-1} \sum_{\gamma} a_\gamma D_{jk}^{(\gamma)}, \quad j+k \geq 2. \quad (4.62)$$

Beweis Es wird im wesentlichen wieder der Gaußsche Integralsatz angewendet:

$$(4.56) \quad G(y) = \left(\frac{y_1}{r^3}, \frac{y_2}{r^3} \right), \quad \operatorname{div} G(y) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x_3^2}{r^5},$$

$$(4.57) \quad G(y) = \left(\frac{y_2^k}{r^3}, 0 \right), \quad \operatorname{div} G(y) = -\frac{3y_1 y_2^k}{r^5},$$

$$(4.60) \quad G(y) = \left(\frac{1}{r}, 0 \right), \quad \operatorname{div} G(y) = -\frac{y_1}{r^3},$$

$$(4.61) \quad G(y) = \left(0, \frac{1}{r} \right), \quad \operatorname{div} G(y) = -\frac{y_2}{r^3} \quad \text{und}$$

$$(4.62) \quad G(y) = \left(\frac{y_1^{j+1} y_2^k}{r^3}, \frac{y_1^j y_2^{k+1}}{r^3} \right), \quad \operatorname{div} G(y) = (j+k-1) \frac{y_1^j y_2^k}{r^3}.$$

Gleichungen (4.55) und (4.58) sind klar. (4.59) folgt wie (4.56). \square

4.3.2 Helmholtzgleichung

Wir beginnen mit einer Herleitung analoger Formeln für das Einfachschichtpotential der Helmholtzgleichung. Dabei profitieren wir von einer Aufspaltung des Kerns in glatten und nicht-glatten Anteil. Anschließend weisen wir auf die Probleme hin, die diesbezüglich beim Ansatz von Brakhage-Werner [5] auftreten.

Einfachschichtpotential

Der Imaginärteil des Kerns $\Phi(x, y) = \exp(ikr)/(4\pi r)$ bereitet überhaupt keine Schwierigkeiten.

Satz 4.13 *Der Imaginärteil*

$$\Phi_{\Im}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(k \|x - y\|)}{\|x - y\|} \quad (4.63)$$

ist fortsetzbar zu einer auf \mathbb{R}^6 beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion.

Beweis Wir betrachten für festes $\xi = (x_2, x_3, y)$ mit $x_2 = y_2$ und $x_3 = y_3$ die Funktion

$$\tilde{\Phi}_{\Im}^{\xi}(x_1) := \Phi_{\Im}(x_1, \xi)$$

und stellen fest, daß für $x_1 \neq y_1$

$$\tilde{\Phi}_{\Im}^{\xi}(x_1)(x_1) = \frac{1}{4\pi} \left(k - \frac{k^3}{3!}(x_1 - y_1)^2 + \frac{k^5}{5!}(x_1 - y_1)^4 - + \dots \right)$$

gilt. Damit stimmt sie – bis auf $x_1 = y_1$ – mit einer reell-analytischen Funktion überein. Die Fortsetzung

$$\hat{\Phi}_{\Im}(x, y) := \begin{cases} \Phi_{\Im}(x, y) & \text{falls } x \neq y \\ k/4\pi & \text{sonst} \end{cases}$$

ist somit nach allen Variablen beliebig oft stetig differenzierbar und damit beliebig oft total differenzierbar. \square

Korollar 4.6 *Um die Konsistenzbedingung (3.1) für $\eta = 0$ zu erfüllen, sind somit abstrakte Kubaturformeln konstanten Exaktheitsgrades $\gamma \geq 1$ ausreichend.*

Beweis Folgt aus Satz 3.2. \square

Nun zum Realteil: Hier entwickeln wir wieder den trigonometrischen Zähler explizit,

$$\Phi_{\mathfrak{R}}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\|x - y\|} - \frac{k^2}{2!} \|x - y\| + \frac{k^4}{4!} \|x - y\|^3 - + \dots \right), \quad (4.64)$$

um zwischen einem singulären Anteil und einem glatteren Rest zu unterscheiden.

Satz 4.14 *Für den Restterm*

$$\Phi_{\mathfrak{R}}^{rest}(x, y) := \frac{1}{4\pi} \left(\frac{k^4}{4!} \|x - y\|^3 - \frac{k^6}{6!} \|x - y\|^5 + \frac{k^8}{8!} \|x - y\|^7 - + \dots \right)$$

gilt

$$\Phi_{\mathfrak{R}}^{rest}(x, y) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^6) \quad \text{und} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha(x, y)} \Phi_{\mathfrak{R}}^{rest}(x, y) \leq C \quad \text{für } |\alpha| = 3 \text{ und } x \neq y. \quad (4.66)$$

Beweis Daß die beiden Eigenschaften für die einzelnen Summanden gelten, rechnet man einfach nach. Dann sieht man, daß für alle $1 \leq |\alpha| \leq 3$ und $\|x - y\| \leq \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha x} \|x - y\|^i \right| \leq C, \quad x \neq y,$$

gleichmäßig bezüglich $i \geq 3$ gilt. Die Eigenschaft (4.65) folgt nun sukzessiv mit Hilfe von [12, Satz 21.5], denn für $|\alpha| \leq 2$ konvergiert

$$\sum_{i=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{k^{i+1}}{i+1!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha x} \|x - y\|^i$$

gleichmäßig auf $B_{\frac{1}{2}}(y)$ (Konvergenzkriterium von Weierstraß). Weicht man auf Kompakta $K_\epsilon = \overline{B_{\frac{1}{2}}(y)} \setminus B_\epsilon(y)$ aus, so folgt Aussage (4.66) analog, denn die Konstante C hängt nicht von $\epsilon > 0$ ab. Wie man sich leicht klar macht, reichte hier die Beschränkung auf die partiellen Ableitungen nach x . \square

Korollar 4.7 *Bei der Kubatur von $\Phi_{\mathfrak{R}}^{rest}(x, y)$ genügt der Exaktheitsgrad $\gamma = 1$ oder $\gamma = 2$.*

Der führende Summand in (4.64) entspricht gerade dem Einfachschichtpotential des Laplace-Operators, wofür bereits analytische Formeln entwickelt sind. Wir brauchen also nur noch analytische Formeln für den Summanden

$$\frac{1}{4\pi} \|x - y\|$$

zu bestimmen, um auch das Helmholtz-Einfachschichtpotential mit konstantem Aufwand berechnen zu können. Wir beginnen wieder mit den Linienintegralen. Es sei

$$L_{jk}^{(\gamma)} := \int_{\gamma} y_1^j y_2^k \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2} d\gamma \quad (4.67)$$

Lemma 4.10 *Es sei $a_{\gamma} \neq 0$. Dann gilt mit $L_{0-1}^{(\gamma)} = L_{-10}^{(\gamma)} = 0$*

$$L_{00}^{(\gamma)} = \frac{1}{8\pi} \left(d_{\gamma}^+ s_{\gamma}^+ - d_{\gamma}^- s_{\gamma}^- + e_{\gamma}^2 F_{00}^{(\gamma)} \right), \quad (4.68)$$

$$L_{0k}^{(\gamma)} = \frac{1}{k+1} \left((2k+1) a_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} L_{0,k-1}^{(\gamma)} - (k-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_1^{(\gamma)} \right)^2 \right) L_{0,k-2}^{(\gamma)} + \nu_1^{(\gamma)} G_{0,k-1}^{(\gamma)} \right), \quad k \geq 1, \quad (4.69)$$

$$L_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_{\gamma} L_{j-1,k}^{(\gamma)} - \nu_2^{(\gamma)} L_{j-1,k+1}^{(\gamma)} \right) / \nu_1^{(\gamma)}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0, \quad (4.70)$$

$$L_{j0}^{(\gamma)} = \frac{1}{j+1} \left((2j+1) a_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} L_{j-1,0}^{(\gamma)} - (j-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_2^{(\gamma)} \right)^2 \right) L_{j-2,0}^{(\gamma)} - \nu_2^{(\gamma)} G_{j-1,0}^{(\gamma)} \right), \quad j \geq 1 \quad \text{und} \quad (4.69')$$

$$L_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_{\gamma} L_{j,k-1}^{(\gamma)} - \nu_1^{(\gamma)} L_{j+1,k-1}^{(\gamma)} \right) / \nu_2^{(\gamma)}, \quad j \geq 0, \quad k \geq 1. \quad (4.70')$$

Im Falle $|\nu_1^{(\gamma)}| < |\nu_2^{(\gamma)}|$ wende man (4.69') und (4.70') anstelle der Formeln (4.69) und (4.70) an. Dabei gilt

$$G_{jk}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \left((x_{1,\gamma}^+)^j (x_{2,\gamma}^+)^k s_{\gamma}^{+3} - (x_{1,\gamma}^-)^j (x_{2,\gamma}^-)^k s_{\gamma}^{-3} \right).$$

Beweis Es gelte wieder $\sigma^{(\tilde{\gamma})} = -e_1$ und $a_{\tilde{\gamma}} = y_2$, falls $y \in \tilde{\gamma}$, mit der aus γ durch Drehung um den Ursprung hervorgegangenen Geraden $\tilde{\gamma}$.

von (4.68):

$$\begin{aligned} L_{00}^{(\gamma)} = L_{00}^{(\tilde{\gamma})} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2} ds(y) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(y_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2} + (y_2^2 + x_3^2) \log \left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2} \right) \right) \Big|_{y_1 = -d_{\tilde{\gamma}}^-}^{-d_{\tilde{\gamma}}^+} \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(d_{\tilde{\gamma}}^+ s_{\tilde{\gamma}}^+ - d_{\tilde{\gamma}}^- s_{\tilde{\gamma}}^- + e_{\tilde{\gamma}}^2 F_{00}^{(\tilde{\gamma})} \right). \end{aligned}$$

von (4.69): wie (4.39) und (4.52).

von (4.70): wie (4.40) und (4.54). □

Die entsprechenden Flächenintegrale

$$L_{jk} := \int_{\pi} y_1^j y_2^k \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2} ds(y)$$

lassen sich nun wieder rekursiv berechnen.

Satz 4.15 *Es sei $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_i \gamma_i$. Dann gilt mit $E_{0-1} := 0$*

$$L_{00} = \frac{1}{3} \left(x_3^2 E_{00} + \sum_{\gamma} a_{\gamma} L_{00}^{(\gamma)} \right), \quad (4.71)$$

$$L_{0k} = \frac{1}{k+3} \left\{ x_3^2 (1-k) L_{0,k-2} + \sum_{\gamma} \left(x_3^2 \nu_2^{(\gamma)} L_{0,k-1}^{(\gamma)} + a_{\gamma} L_{0k}^{(\gamma)} \right) \right\}, \quad k \geq 1 \quad \text{und} \quad (4.72)$$

$$L_{jk} = \frac{1}{j+k+3} \left(-x_3^2 (j-1) L_{j-2,k} + \sum_{\gamma} \left(x_3^2 \nu_1^{(\gamma)} L_{0k}^{(\gamma)} + a_{\gamma} L_{1k}^{(\gamma)} \right) \right), \quad k \geq 0, j \geq 1. \quad (4.73)$$

Beweis mit dem Gaußschen Integralsatz wie in Satz 4.11. □

Doppelschichtpotential

Wie bei der Potentialgleichung kann man auch bei der Helmholtz-Randwertaufgabe einen Doppelschichtpotentialansatz [15] betrachten, für dessen Kern

$$\frac{\partial}{\partial n(y)} \Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|^3} \left(ik\|x-y\|^2 - 1 \right) \langle n(y), y-x \rangle \quad (4.74)$$

gilt. Bekanntlich ist dieser Ansatz für bestimmte irreguläre Wellenzahlen k nicht mehr äquivalent zum ursprünglichen Außenraumproblem [14]. Brakhage und Werner [5] haben eine Linearkombination des Einfach- und des Doppelschichtpotentials vorgeschlagen. Dieser Ansatz vermeidet die Probleme des einfachen Doppelschichtpotentialansatzes, ohne auf dessen Vorteile zu verzichten, wie z. B. die gut konditionierten Systemmatrizen.

Entwickelt man die Exponentialfunktion in (4.74) explizit, so lassen sich die Terme der Gestalt

$$\|x-y\|, \|x-y\|^{-1} \quad \text{und} \quad \|x-y\|^{-3}$$

wieder auf den Raumwinkel sowie analytisch berechenbare Linienintegrale zurückführen. Die Terme mit ungeraden Exponenten $\alpha \geq 3$ sind genauso wie die Summanden mit geraden

Exponenten $\alpha \geq 0$ hinreichend glatt und in $\mathcal{O}(1)$ Operationen numerisch zu integrieren. Alleine der Summand

$$\Phi_{-2}(x, y) = \frac{1}{\|x - y\|^2}$$

entzieht sich einer effizienten Berechnung mit der hier vorgestellten Methode, denn der gerade Exponent verhindert eine Rückführung mit dem Gaußschen Integralsatz auf das Laplace-Doppelschichtpotential.

Zum Schluß wenden wir uns noch Systemen von Differentialgleichungen zu.

4.3.3 Lamé- und Stokes-Gleichungen

Wie beim Hypersingulären Operator im Fall der Potentialgleichung besteht bei den Lamé- und den Stokes-Gleichungen, die wegen ihrer großen Ähnlichkeit zusammen betrachtet werden, die Idee in der Faktorisierung des Kerns in einen polynomialen und einen singulären Anteil.

Einfachschichtpotential

Die Fundamentallösungen der beiden Gleichungen, der *Kelvinsche Fundamentaltensor* und das *Stokeslet*, sind nun Matrizen und lauten

$$\Phi_{Lamé}(x, y) = -\frac{\lambda + 3\mu}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\|x - y\|^{-1} Id + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \frac{(x - y)(x - y)^T}{\|x - y\|^3} \right) \quad (4.75)$$

und

$$\Phi_{Stokes}(x, y) = -\frac{1}{8\pi\nu} \left(\|x - y\|^{-1} Id + \frac{(x - y)(x - y)^T}{\|x - y\|^3} \right) \quad (4.76)$$

mit den Lamé-Konstanten λ und μ und der Viskosität ν . Hier ist Φ_{Stokes} die für uns interessante 3×3 -Untermatrix der eigentlichen 4×4 -Singularitätenmatrix $\tilde{\Phi}_{Stokes}$ [15].

Man sieht, daß die Koeffizienten in (4.75) und (4.76) im wesentlichen aus dem Laplace-Einfachschichtpotential E_{00} und den D_{jk} mit $0 \leq j + k \leq 2$ aus (4.48) bestehen, die bereits in Satz 4.12 für den Hypersingulären Operator der Potentialgleichung berechnet wurden. Wählt man stetige, stückweise lineare Ansatzfunktionen, so sind die E_{jk} für $0 \leq j + k \leq 1$ und die D_{jk} für $0 \leq j + k \leq 3$ auszuwerten.

Doppelschichtpotential

Die Doppelschichtpotentiale ergeben sich wie bei den skalaren Differentialgleichungen durch die Anwendung eines Randoperators γ_1 auf die jeweilige Fundamentallösung: Im Fall der Lamé-Gleichungen beispielsweise hat dieser *Normalspannungsoperator* die folgende Gestalt

$$\gamma_1^L u := \lambda (\operatorname{div} u) n(y) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \mu n \times \operatorname{rot} u.$$

An dieser Stelle wichtiger ist die spezielle Form dieser Doppelschichtpotentiale:

$$\begin{aligned} \gamma_{1,y}^L \Phi_{Lamé}(x,y) &= \frac{\mu^2}{4\pi(\lambda+2\mu)} \left(\frac{n(y)^T(x-y)}{\|x-y\|^3} Id \right. \\ &\quad + \frac{n(y)(x-y)^T - (x-y)n(y)^T}{\|x-y\|^3} \\ &\quad \left. + \frac{2(\lambda+\mu)}{\mu} \frac{n(y)^T(x-y)}{\|x-y\|^5} (x-y)(x-y)^T \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

und

$$\gamma_{1,y}^S \Phi_{Stokes}(x,y) = -\frac{3}{4\pi} \frac{n(y)^T(x-y)}{\|x-y\|^5} (x-y)(x-y)^T. \quad (4.78)$$

Diese beiden Potentiale bestehen koeffizientenweise wieder aus Größen, die wir bereits kennen: \tilde{D}_{00} , D_{jk} für $j+k \leq 1$ und \tilde{T}_{jk} für $j+k \leq 2$, siehe Satz 4.11 und Satz 4.12. Für stetige, stückweise lineare Ansatzfunktionen berechne man wieder entsprechend höhere Terme.

Hypersingulärer Operator

Wir beschränken uns hier auf die Darstellung des hypersingulären Lamé-Kerns

$$\begin{aligned} \gamma_{1,x}^L \gamma_{1,y}^L \Phi_{Lamé}(x,y) &= \frac{\mu^2}{4\pi(\lambda+2\mu)} \left\{ 2 \frac{\mu n(y)n(x)^T + (\lambda-\mu)n(x)n(y)^T}{\|x-y\|^3} \right. \\ &\quad + \left(2\mu \frac{n(y)^T n(x)}{\|x-y\|^3} + 3\lambda \frac{n(y)^T(x-y) \cdot n(x)^T(x-y)}{\|x-y\|^5} \right) Id \\ &\quad + 3 \frac{n(x)^T(x-y)}{\|x-y\|^5} (\lambda n(y)(x-y)^T + 2\mu(x-y)n(y)^T) \\ &\quad + 3 \frac{n(y)^T(x-y)}{\|x-y\|^5} (\lambda(x-y)n(x)^T + 2\mu n(x)(x-y)^T) \\ &\quad + 3 \left(\lambda \frac{n(y)^T n(x)}{\|x-y\|^5} - 10(\lambda+\mu) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{n(x)^T(x-y) \cdot n(y)^T(x-y)}{\|x-y\|^7} \right) \cdot (x-y)(x-y)^T \left. \right\}. \end{aligned}$$

Neben den alten Größen D_{jk} , \tilde{T}_{jk} benötigen wir jetzt zusätzlich

$$T_{jk} := \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \frac{y_1^j y_2^k}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{5}{2}}} dy_1 dy_2 \quad \text{und} \quad (4.79)$$

$$\tilde{V}_{jk} := x_3 \int_{\pi} \frac{y_1^j y_2^k}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{7}{2}}} dy_1 dy_2. \quad (4.80)$$

Dazu definieren und berechnen wir zunächst die Linienintegrale

$$T_{jk}^{(\gamma)} := \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{y_1^j y_2^k}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{5}{2}}} d\gamma. \quad (4.81)$$

Lemma 4.11 *Es gilt mit $T_{0-1}^{(\gamma)} = T_{-10}^{(\gamma)} = 0$ und $e_{\gamma} \neq 0$*

$$T_{00}^{(\gamma)} = \frac{1}{3e_{\gamma}^2} \left(2 \cdot D_{00}^{(\gamma)} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d_{\gamma}^+}{(s_{\gamma}^+)^3} - \frac{d_{\gamma}^-}{(s_{\gamma}^-)^3} \right) \right), \quad (4.82)$$

$$T_{0k}^{(\gamma)} = \frac{1}{k-4} \left((2k-5) a_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} T_{0,k-1}^{(\gamma)} - (k-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_1^{(\gamma)} \right)^2 \right) \times T_{0,k-2}^{(\gamma)} + \nu_1^{(\gamma)} G_{0,k-1}^{(\gamma)} \right), \quad 1 \leq k \neq 4, \quad (4.83)$$

$$T_{04}^{(\gamma)} = \nu_2^{(\gamma)} a_{\gamma} T_{03}^{(\gamma)} + \nu_1^{(\gamma)^2} D_{02}^{(\gamma)} - \frac{\nu_1^{(\gamma)}}{3} G_{03}^{(\gamma)}, \quad (4.84)$$

$$T_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_{\gamma} T_{j-1,k}^{(\gamma)} - \nu_2^{(\gamma)} T_{j-1,k+1}^{(\gamma)} \right) / \nu_1^{(\gamma)}, \quad j \geq 1, k \geq 0, \quad (4.85)$$

$$T_{j0}^{(\gamma)} = \frac{1}{j-4} \left((2j-5) a_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} T_{j-1,0}^{(\gamma)} - (j-1) \left(a_{\gamma}^2 + \left(x_3 \nu_2^{(\gamma)} \right)^2 \right) \times T_{j-2,0}^{(\gamma)} - \nu_2^{(\gamma)} G_{j-1,0}^{(\gamma)} \right), \quad 1 \leq j \neq 4, \quad (4.83')$$

$$T_{40}^{(\gamma)} = \nu_1^{(\gamma)} a_{\gamma} T_{30}^{(\gamma)} + \nu_2^{(\gamma)^2} D_{20}^{(\gamma)} + \frac{\nu_2^{(\gamma)}}{3} G_{30}^{(\gamma)}, \quad (4.84')$$

$$T_{jk}^{(\gamma)} = \left(a_{\gamma} T_{j,k-1}^{(\gamma)} - \nu_1^{(\gamma)} T_{j+1,k-1}^{(\gamma)} \right) / \nu_2^{(\gamma)}, \quad j \geq 0, k \geq 1. \quad (4.85')$$

Im Falle $|\nu_1^{(\gamma)}| < |\nu_2^{(\gamma)}|$ wende man (4.83'), (4.84') und (4.85') an. Die Hilfsgrößen $G_{jk}^{(\gamma)}$ lauten hier

$$G_{jk}^{(\gamma)} = \frac{1}{4\pi} \left((x_{1,\gamma}^+)^j (x_{2,\gamma}^+)^k / (s_{\gamma}^+)^3 - (x_{1,\gamma}^-)^j (x_{2,\gamma}^-)^k / (s_{\gamma}^-)^3 \right).$$

Es bezeichne $x_{i,\gamma}^{\pm}$ wieder die i -te Komponente des Punktes $x_{\gamma}^{\pm} \in \mathbb{R}^2$.

Beweis Wir beschränken uns auf den Beweis von (4.82). Es liege $\tilde{\gamma}$ wieder parallel zur x_1 -Achse, so daß $\sigma^{(\tilde{\gamma})} = -e_1 = (-1, 0)^T$ und $a_{\tilde{\gamma}} = y_2$, falls $y \in \tilde{\gamma}$, gelten.

$$\begin{aligned} T_{00}^{(\gamma)} &= T_{00}^{(\tilde{\gamma})} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{5}{2}}} ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot 3} \frac{1}{(y_2^2 + x_3^2)} \left(\frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{y_2^2 + x_3^2} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x_3^2}} \right) \Bigg|_{y_1=-d_{\tilde{\gamma}}^+}^{-d_{\tilde{\gamma}}^-} \\ &= \frac{1}{3e_{\tilde{\gamma}}^2} \left(2 \cdot D_{00}^{(\tilde{\gamma})} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d_{\tilde{\gamma}}^+}{(s_{\tilde{\gamma}}^+)^3} - \frac{d_{\tilde{\gamma}}^-}{(s_{\tilde{\gamma}}^-)^3} \right) \right). \end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen folgen genauso wie die entsprechenden Aussagen der letzten Unterabschnitte. \square

Mit Hilfe dieser Linienintegrale geben wir die Formeln für die Flächenintegrale (4.79) und (4.80) nur an; der Beweis erfolgt wieder mit dem Gaußschen Integralsatz.

Satz 4.16 *Es sei $\xi \notin \pi$. Mit $T_{jk}^{(\gamma)} = 0$, falls $a_\gamma = 0$, gilt*

a) $x_3 \neq 0$

$$\begin{aligned} T_{jk} &= \frac{1}{x_3} \tilde{T}_{jk}, \quad \forall j, k \geq 0, \\ \tilde{V}_{00} &= \frac{1}{5x_3} \left(3T_{00} + \sum_{\gamma} a_{\gamma} T_{00}^{(\gamma)} \right), \\ \tilde{V}_{1k} &= -\frac{x_3}{5} \sum_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} T_{0k}^{(\gamma)}, \quad k \geq 0, \\ \tilde{V}_{jk} &= -\tilde{V}_{j-2,k+2} - x_3^2 \tilde{V}_{j-2,k} + \tilde{T}_{j-2,k}, \quad j \geq 2, k \geq 0, \end{aligned}$$

b) $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\frac{1}{3} \sum_{\gamma} a_{\gamma} T_{00}^{(\gamma)}, \\ T_{30} &= \frac{1}{3} \cdot \left(2D_{10} - \sum_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} D_{20}^{(\gamma)} \right), \\ T_{21} &= -\frac{1}{3} \sum_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} D_{20}^{(\gamma)}, \\ T_{03} &= \frac{1}{3} \cdot \left(2D_{01} - \sum_{\gamma} \nu_2^{(\gamma)} D_{02}^{(\gamma)} \right), \\ T_{12} &= -\frac{1}{3} \sum_{\gamma} \nu_1^{(\gamma)} D_{02}^{(\gamma)} \quad \text{und} \\ T_{jk} &= \frac{1}{j+k-3} \sum_{\gamma} a_{\gamma} T_{jk}^{(\gamma)}, \quad j+k \neq 3. \end{aligned}$$

4.3.4 Eingliederung in das Galerkinverfahren

Fast singuläres Nahfeld

Im letzten Kapitel und in den ersten Abschnitten dieses Kapitels erfolgte die Kubatur über Dreieck-Paare mittels Produktquadratur und verschiedener zweidimensionaler Faktoren. So genügten, falls $\text{dist}(\pi_x, \pi_y) \geq C$ galt, bezüglich jedes Dreiecks abstrakte Kubaturformeln mit konstantem Exaktheitsgrad, während sich im fast singulären Nahfeld

zweidimensionale Gauß-Legendre-Tensorprodukte als unentbehrlich erwiesen haben. Diese wurden dann durch die Variierende Tensorproduktquadratur ersetzt, was eine bessere Konstante in der Aufwandsabschätzung zur Folge hatte. Aber auch diese Weiterentwicklung verhinderte nicht, daß der Quadraturgrad in jeder Dimension logarithmisch im Abstand δ und der Maschenweite h angehoben werden mußte. Damit ergab sich ein Aufwand von $\mathcal{O}(\log^4 N)$ Operationen für jedes Doppelintegral über $\pi_x \times \pi_y$ und ein Gesamtaufwand für die Nahfeldassemblierung (Definition 3.2) von $\mathcal{O}(N \log^4 N)$ Operationen.

Es liegt also nahe, im fast singulären Nahfeld einen der beiden zweidimensionalen Faktoren durch die analytische Punkt-gegen-Dreieck-Integration aus den letzten Paragraphen zu ersetzen.

Definition 4.4 (Raumwinkelansatz) *Es seien ξ_ν und ω_ν die Stützstellen bzw. Gewichte einer beliebigen Kubaturformel Q_{π_x} über π_x und Φ der Kern bzw. der singuläre Anteil des Kerns, falls die Helmholtz-Gleichung betrachtet wird. Mit $A_\Phi(x, \pi_y, \varphi)$ aus (4.31) verstehen wir im fast singulären Nahfeld unter dem Raumwinkelansatz die Eingliederung*

$$\begin{aligned} \int_{\pi_x} \int_{\pi_y} \Phi(x, y) \varphi(y) \psi(x) ds(y) ds(x) &= \int_{\pi_x} A_\Phi(x, \pi_y, \varphi) \psi(x) ds(x) \\ &\approx \sum_{\nu} \omega_\nu A_\Phi(\xi_\nu, \pi_y, \varphi) \psi(\xi_\nu). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Satz 4.17 *Q_{π_x} bezeichne die Gauß-Produktquadratur (Def. 4.1) oder die Variierende Tensorproduktquadratur (Def. 4.2). Dann führen die in (4.14) bzw. (4.27) und (4.28) angegebenen Quadraturgrade wieder zur Erfüllung der Konsistenzbedingung (3.1).*

Beweis Der analytische Faktor integriert – von Rundungsfehlern abgesehen – exakt. Also folgt die Aussage mit der Aufspaltung (4.2). \square

Bemerkung Damit beträgt der Aufwand zur Berechnung des Regulären Nahfeldes nur noch $\mathcal{O}(N \log^2 N)$.

Gemeinsame Ecke

Es ist ersichtlich, daß ein naives Eingliedern wie eben beschrieben im Fall der gemeinsamen Ecke nicht mehr möglich ist. Bei schwach singulärem Φ ist $A_\Phi(x, \pi_y, \varphi)$ zwar in einer Umgebung von $\partial\pi_y$ beschränkt, aber nicht differenzierbar, was die Anwendung von Kubaturverfahren auf $A_\Phi(x, \pi_y, \varphi)$ in π_x verbietet. Bei Cauchy- oder hypersingulärem Kern ist dieses parameterabhängige Integral nicht einmal mehr beschränkt (siehe [21]). Kombiniert man die analytischen Formeln allerdings mit der Regularisierung aus Unterabschnitt 4.1.2, so ist es möglich, den Aufwand auf $\mathcal{O}(\log N)$ zu senken.

Zuerst bemerken wir, daß sogar der hypersinguläre Kern, für den

$$\Phi(x, y) \leq C \|x - y\|^{-3}$$

gilt, über die Punktsingularität, wie sie in dem hier betrachteten Fall auftritt, Lebesgue-integrierbar ist und wir wie vorhin im regulären Fall keine anderen Integrationsbegriffe wie Cauchy-Hauptwert oder part-fini-Integral heranziehen müssen. Der Integrand wird nun regulärisiert, indem für festes $x \in \pi_x$ bezüglich y nicht mehr über das komplette zweite Dreieck π_y , sondern nur noch über ein Teildreieck $\pi_y^x \subset \pi_y$ integriert wird und ergänzend dazu für festes $y \in \pi_y$ bezüglich x nur über ein Teildreieck $\pi_x^y \subset \pi_x$. Das entspricht der Aufteilung des Integrationsgebiets in die Teilgebiete D_1 und D_2 wie in [23] beschrieben. Die alternative Sichtweise ermöglicht uns allerdings die Anwendung der Raumwinkelformeln auf die Teildreiecke. Trotzdem werden wir mit Hilfe der Duffy-Transformationen die Gebiete D_i ($i = 1, 2$) zuerst »aufklappen«, um den sich daraus ergebenden Integranden bezüglich ω elementar integrieren zu können. Denn wir hatten bereits gesehen, daß die besagten Transformationen nicht nur regularisieren, sondern auch eine Trennung der Variablen mit polynomialem Faktor in ω bewirken.

Zuerst zum Teilgebiet D_1 : Es seien Δ_x^h und Δ_y^h wie in 4.1.2 und

$$\Delta_y^\omega := \{\hat{y} \in \Delta_y^h : \hat{y}_1 \geq -\omega\},$$

wobei $\omega \in [0, h]$ gelte. Mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \chi_x : [0, h] \times [0, 1] &\rightarrow \Delta_x \quad , \quad \chi_x(\omega, \eta_2) := \begin{pmatrix} \omega \\ \eta_2 \omega \end{pmatrix} \\ \text{und } \chi_y^\omega : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \Delta_y^\omega \quad , \quad \chi_y^\omega(\eta_1, \eta_3) := \begin{pmatrix} -\eta_1 \omega \\ -\eta_3 \eta_1 \omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

schreibt sich der erste Integrand in (4.21) wie folgt

$$\Phi^{loc}(\hat{x}^{(1)}, \hat{y}^{(1)}) H_{loc}(\hat{x}^{(1)}, \hat{y}^{(1)}) = \omega \cdot (\eta_1 \omega^2) \Phi(\tau_x \circ \chi_x, \tau_y \circ \chi_y) \varphi_i(\tau_x \circ \chi_x) \varphi_j(\tau_y \circ \chi_y) g_{\pi_x} g_{\pi_y}.$$

Wir setzen

$$f(\omega, \eta) := \Phi(\tau_x \circ \chi_x, \tau_y \circ \chi_y^\omega) \varphi_j(\tau_y \circ \chi_y^\omega) g_{\pi_y}$$

und sehen, daß

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{D_1} \omega^3 \eta_1 \Phi^{loc}(\hat{x}^{(1)}, \hat{y}^{(1)}) H_{loc}(\hat{x}^{(1)}, \hat{y}^{(1)}) d\eta d\omega \\ &= \int_0^h \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_0^1 f(\omega, \eta) \omega^2 \eta_1 d\eta_3 d\eta_1 \right) \varphi_i(\tau_x \circ \chi_x) g_{\pi_x} \omega d\eta_2 d\omega \quad (4.87) \\ &= \int_0^h \int_0^1 \left(\int_{\pi_y^x} \Phi(\tau_x \circ \chi_x(\omega, \eta_2), y) \varphi_j(y) ds(y) \right) \varphi_i(\tau_y \circ \chi_y) g_{\pi_y} \omega d\eta_2 d\omega \end{aligned}$$

mit $x = \tau_x \circ \chi_x(\omega, \eta_2)$ gilt. Außerdem ist $\pi_y^x := \tau_y(\Delta_y^\omega)$ eines der oben erwähnten Teildreiecke. Für das innere Integral gilt

$$A_\Phi(\tau_x \circ \chi_x(\omega, \eta_2), \pi_y^x, \varphi_j) = \int_{\pi_y^x} \Phi(\tau_x \circ \chi_x(\omega, \eta_2), y) \varphi_j(y) ds(y).$$

und an dieser Stelle wäre bereits eine Eingliederung möglich.

Wir können annehmen, daß die Basisfunktionen φ_i und φ_j Monome in den lokalen Koordinaten \hat{x} und \hat{y} sind. Somit zerfällt $\varphi_i \circ \tau_x \circ \chi_x$ in ein Produkt

$$\varphi_i \circ \tau_x \circ \chi_x(\omega, \eta_2) = \omega^a \cdot \tilde{\varphi}_i(\eta_2)$$

mit $a \geq 0$ und $\tilde{\varphi}_i(\eta_2) := \varphi_i \circ \tau_x \circ \chi_x(1, \eta_2)$. Desweiteren gilt für ein $b \geq -3$

$$f(\omega, \eta) = \omega^b \cdot f(1, \eta).$$

Also formen wir (4.87) weiter um:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_0^1 f(\omega, \eta) \omega^2 \eta_1 d\eta_3 d\eta_1 \right) \varphi_i \circ \tau_x \circ \chi_x(\omega, \eta_2) \omega g_{\pi_x} d\eta_2 d\omega \\ &= \int_0^h \omega^{a+b+3} d\omega \cdot \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_0^1 f(1, \eta) \eta_1 d\eta_1 d\eta_3 \right) \tilde{\varphi}_i(\eta_2) g_{\pi_x} d\eta_2 \\ &= \int_0^h \omega^{a+b+3} d\omega \cdot \int_0^1 \left(\int_{\pi_y} \Phi(\tau_x \circ \chi_x(1, \eta_2), y) \varphi_j(y) ds(y) \right) \tilde{\varphi}_i(\eta_2) g_{\pi_x} d\eta_2 \\ &= \frac{h^{a+b+4}}{a+b+4} \cdot \int_0^1 A_{\Phi}(\tau_x \circ \chi_x(1, \eta_2), \pi_y, \varphi_j) \tilde{\varphi}_i(\eta_2) g_{\pi_x} d\eta_2. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Bei der Integration über D_2 geht man analog vor. Es sei $\Delta_x^\omega := \{\hat{x} \in \Delta_x^h : \hat{x}_1 \leq \omega\}$, die regularisierenden Transformationen lauten jetzt

$$\begin{aligned} \chi_x^\omega : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \Delta_x^\omega, \quad \chi_x^\omega(\eta_1, \eta_3) := \begin{pmatrix} \eta_1 \omega \\ \eta_3 \eta_1 \omega \end{pmatrix} \\ \text{und } \chi_y : [0, h] \times [0, 1] &\rightarrow \Delta_y^h, \quad \chi_y(\omega, \eta_1) := \begin{pmatrix} -\omega \\ -\eta_2 \omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wie oben

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{D_2} \omega^3 \eta_1 \Phi^{loc}(\hat{x}^{(2)}, \hat{y}^{(2)}) H_{loc}(\hat{x}^{(2)}, \hat{y}^{(2)}) d\eta d\omega \\ &= \frac{h^{a+b+4}}{a+b+4} \cdot \int_0^1 A_{\Phi}(\tau_y \circ \chi_y(1, \eta_2), \pi_x, \varphi_i) \tilde{\varphi}_j(\eta_2) g_{\pi_y} d\eta_2. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Definition 4.5 (Raumwinkelansatz bei gemeinsamer Ecke) *Unter dem Raumwinkelansatz verstehen wir jetzt die Eingliederung der Formeln in (4.88) und (4.89). Man beachte, daß $x = \tau_x \circ \chi_x(1, \eta_2) \notin \pi_y$ bzw. $x = \tau_y \circ \chi_y(1, \eta_2) \notin \pi_x$ gilt. Im Helmholtz-Fall bedeutet das wieder eine Beschränkung auf die zwei führenden Summanden des Realteils.*

Satz 4.18 *Wählt man die Gauß-Legendre-Quadraturformeln G^n für die Quadratur bezüglich η_2 , dann führen die in (4.23) angegebenen Quadraturgrade zur Erfüllung der Konsistenzbedingung (3.1).*

Beweis Der analytische Faktor integriert wieder exakt. \square

Bemerkung Der Aufwand zur Berechnung eines Doppelintegrals bei gemeinsamer Ecke beträgt damit nur noch $\mathcal{O}(\log N)$. Die Gesamtheit der Kubaturen über Dreieck-Paare dieser zweitwichtigsten Kategorie erfordert folglich $\mathcal{O}(N \log N)$ Operationen.

4.3.5 Interpolation im Raumwinkelansatz

Die Formeln zur exakten Integration beinhalten neben den elementaren Operationen (+, −, * und /) auch nicht-elementare wie die Wurzel, den Logarithmus »log« sowie die Argumentfunktion »arg«, die abhängig von ihrer Implementierung ein Vielfaches der Rechenzeit einer elementaren Operation beanspruchen. Wir wissen, daß der Fehler einer Produktkubatur im wesentlichen vom größten der einzelnen Faktoren abhängt. In unserer Situation, in der über niederdimensionale Querschnitte exakt integriert wird, ist der Gesamtfehler sogar gleich dem Fehler eines einzelnen Faktors, nämlich gleich dem Fehler der Kubaturen Q_{π_x} bzw. Q_n . Somit wollen wir auch in Bezug auf den Raumwinkel-Faktor einen wohl dosierten Fehler zulassen – in der Hoffnung, daß die Approximation effizienter ist als die exakte Auswertung. Dazu sollen die gesuchten Werte obiger nicht-elementarer Operationen aus vorab berechneten mittels Interpolation gewonnen werden.

Das Polynom $p \in P_n$ interpoliere die Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ in $x_0 \dots x_n \subset I_{loc} = [x_0, x_n]$. Außerdem sei $h_i := |x_n - x_0|$. Für den Interpolationsfehler gilt dann (siehe [19])

$$\|f(x) - p(x)\|_\infty \leq C h_i^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty. \quad (4.90)$$

Man kann nun zu festem n den Interpolationsparameter h_i dem Diskretisierungsparameter h zur Einhaltung der Konsistenzbedingung anpassen. Dazu würde das ursprüngliche Intervall $I = [a, b]$ in disjunkte Subintervalle I'_{loc} der Länge h_i unterteilt, in denen dann die lokale Interpolation stattfände. Dem konstanten Rechenaufwand stünde dann ein steigender Speicherbedarf für $h \rightarrow 0$ gegenüber. Wir wollen an dieser Stelle einige Ideen vorstellen, ohne sie auszuführen. Erste Versuche haben gezeigt, daß der Speicherzugriff ganz entscheidenden Einfluß auf die Effizienz hat.

Die Wurzel

Zur Bestimmung von s_γ^\pm in (4.33) wird mit kleiner werdender Maschenweite $h \rightarrow 0$ auf

$$0 < x = e_\gamma^2 + d_\gamma^{\pm 2} \leq c_1 h$$

die Wurzel $f(x) = \sqrt{x}$ angewandt. Nun ist diese aber in $x = 0$ nicht differenzierbar und eine direkte Interpolation ist obiger Abschätzung zufolge nicht ratsam. Dagegen ist f im Intervall $I = [1, 4]$ glatt. Darum tabellieren wir genügend Werte der Wurzel in I und transformieren x .

Es sei $\alpha \in \{2, 4, 8, 16 \dots\}$, so daß $\alpha^2 \cdot x \in I = [1, 4]$ gilt. Dann stellt

$$\tilde{f}(x) := \frac{p(\alpha^2 \cdot x)}{\alpha} \approx f(x)$$

eine geeignete Approximation an f in $[0, 1]$ dar, falls p eine gute an f in I ist.

Der Logarithmus

Im Gegensatz zur Wurzelfunktion wird der Logarithmus

$$f(x) = \log(x)$$

in Lemma 4.8 ausschließlich auf reelle Zahlen $x > 1$ angewandt, was aus der Tatsache folgt, daß die Linienintegrale $E_{00}^{(\gamma)}$ positiv sind. Damit bereitet die Singularität in 0 keine Probleme. Wir tabellieren jetzt im Intervall $I = [1, e]$ und wenden für $x > e$ das Additionstheorem in folgender Weise an

$$\tilde{f}(x) := p\left(\frac{x}{e^\alpha}\right) + \alpha \approx f(x),$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0$ so gewählt werde, daß $\frac{x}{e^\alpha} \in I$ gilt.

Die Argumentfunktion

Die numerische Auswertung der Argumentfunktion mit Wertebereich $(-\pi, \pi]$ greift auf den reellen Arcuscosinus zurück. So gilt für $z = z_1 + i z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(z_1/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) & \text{falls } z_2 \geq 0 \\ -\arccos\left(z_1/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Leider ist der Arcuscosinus in $z_1/\sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \pm 1$ nicht differenzierbar. Mit Hilfe von Symmetrieargumenten läßt sich dieser aber auf das Intervall $I = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ mit Werten in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ zurückführen. Es gilt nämlich für $-1 \leq t \leq 0$

$$\arccos(t) = \pi - \arccos(-t)$$

und für $\tilde{z} \in S^2$ mit $\tilde{z}_1 \geq \tilde{z}_2 \geq 0$

$$\arccos(\tilde{z}_1) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\tilde{z}_2).$$

Wir können also $z_2 \geq z_1 \geq 0$ annehmen. Mit $s := \frac{z_1}{z_2} \in [0, 1]$ gilt dann (siehe Abbildung 4.5)

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right).$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß wir

$$f(s) := \arccos\left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$$

als Funktion einer Veränderlichen effektiver interpolieren können.

Abschließend gehen wir noch der Frage nach, inwiefern der Singularität angepaßte Kubaturverfahren eingesetzt werden können. Wir beschränken uns dabei auf schwach singuläre Kerne, da die Probleme bereits hier auftreten.

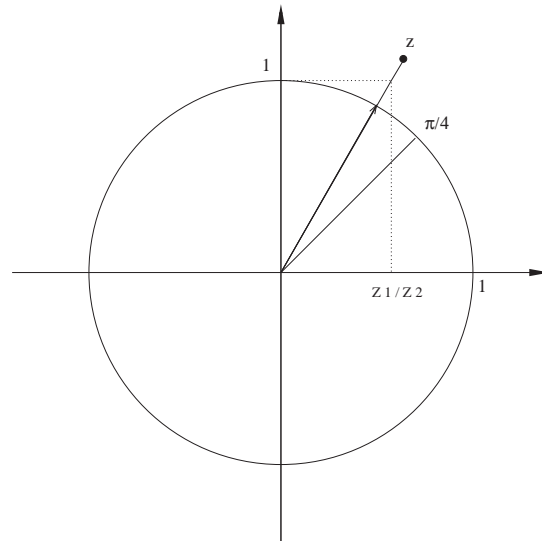


Abbildung 4.5: Interpolation von arccos

4.4 Die Singularität als Gewichtsfunktion

Das schwach singuläre Verhalten des Kerns erzwingt bei feiner Triangulierung \mathcal{T}_h im Nahfeld große Quadraturgrade. Im folgenden soll untersucht werden, ob es ein Maß μ gibt, bezüglich dem der Kern günstigere Eigenschaften annimmt. Ist der Integrand beispielsweise das Produkt aus einer hinreichend glatten Funktion f und einer schwach singulären Gewichtsfunktion $w \in L^1(\lambda)$, dann ist mit $\mu(x) := w(x) \lambda$ ein solches Maß gefunden:

$$\int f(x) w(x) dx = \int f(x) d\mu(x). \quad (4.91)$$

λ bezeichne hier das Lebesgue-Maß. Die aufwendige Konstruktion μ -angepaßter Quadraturverfahren würde einmalig erfolgen und die Glattheit von f schnelle Kubaturen ermöglichen. Zunächst wenden wir uns allgemeinen Gauß-Quadraturformeln zu. Folgendes einfaches Beispiel mit dem schwach singulären Kern $w(x) := |x_1 - x_2|^{-1/2}$ und $\pi = [0, 1]$ motiviere das Vorgehen. Wir zerlegen zuerst das Integrationsgebiet

$$\int_{\pi} \int_{\pi} f(x) w(x) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^{x_1} f(x) w(x) dx_2 dx_1 + \int_0^1 \int_{x_1}^1 f(x) w(x) dx_2 dx_1,$$

um die beiden Teilgebiete wie folgt zu transformieren

$$\int_0^1 \int_0^{x_1} f(x) w(x) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \xi\eta) \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\eta}} d\xi d\eta.$$

Die Duffy-Transformation dient hier der Charakterisierung des singulären Verhaltens des Kerns bezüglich *einer* Koordinate: Der Integrand ist genau dann singulär, wenn $\eta = 1$ gilt.

Das gesuchte Maß ist daher das Produkt aus $\mu_1 = \sqrt{\xi} \lambda$ und $\mu_2 = (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} \lambda$,

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2,$$

so daß die entsprechenden Formeln vom Gauß-Typ innerhalb eines Tensorproduktansatzes angewendet werden können [9, 2.7]. Die Konstruktion dieser erfolgt genauso wie die der Gauß-Legendre-Formeln – unter der Berücksichtigung, daß das Maß μ_1 bzw. μ_2 an die Stelle von λ rückt. Wie wichtig allerdings die Charakterisierung der Singularität bezüglich einer Koordinate ist, tritt beim Übergang zu zweidimensionalen Flächen zutage: Die Dimension des Gebiets $d_G = 4$ ist um zwei größer als die der Singularität $d_S = 2$. Die Fixierung der Singularität mit Relativkoordinaten ermöglicht daher nur eine Charakterisierung dieser durch $d_G - d_S = 2$ Koordinaten. So hat der Integrand möglicherweise die Form

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$$

und ist genau dann singulär, wenn $z_1 = z_2 = 0$ gilt. Die Suche nach integrierbaren Gewichtsfunktionen der Form

$$g(z) = g_1(z_1) g_2(z_2),$$

die die Singularität auflösen, ist offensichtlich vergebens.

Eine Alternative stellt die mehrdimensionale Interpolationskubatur dar. Diese sichert zwar keine exponentielle Konvergenz im Kubaturgrad wie die Gauß-Formeln, aber Satz 3.2 hat (bezüglich des Lebesgue-Maßes) gezeigt, daß unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen an den Integranden ein konstanter Exaktheitsgrad genügt, um die geforderte Konsistenzordnung der Sesquilinearform zu erfüllen. Dieser Satz läßt sich mit leichten Modifikationen auf Maße der Form $\mu(x) = w(x) \lambda$ übertragen. Damit wäre ein Verfahren mit optimalem Aufwand $\mathcal{O}(N)$ gefunden, aber ...

Satz 4.19 *Es gibt kein Maß $\mu = w(x) \lambda$, das eine Zerlegung (4.91) ermöglicht, so daß $f \in \mathcal{C}^1$ und $D^1 f$ gleichmäßig in h beschränkt ist.*

Wir verzichten hier auf einen kompletten Beweis mit unergiebigem Details. Letztendlich scheitert die Zerlegung daran, daß man sich auf eine Referenz-Gewichtsfunktion beziehen muß. Der abgespaltene Faktor in

$$\frac{1}{z_1^2 + c z_2^2} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 + c z_2^2} \cdot \frac{1}{z_1^2 + z_2^2}$$

ist nur für $c = 1$ differenzierbar. Genau solche Fälle treten ein, wenn man bezüglich eines Dreieckpaares eine Gewichtsfunktion gewählt hat und anschließend eines der Dreiecke bewegt.

Kapitel 5

Implementierungsdetails

Wir geben Implementierungshinweise bezüglich der zwei wesentlichen Verfahren.

5.1 Variierende Tensorproduktquadratur

Es wird angenommen, daß in einem Vor-Prozeß die Länge der kürzesten Seite $|c|$ berechnet und gespeichert und die Karte (4.29) folgend gewählt wurde. Desweiteren nehmen wir ebene Dreiecke an, obwohl dieses Verfahren nicht auf solche beschränkt ist. Nachdem n_1 und n_3 in (4.27) bestimmt sind, können wir mit Hilfe der zugehörigen Stützstellen u_i^ν ($1 \leq \nu \leq n_i$, $i = 1, 3$) die Längen $h_{u_1} \leq h_x$ und $h_{u_3} \leq h_x$ der Linien

$$\begin{aligned} s_{u_1} &:= \{x = \tau_x \circ \tilde{D}(u_1, u_2) : u_2 \in [-1, 1]\} \subset \pi_x \\ \text{und } s_{u_3} &:= \{x = \tau_y \circ \tilde{D}(u_3, u_4) : u_4 \in [-1, 1]\} \subset \pi_y \end{aligned}$$

bestimmen. Dazu sind jeweils nur eine Multiplikation der auf $[0, 1]$ transformierten Stützstellen mit $|c|$ notwendig. Anschließend werden in (4.28) die $n_i(u_{i-1}^\nu)$ für alle $1 \leq \nu \leq n_i$ und $i = 2, 4$ bestimmt. Es ist von Vorteil, in (4.27) und (4.28) für jedes Doppelintegral $\log(\delta^d)$ nur einmalig auszurechnen. Das gleiche gilt für $\log h$, allerdings in Bezug auf die gesamte Simulation, schließlich steht der Diskretisierungsparameter h bereits am Anfang der Rechnung fest.

5.2 Raumwinkelansatz

Im Abschnitt 4.3 hatten wir gewisse Annahmen an die Lage des Dreiecks π und des Punktes ξ im \mathbb{R}^3 gemacht. Wir wollen kurz erläutern, wie die Transformationen, die die dort beschriebene Ausgangssituation schaffen, effizient durchgeführt werden können. Vorher machen wir noch folgende Annahmen:

- Im Vor-Prozeß wurden die äußeren Normalenvektoren \vec{n}_{π_i} an π_i bestimmt.
- Vom Außenraum betrachtet sind die Punkte der Dreiecke im Gegenuhrzeigersinn angeordnet.

```

p_0, p_1, p_2 Eckpunkte von pi_i
function Trans_A(pi_i){
    p_tilde_0 = p_0; p_2 = p_2 - p_0; p_1 = p_1 - p_0; p_0 = 0;
    E_0 = p_1 / ||p_1||_2;
    E_1 = n_tilde_pi_i x E_0;
    E_2 = n_tilde_pi_i;
    p_1 = (||p_1||_2, 0, 0)^T;
    p_2 = (<E_0, p_2>, <E_1, p_2>, <E_2, p_2>)^T;
    Berechne sigma^(gamma) fuer alle Seiten gamma
    nu^(gamma) = (sigma_2^(gamma), -sigma_1^(gamma))^T;
}

```

Abbildung 5.1: Trans_A

Bei der Matrixassemblierung werden in einer äußeren Schleife über alle Dreiecke π_i die Nahfelder $\mathcal{N}_h(\pi_i)$ sukzessive berechnet. Dazu wird in einer Routine **Trans_A** die affin-lineare Abbildung T_i bestimmt, die π_i dann abstandstreu in die x_1 - x_2 -Ebene transformiert. Außerdem werden in **Trans_A** noch die neuen Tangential- und Normalenvektoren $\sigma^{(\gamma)} \in \mathbb{R}^2$ und $\nu^{(\gamma)} \in \mathbb{R}^2$ von $T_i(\pi_i)$ bestimmt.

Beim Durchlaufen des Nahfeldes $\mathcal{N}_h(\pi_i)$ bestimmt dann eine zweite Routine das Bild $T_i(\pi_j)$ jedes Dreiecks aus $\mathcal{N}_h(\pi_i)$, das mit π_i höchstens eine Ecke gemeinsam hat, um erst daraufhin die Stützstellen $\xi_\nu \in T_i(\pi_j)$ der Kubaturformeln Q_π bzw. Q_n aus 4.3.4 zu berechnen. Das hat den Vorteil, daß für hohe Kubaturgrade nicht entsprechend oft die Transformation T_i auf zu früh berechnete $\tilde{\xi}_\nu \in \pi_j$ angewendet werden muß. Um jetzt A_Φ aus (4.31) berechnen zu können, muß schließlich noch die Translation

$$\Xi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x - \xi_{\nu,1} \\ y - \xi_{\nu,2} \\ z \end{pmatrix}$$

auf π_i und ξ_ν ausgeübt werden. Glücklicherweise sind die bereits berechneten Größen $\sigma^{(\gamma)}$ und $\nu^{(\gamma)}$ invariant unter Ξ . Damit ist die gewünschte Ausgangssituation hergestellt. Bei gemeinsamer Ecke wird nur der Anteil (4.88) oder (4.89) berechnet, für den über π_i per Raumwinkelformel integriert wird. Der (additiv) komplementäre Anteil wird im Rahmen der Assemblierung von $\mathcal{N}_h(\pi_j)$ bestimmt, wenn $T_j(\pi_j)$ in jener Ebene liegt.

Kapitel 6

Numerische Vergleiche

Wir wollen in diesem Kapitel die Laufzeiten der verschiedenen Verfahren messen. Dazu betrachten wir die Nahfeld-Assemblierung, wie sie zur Lösung der Helmholtzgleichung im Einheitswürfel mit Hilfe des Einfachschichtpotentialansatzes durchgeführt werden muß, falls das Panel-Clustering-Verfahren zur Kompression eingesetzt wird. Diesbezüglich bestimmt ein Parameter $\eta \in (0, 1)$ die Größe des Nahfeldes – genauer gesagt – des fast singulären Nahfeldes, denn die singulären Kategorien gehören schließlich immer dazu. In [14] wird die optimale Wahl dieses Parameters im Hinblick auf die Ausführungszeit des Panel-Clustering-Algorithmus untersucht und es ergibt sich sowohl theoretisch wie auch praktisch ein Optimum in $\eta = 1/e$. Wir vergleichen die Assemblierung für diesen und einen weiteren Wert. Es handelt sich um eine stückweise ebene Oberfläche, so daß alle in dieser Arbeit dargestellten Verfahren durchgeführt werden können, ohne auf Ersatz-Polyeder ausweichen zu müssen. Desweiteren ist im singulären Nahfeld eine semi-analytische Integration in dem Sinne möglich, daß wir je nach Lage der Dreiecke in $4 - \alpha$ Richtungen elementar integrieren können. Es ist zu beachten, daß die Größe \tilde{D}_{00} zum Beispiel bei der Bestimmung von E_{00} nur benötigt wird, wenn $x_3 = 0$ gilt (vergleiche Satz 4.11). Beim Würfel ergibt sich eine für allgemeine Geometrien unrealistische Effizienz des Raumwinkelansatzes. Wir berechnen daher stets D_{00} , auch wenn dieser Wert nicht gebraucht wird.

Es werden die folgenden Notationen verwendet:

FS^d	d -dimensionale elementare Integration im singulären Nahfeld
G^d	d -dimensionale Gauß-Legendre-Tensorproduktquadratur über $[0, 1]^d$
VTQ	Variierende Tensorproduktquadratur über π
VTQ^2	Tensorprodukt aus zwei VTQ -Formeln über $\pi_x \times \pi_y$
RW	Raumwinkelformeln
A^*	Formel A berechnet singulären Anteil, $Q_1 \otimes Q_1$ glatten Rest
A^{**}	Formel A berechnet singulären Anteil, $Q_3 \otimes Q_3$ glatten Rest
$A \otimes B$	Tensorprodukt aus den Formeln A und B

N	$\#(\pi_x, \pi_y)$	G^4	VTQ^2	$VTQ \otimes RW^*$	$VTQ \otimes RW^{**}$
192	20024	0.66	0.44	0.49	0.69
768	86342	5.66	4.14	3.02	3.87
3072	347804	58.14	32.54	16.50	19.83
12288	1624704	490.72	266.24	98.24	113.28
49152	6661248	3773.44	1863.68	515.84	576.00
196608	26305536	25364.48	11944.96	2526.72	2757.12

Tabelle 6.1: CPU-Zeit [s], $\eta = 1/e$

Die Bezeichnung *FS* steht dabei für »Fundamentalsatz« und weist auf den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung hin. Die Helmholtz-Fundamentallösung wird beim Raumwinkelansatz bekanntlich in einen singulären und einen glatten Anteil zerlegt. Theoretisch reicht für letzteren eine abstrakte Kubaturformel mit Exaktheitsgrad 1. Wir greifen sowohl auf eine 3-Punkt Formel Q_3 für Dreiecke mit einem Exaktheitsgrad 2 aus [19] als auch auf die eindeutig bestimmte 1-Punkt-Formel Q_1 mit Exaktheitsgrad 1 zurück. Sie hat das Gewicht $\frac{1}{2}$ an der Stützstelle $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \Delta_{ref}$. Wir wenden beide innerhalb eines Tensorproduktansatzes auf $\pi_x \times \pi_y$ an. Im Fall der gemeinsamen Ecke ist zu erwähnen, daß bei der Integration des glatten Anteils die Unterteilung in die Teilgebiete D_1 und D_2 nicht notwendig ist und die nicht-disjunkten Dreiecke genauso wie im fast singulären Fall gehandhabt werden.

6.1 Fast singuläres Nahfeld

Wir betrachten den uniform triangulierten Einheitswürfel auf sechs Level. Es werden konstante Ansatzfunktionen betrachtet. Damit kann der Quadraturgrad von G^4 (4.14) folgend angepaßt werden. Der fixe Faktor der VTQ erfüllt (4.27), der variierende (4.28). In Tabelle 6.1 werden die Laufzeiten im fast singulären Nahfeld von vier Verfahren gegenübergestellt. Die Spalte $\#(\pi_x, \pi_y)$ gibt die Anzahl der Dreieckspaare im fast singulären Nahfeld an. Man erkennt, daß durch die Verwendung der Variierenden Tensorproduktquadratur eine Verbesserung der Konstanten in der Komplexität um einen Faktor zwei eintritt, was dem allgemeinen Verständnis von dieser Methode entsprechen dürfte. Eine bessere Komplexitätsordnung wird dagegen erst durch die Anwendung der Verfahren $VTQ \otimes RW^*$ und $VTQ \otimes RW^{**}$ erzielt. Der glatte Rest wird nun mit dem Tensorprodukt $Q_1 \otimes Q_1$ bzw. $Q_3 \otimes Q_3$ integriert, was eine konstante Stützstellenanzahl 1 bzw. 9 ergibt und keine Probleme bereitet. Beim singulären Anteil ist lediglich bezüglich eines Dreiecks der Kubaturgrad zu erhöhen. Hier wird in beiden Verfahren VTQ eingesetzt. Auf dem feinsten Gitter sind die beiden Verfahren sogar um Faktor 10 schneller als das Referenzverfahren G^4 .

Als nächstes betrachten wir die Entwicklung des Fehlers. Wir hatten die hinreichenden Kubaturgrade (4.14), (4.27) und (4.28) aus der Bedingung (3.1) für den Fehler der gestörten

N	G^4	VTQ^2	$VTQ \otimes RW^*$	$VTQ \otimes RW^{**}$
192	1.98e-06	1.98e-06	4.44e-06	4.44e-06
768	2.00e-08	2.00e-08	9.88e-09	9.95e-09
3072	1.46e-10	1.46e-10	1.15e-10	9.88e-11
12288	8.04e-13	8.04e-13	8.20e-13	4.27e-13
49152	1.23e-14	1.23e-14	1.26e-14	6.13e-15
196608	4.79e-17	4.79e-17	1.68e-16	1.61e-17

Tabelle 6.2: Fehler bez. $\|\cdot\|_\infty$, $\eta = \frac{1}{e}$

Matrixkoeffizienten hergeleitet. Das führt uns zu der »Norm«

$$\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in I_N} |a_{ij}|,$$

wobei mit $|\cdot|$ der Betrag in \mathbb{C} und mit I_N die Menge der Indexpaare des fast singulären Nahfeldes bezeichnet werde. Tabelle 6.2 listet die Fehler der gestörten Nahfeldmatrizen in dieser Norm auf. Als erstes fällt die Übereinstimmung der Fehler von G^4 und VTQ^2 auf. Das ist damit zu erklären, daß die Fehler in dieser Norm durch die Koeffizienten dominiert werden, die wir Dreiecken mit relativ großem Abstand $\delta = \text{dist}(\pi_x, \pi_y)$ zuordnen. Bezüglich dieser Dreiecke stimmen VTQ und G^4 allerdings fast überein, da es sich hier um relativ kleine Kubaturgrade handelt und eine umfangreiche Ausdünnung des Kubaturgitters nicht ohne Verletzung der Konsistenzkriterien möglich ist, was dann natürlich auch unterlassen wird. Bei den Dreiecken π_x und π_y mit kleinem Abstand δ und folglich hohem Kubaturgrad kommt es dagegen zu Genauigkeitsunterschieden zwischen beiden Verfahren. Man kann sagen, daß die Variierende Produktquadratur gleichmäßigere Genauigkeiten liefert, während es bei der Tensor-Gauß-Kubatur zu Sprüngen mit (zu) hoher Genauigkeit kommt, die im Endeffekt aber nicht augenutzt werden können. Insgesamt ist zu beobachten, daß alle Verfahren gute Ergebnisse liefern und die Konsistenzbedingung (3.1) in allen Fällen erfüllt wird.

Die gleichen Testrechnungen wurden bezüglich des Parameters $\eta = \frac{2}{3}$ durchgeführt. Die Tabellen 6.3 und 6.4 zeigen die Ergebnisse. Man stellt fest, daß die wesentlichen Aussagen bezüglich des anderen Parameters auch hier zutreffen. VTQ ist G^4 um einen festen Faktor überlegen und die beiden Raumwinkelansätze erfüllen eine bessere Komplexitätsordnung. Anders als im ersten Beispiel differieren nun die Fehler der Variierenden und der klassischen Tensorquadratur. Da die Größe des Nahfeldes monoton fallend in η ist [17] und wir nun $\eta = \frac{2}{3} > \frac{1}{e}$ betrachten, ist das fast singuläre Nahfeld in diesem Fall kleiner, was natürlich insgesamt zu kürzeren Laufzeiten führt. Dadurch wird aber der vorhin erwähnte Effekt verhindert, daß der Fehler in der hier betrachteten Nahfeld-Matrixnorm von Koeffizienten bestimmt wird, für die sich VTQ und G^4 kaum unterscheiden. Das beste Verfahren in Bezug auf Effizienz stellt erneut $VTQ \otimes RW^*$ dar: Es ist bei guter Genauigkeit am schnellsten und übertrifft G^4 auf dem höchsten Level sogar um Faktor 15. Dies ist wiederum auf das kleinere Nahfeld zurückzuführen. Der Raumwinkelansatz entwickelt nämlich erst ab einem

N	$\#(\pi_x, \pi_y)$	G^4	VTQ^2	$VTQ \otimes RW^*$	$VTQ \otimes RW^{**}$
192	4604	0.16	0.14	0.13	0.18
768	18010	2.31	1.37	0.78	0.98
3072	72244	20.50	10.87	4.25	5.02
12288	375936	215.20	105.12	29.12	33.28
49152	1528448	1632.00	727.04	150.40	168.32
196608	6021632	11525.12	4966.40	762.88	832.00

Tabelle 6.3: CPU-Zeit [s], $\eta = \frac{2}{3}$

N	G^4	VTQ^2	$VTQ \otimes RW^*$	$VTQ \otimes RW^{**}$
192	9.96e-07	9.96e-07	4.64e-06	4.57e-07
768	8.13e-09	8.13e-09	4.97e-09	4.34e-09
3072	4.68e-11	5.19e-11	4.98e-11	2.03e-11
12288	3.70e-13	3.93e-13	7.22e-13	1.96e-13
49152	3.91e-15	4.08e-15	1.09e-14	1.87e-15
196608	2.01e-17	2.02e-17	1.68e-16	9.85e-18

Tabelle 6.4: Fehler bez. $\|\cdot\|_\infty$, $\eta = \frac{2}{3}$

bestimmten Kubaturgrad Vorteile. Und je kleiner das Nahfeld, desto größer ist der Anteil an Kubaturen mit relativ hohen Kubaturgraden.

6.2 Singuläres Nahfeld

Wir hatten bereits festgestellt, daß die einzig problematische Kategorie innerhalb des singulären Nahfeldes die der gemeinsamen Ecke ist. Dies belegt auch Tabelle 6.5, in der die Laufzeiten der Verfahren $FS^d \otimes G^{4-d}$ verglichen werden, $d = 3, 2, 1$. Daher konzentrieren wir uns auf den Fall der Ecksingularität. Wir stellen Vergleichsrechnungen bezüglich

N	Gleiches Dreieck	Gemeinsame Kante	Gemeinsame Ecke
192	0.02	0.05	0.11
768	0.08	0.28	0.91
3072	0.34	1.63	6.90
12288	1.61	11.83	73.45
49152	7.40	60.92	435.60
196608	36.16	371.84	3536.96

Tabelle 6.5: CPU-Zeit [s] des singulären Nahfeldes (Referenzkonfiguration)

N	$\#(\pi_x, \pi_y)$	$G^3 \otimes FS$	$G^1 \otimes FS \otimes RW^*$	$G^1 \otimes FS \otimes RW^{**}$
192	1684	0.11	0.10	0.11
768	6868	0.91	0.48	0.54
3072	27604	6.90	2.35	2.58
12288	110548	73.45	12.29	13.27
49152	442332	435.60	56.72	60.48
196608	1769472	3536.96	280.32	294.72

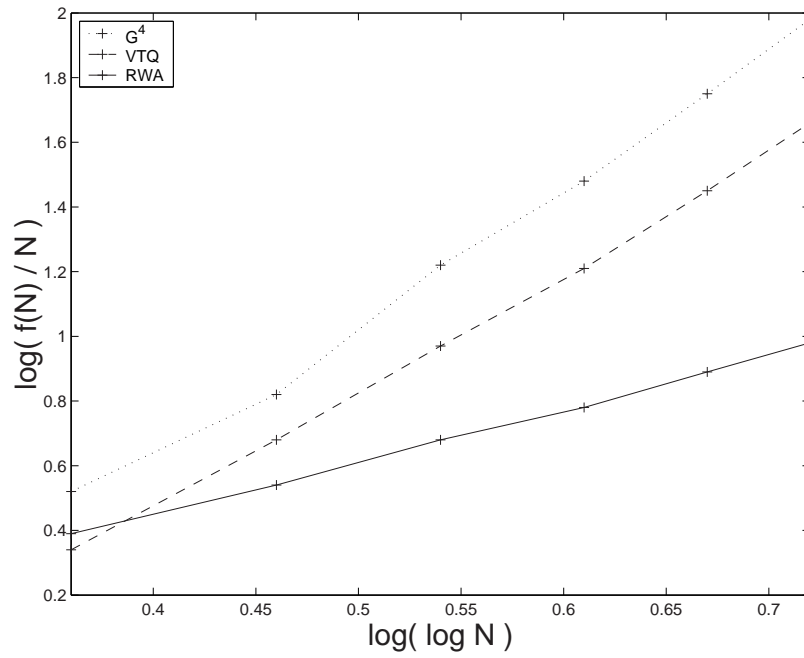
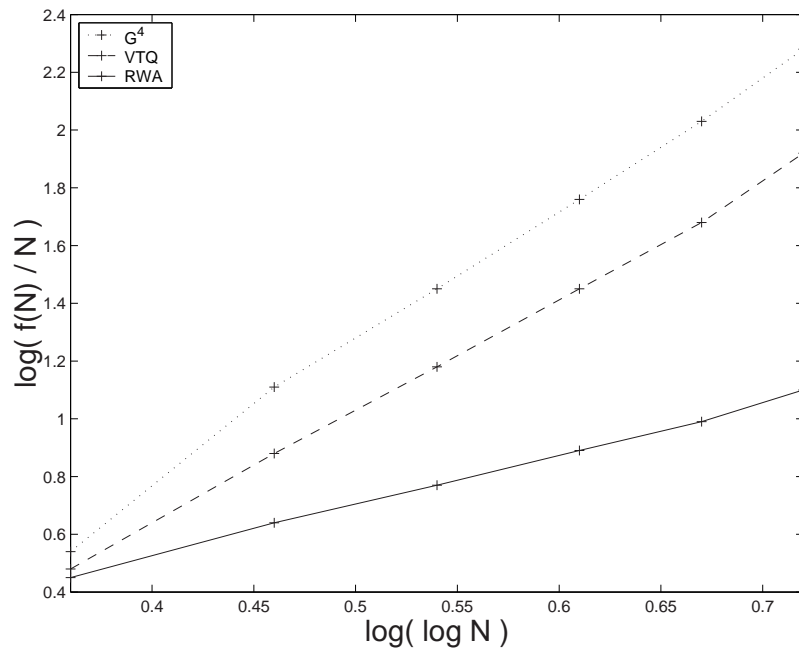
Tabelle 6.6: CPU-Zeit [s] (gemeinsame Ecke)

N	$G^3 \otimes FS$	$G^1 \otimes FS \otimes RW^*$	$G^1 \otimes FS \otimes RW^{**}$
192	8.33e-08	1.90e-07	8.30e-08
768	9.29e-10	3.00e-09	9.31e-10
3072	1.27e-11	4.54e-11	1.27e-11
12288	2.34e-14	6.86e-13	2.33e-14
49152	3.83e-16	1.07e-14	3.84e-16
196608	1.03e-18	1.68e-16	9.11e-19

Tabelle 6.7: Fehler bez. $\|\cdot\|_\infty$ (gemeinsame Ecke)

drei verschiedener Verfahren an. Bei allen geschieht die Regularisierung mittels Duffy-Transformation. Das Standardverfahren $G^3 \otimes FS$ begnügt sich allerdings mit der elementaren Integration in einer Dimension. Als Alternative integrieren wir in zwei weiteren Richtungen analytisch, was auf die zwei Methoden $G^1 \otimes FS \otimes RW^*$ und $G^1 \otimes FS \otimes RW^{**}$ hinausläuft, welche in Definition 4.5 erklärt wurden. Die Quadraturgrade bezüglich G^3 bzw. G^1 werden [23] folgend angepaßt. Es gilt $n \geq 2 \log(h) - 1$. Hier entsteht ein ähnliches Bild wie bei den disjunkten Dreiecken. Obwohl diese Kategorie quantitativ der fast singulären unterlegen ist, wird bei einem Vergleich der Tabellen 6.1, 6.3 und 6.6 deutlich, daß bei ausschließlicher Anwendung der Raumwinkelformeln im regulären Nahfeld die Ecksingularität jetzt einen ebenso großen Rechenaufwand in Anspruch nimmt. Damit bleibt auch hier der Einsatz dieser Formeln nicht ohne Auswirkungen auf die Gesamtkomplexität der Nahfeldassemblierung.

Die Verfahren sind natürlich beliebig kombinierbar. So kann man den regulären Anteil der Helmholtz-Fundamentallösung mit konstantem Kubaturgrad berechnen, ohne auf den singulären Anteil den Raumwinkelansatz anzuwenden und erreicht eine Effizienzsteigerung um einen konstanten Faktor gegenüber G^4 , denn bei der Berechnung des singulären Anteils beispielsweise mittels Gauß-Legendre-Tensorprodukt wird dann auf die Auswertung des Cosinus und des Sinus verzichtet. Desweiteren kann man die zweidimensionale Gauß-Legendre-Tensorquadratur an Stelle der Variierenden Tensorquadratur im Raumwinkelansatz heranziehen, was zu einem Effizienzverlust im fast singulären Nahfeld führen würde.

Abbildung 6.1: Fast singuläres Nahfeld, $\eta = \frac{1}{e}$ Abbildung 6.2: Fast singuläres Nahfeld, $\eta = \frac{2}{3}$

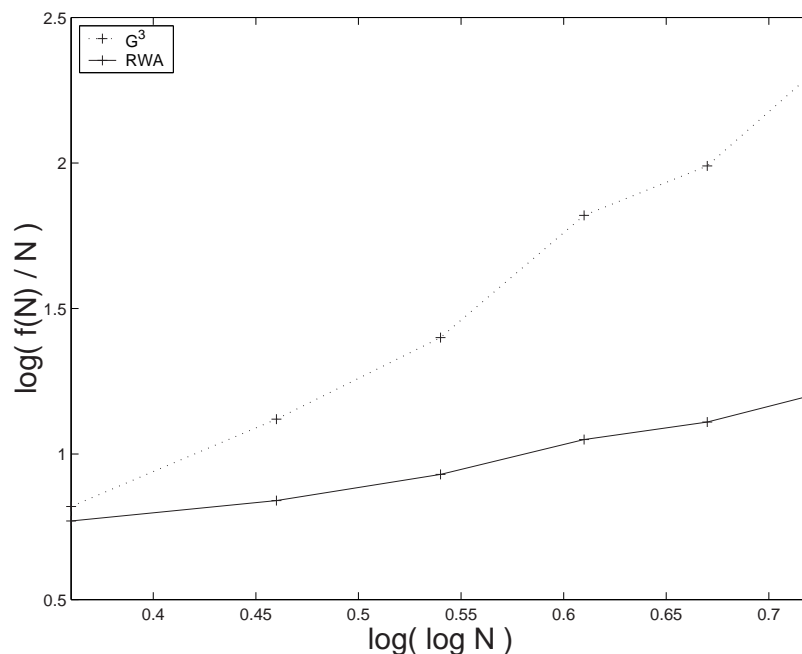


Abbildung 6.3: Gemeinsame Ecke

6.3 Asymptotik

In der Theorie hatten wir für die Verfahren einen Aufwand von $\mathcal{O}(N \log^\alpha N)$ festgestellt, wobei α zwischen 1 und 4 variierte. Um die Komplexitätsordnungen einiger Verfahren miteinander zu vergleichen, betrachten wir den Aufwand f relativ zur Größe des Nahfeldes. Darunter verstehen wir formal eine Division durch N , denn die Größe des Nahfeldes verhält sich wie $\mathcal{O}(N)$ für $N \rightarrow \infty$. Um aber eine möglichst genaue Darstellung zu garantieren, teilen wir die in den Tabellen 6.1, 6.3 und 6.6 gemessenen Zeiten durch die Anzahl der dabei wirklich ausgewerteten Doppelintegrale, welche dort mit $\#(\pi_x, \pi_y)$ bezeichnet werden. $f(N)$ stehe also für die in den Tabellen aufgeführte Rechenzeit in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad N . Wir tragen in den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3

$$\log_{10} \frac{f(N) \cdot 100000}{\#(\pi_x, \pi_y)} \quad \text{gegen} \quad \log_{10} \log_{10} N$$

auf, so daß sich der theoretisch prognostizierte Aufwand in einer affinen Geraden mit der Steigung α offenbaren würde. Wir benutzen folgende Abkürzungen:

G^4	VTQ	RWA	G^3	RWA
G^4	VTQ^2	$VTQ \otimes RW^*$	$G^3 \otimes FS$	$G^1 \otimes FS \otimes RW^*$

Man sieht klar die Effizienzsteigerung der Variierenden Tensorproduktquadratur um einen konstanten Faktor gegenüber der Gauß-Produktquadratur, die in den ersten beiden Gra-

phiken einer affinen Verschiebung der Kurven nach unten entspricht. Das dritte Verfahren in den Abbildungen 6.1 und 6.2 stellt den Raumwinkelansatz dar, wobei der glatte Rest von $Q_1 \times Q_1$ integriert wird genauso wie bei *RWA* im Fall der Ecksingularität in Abbildung 6.3. Hier sind nun die besseren Ordnungen an den kleineren Steigungen der Graphen abzulesen.

Kapitel 7

Numerisches Beispiel

Zum Abschluß wollen wir uns einer Anwendung der Randelementmethode widmen. Dazu betrachten wir die schallweiche Streuung von Kugelwellen in einem geschlossenen Raum. Dies führt uns erneut zu der Helmholtz-Gleichung mit Dirichlet-Randwerten. Wir betrachten wie im letzten Kapitel den Einfachschichtpotentialansatz mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen.

Zunächst konzentrieren wir uns allerdings auf die Randintegralgleichung und untersuchen die Konvergenz der Galerkinlösung, indem wir eine exakte Lösung φ vorgeben. Die diskrete rechte Seite b_h ergibt sich nun durch

$$b_j = \int_{\pi_j} \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) ds(x), \quad (7.1)$$

wobei dieses Doppelintegral mittels Gauß-Legendre-Formeln unter eventueller Hinzunahme der Duffy-Transformation bis auf Maschinengenauigkeit approximiert werden kann. Es ist zu beachten, daß die Raumwinkelformeln hier nicht angewendet werden können, da φ im allgemeinen kein Polynom ist. Wir verzichten auf die Matrixkompression und stellen die quadratischen Matrizen explizit auf. Für realistische Probleme muß die Nahfeldkuba-

N	$\ \varphi - \varphi_h\ _0$	Kontraktion	$ u(p) - u_h(p) $	Kontraktion
12	5.75e-01		1.12e-02	
48	2.71e-01	2.12	4.63e-03	2.41
192	1.24e-01	2.18	7.18e-04	6.45
768	5.98e-02	2.07	1.10e-04	6.51
3072	2.95e-02	2.03	2.08e-05	5.29

Tabelle 7.1: Fehler der Galerkin-Lösung auf $\Gamma = \partial\Omega$ und in $\Omega = (0, 1)^3$

tur selbstverständlich in ein Matrixkompressionsverfahren eingegliedert werden. Wir demonstrieren hier an einem kleinen Beispiel die Konvergenzeigenschaft. Die Theorie sagt

unter bestimmten Glattheitsvoraussetzungen eine Konvergenz der (gestörten) Galerkin-Lösung φ_h von der Ordnung $\frac{3}{2}$ in der $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -Norm voraus. Tabelle 7.1 zeigt die lineare Konvergenz dieser in der $L^2(\Gamma)$ -Norm und damit die Stimmigkeit von Theorie und Praxis. Alle Kubaturverfahren des letzten Kapitels legen hier den Grundstein für die Konvergenz.

Anschließend haben wir eine Lösung $u(x)$ der Helmholtz-Gleichung in Ω vorgegeben und die zugehörige Randwertaufgabe gelöst. Mit Hilfe deren Lösung φ_h und des Operators S aus (2.9) erhalten wir dann eine Approximation an die Lösung des Innenraumproblems. Die punktweise Superkonvergenz von $S\varphi_h$ im Inneren von Ω gegen u läßt sich mit dem Aubin-Nitsche-Lemma beweisen [14] und in Tabelle 7.1 beobachten.

Nun kommen wir zur eigentlichen Anwendung. Es sei

$$K_y(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} \frac{\exp(ik \|x - y_{\nu}\|_2)}{\|x - y_{\nu}\|_2}$$

eine endliche Überlagerung von in $y_{\nu} \in \Omega$ positionierten und mit a_{ν} gewichteten Kugelwellen mit der Wellenzahl k . Wir suchen die an Γ gestreute Welle. Dazu ist die Helmholtzgleichung im Inneren von Ω zu lösen. Die Dirichlet-Randbedingungen

$$u(x) = -K_y(x), \quad x \in \Gamma, \quad (7.2)$$

sorgen dann für die schallweiche Streuung. Es sei daran erinnert, daß zur Geometrie Ω irreguläre Wellenzahlen k aufgrund von Resonanzen existieren können, so daß die Innenraumangabe nicht mehr eindeutig lösbar ist. Betrachtet man den Würfel $[0, a]^3$ der Kantenlänge a , dann bildet

$$f(x) := \prod_{i=1}^3 \sin\left(\frac{2\pi x_i}{a}\right)$$

eine Eigenfunktion des Laplace-Operators zum Eigenwert $12\pi^2/a^2$ und es gilt $f|_{\Gamma} = 0$. Ist also $\Omega = (0, a)^3$ und $k = 12\pi^2/a^2$, so bildet mit u auch $u + f$ eine Lösung der Helmholtz-Randwertaufgabe, welche folglich nicht mehr eindeutig lösbar ist. Wir nehmen an, daß k regulär ist.

Die Punktsingularitäten von K_y verhindern, daß sich einfallende und gestreute Welle gegenseitig aufheben. Dies folgt aus der Tatsache, daß $-K_y$ als Linearkombination der Fundamentallösungen nach Anwendung des Helmholtz-Operators L im distributionellen Sinne eine solche der Diracschen Punktfunktionale bildet, weshalb sie keine Lösung der homogenen Helmholtzgleichung sein kann.

Diese gegenseitige Elimination wird bei Außenraumproblemen und ebenen als einfallenden Wellen von der Abklingforderung im Unendlichen verhindert. Eine ebene einfallende Welle macht dagegen aufgrund dieser Überlegungen im Innenraum keinen Sinn, abgesehen davon, daß sie dort physikalisch sinnlos ist.

Im folgenden betrachten wir ein quaderförmiges Tonstudio mit den Ausmaßen $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0.9]$. Dieses wird zum einen mit Schall absorbierenden Wänden und zum anderen mit glatten Wänden ausgestattet. In den Punkten $y_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ und $y_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ befinden sich zwei Schallquellen. Für die Wellenzahl gilt $k = 15$.

Die Anfangstriangulierung ist in Abbildung 7.1 ohne Decke dargestellt. Wir verfeinern diese zweimal auf konventionelle Weise, so daß schließlich eine Simulationsberechnung mit $N = 35840$ Freiheitsgraden durchgeführt wird. Da wir auf Matrixkompressionsverfahren verzichten und die gesamte Matrix erzeugen, ist diese Rechnung von einem einzelnen Computer nicht zu bewerkstelligen. Deshalb parallelisieren wir das Simulationsprogramm und führen die Berechnungen auf 112 Prozessoren des Parallelrechners *Parnass2* der Abteilung für Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation, Universität Bonn, durch.

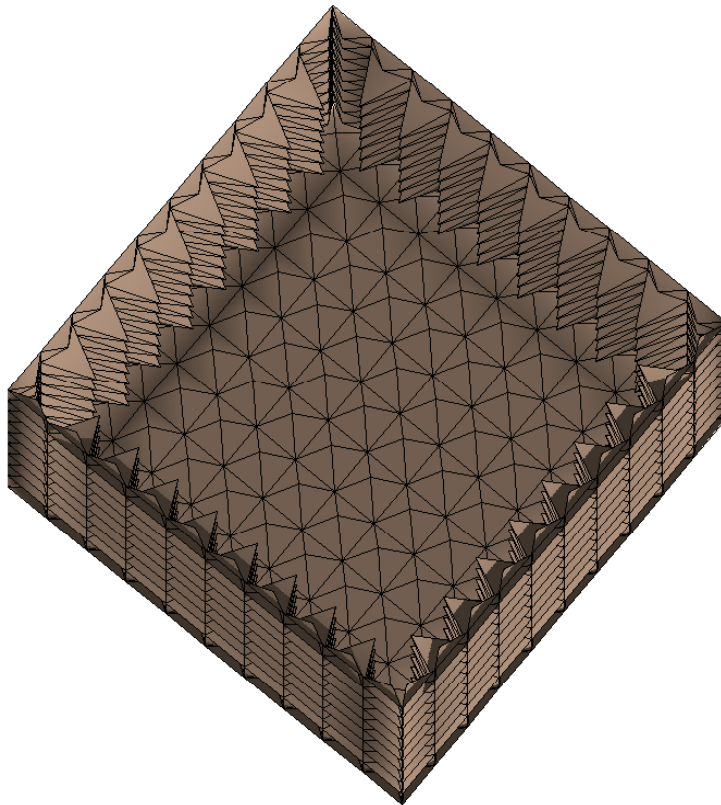


Abbildung 7.1: Innenansicht des Tonstudios mit Schalldämmung (Anfangstriangulierung)

In Abbildung 7.2 und in Abbildung 7.3 sind die Realteile der beiden Lösungen bezüglich der verschiedenen Geometrien abgebildet. Die rechten Bilder zeigen die quadratische Decke und besonders hier wird der strukturelle Unterschied zwischen beiden Lösungen deutlich. Man könnte das Gitter in den Spitzen der Geräuschpyramiden adaptiv verfeinern, um die Singularitäten der Lösung dort besser aufzulösen. Wir verzichten auf die Darstellung der Imaginärteile, da deren Beträge bezüglich beider Geometrien verschwindend klein sind.

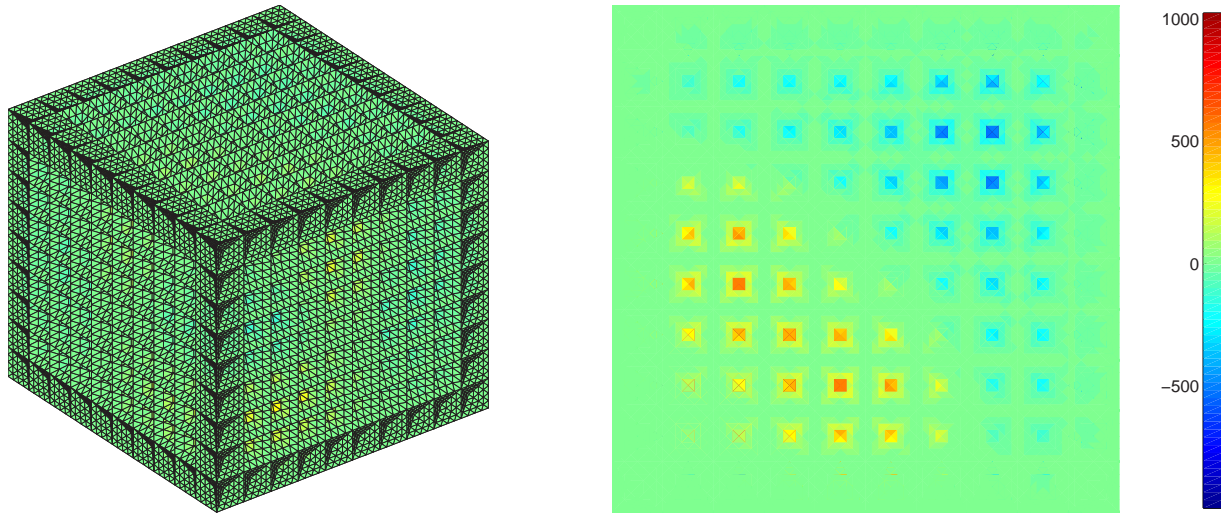


Abbildung 7.2: Tonstudio mit Schalldämmung, Realteil der BEM-Lösung

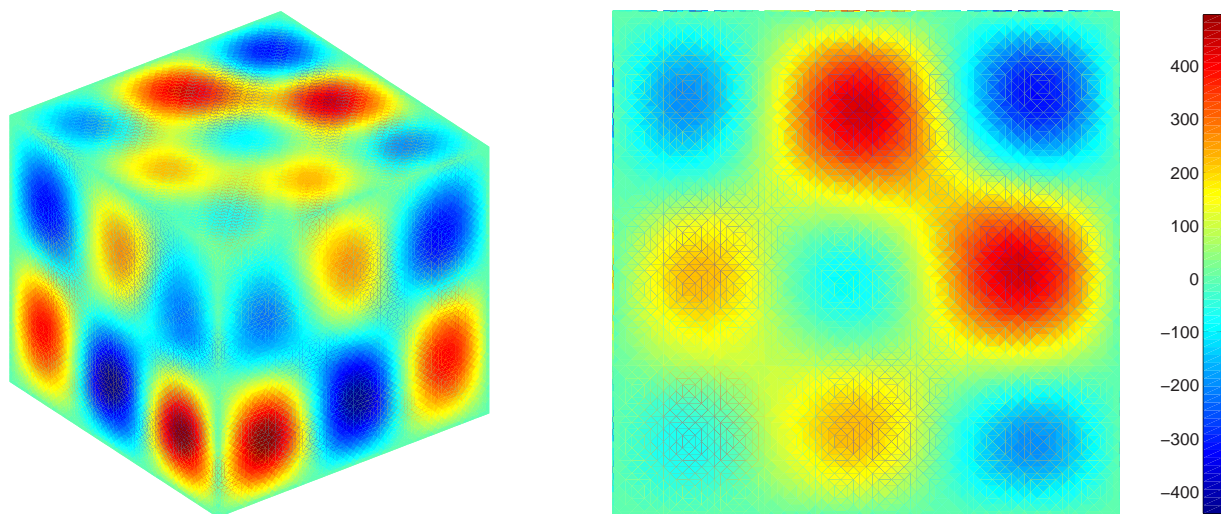


Abbildung 7.3: Tonstudio ohne Schalldämmung, Realteil der BEM-Lösung

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit nach Möglichkeiten gesucht, den Rechenaufwand zur Nahfeldassemblierung in der Randelementmethode zu verringern. Während die Problematik der vollbesetzten Systemmatrizen in anderen Arbeiten thematisiert wird [17] [22] [14] [26], haben wir uns auf effiziente Integrationstechniken im Nahfeld konzentriert, die an keines der Matrixkompressionsverfahren gebunden sind, aber natürlich erst in Verbindung mit ihnen Sinn machen. Ausgehend von einem Referenzverfahren sind bei der Suche unterschiedliche Richtungen eingeschlagen worden. Größere Effizienzsteigerungen erzielte ein explizites, das heißt ein dem Integranden angepaßtes Verfahren.

Zuerst stellten wir ein neues implizites Kubaturverfahren vor, mit dem – wie numerische Ergebnisse zeigten – eine Verbesserung der Komplexität um einen konstanten Faktor erreicht wird. Die Variierende Tensorproduktquadratur fußt auf einer besseren Anpassung des Kubaturgitters an das dreieckige Randelement und stellt eine Erweiterung der Tensorproduktquadratur dar. Hier sind eine sorgfältige Wahl der Kubaturgrade und ein einfaches Kriterium zur Bestimmung dieser besonders wichtig. Fehleranalysen, die wir bezüglich der Gaußschen Tensorproduktquadratur durchgeführt haben, konnten auf dieses Verfahren verallgemeinert werden.

Ein explizites, semi-analytisches Verfahren ergab sich durch die Eingliederung einer exakten Integrationsformel für Potentialauswertungen, wie sie im Kollokationsverfahren auftreten. Die ursprünglich auf das Einfach- und Doppelschichtpotential des Laplace-Operators beschränkten Formeln wurden auf dessen hypersinguläres Potential und auf alle Potentiale (Einfachschicht, Doppelschicht- und hypersinguläres Potential) der Lamé- und der Stokes-Gleichungen übertragen. Eine additive Zerlegung der Helmholtzschen Fundamentallösung ergab auch die Anwendbarkeit auf den Einfachschichtpotentialansatz dieser Differentialgleichung.

Die Eingliederung in das Galerkin-Verfahren geschah im Fall disjunkter Dreiecke, indem die Formeln einen der beiden zweidimensionalen Kubaturfaktoren innerhalb eines Tensorproduktansatzes bildeten. Den anderen stellte die Variierende Tensorproduktquadratur dar. Damit bereitete die Fehleranalyse in dem hier als Raumwinkelansatz bezeichneten Verfahren keinen zusätzlichen Aufwand. Die asymptotische Komplexität im fast singulären Nahfeld ließ sich auf diese Weise auf $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ verbessern, weil die Kubaturgrade nur

noch in zwei Richtungen logarithmisch in $h \sim N^{-\frac{1}{2}}$ erhöht werden mußten. In Bezug auf den Einfachschicht- und Doppelschichtpotentialansatz der Potentialgleichung ist dies allerdings nicht neu. Mit der Verallgemeinerung der Raumwinkelformeln auf andere Ansätze (bezüglich anderer Differentialgleichungen) wird diese bessere Ordnung nun jedoch auch dort erreicht.

Durch die Eingliederung der Formeln im Fall der Ecksingularität konnte dagegen der asymptotische Aufwand in dieser Kategorie generell von $\mathcal{O}(N \log^3 N)$ auf $\mathcal{O}(N \log N)$ verkleinert werden, was einen Gesamtaufwand der Nahfeldassemblierung von $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ zur Folge hat und neu sein dürfte. Die Eingliederung in diesem singulären Fall beruht auf der Beobachtung, daß sich in den regularisierten Integralen Potentialauswertungen verbergen, wie sie die Raumwinkelformeln liefern. Den entscheidenden Vorteil erhält dieses Verfahren allerdings erst durch den Umstand, daß auf die elementare Integration bezüglich einer Richtung nicht verzichtet werden muß. Damit ist in dieser Kategorie das Integral nur noch mittels eindimensionaler numerischer Integration zu approximieren.

Die bessere Asymptotik konnte anschließend auch in der Praxis nachgewiesen werden. Am Beispiel des Helmholtz-Einfachschichtpotentials wurden bei feinsten Maschenweite Beschleunigungen um einen Faktor im zweistelligen Bereich gegenüber einem Referenzverfahren gemessen.

Es zeigte sich, daß der Vorsprung dieses semi-analytischen Verfahrens von der Größe des Nahfeldes und dem Anteil an Dreieckpaaren mit extrem hohen Kubaturgraden abhängt. Bezüglich weiter entfernter Dreiecke im Nahfeld verliert der Raumwinkelansatz möglicherweise gegen ein anderes Verfahren. Hier bietet es sich an, eine Methode einzusetzen, die verschiedene Techniken kombiniert und die abhängig vom Abstand δ der beiden Dreiecke den jeweils optimalen Baustein wählt.

Die Rückführung der allgemeinen Potentiale auf das Laplace-Doppelschichtpotential (4.35) und auf die Linienintegrale (4.36) hängt selbstverständlich nicht von dem Verfahren ab, welches letztere letztendlich bestimmt. Wenn es also möglich wäre, das Doppelschichtpotential oder die Linienintegrale schneller auszuwerten, würden alle Ansätze davon profitieren. Eine erste Idee in dieser Richtung wurde mit der Interpolation der nicht-elementaren Operationen vorgestellt.

Anhang A

Mathematische Hilfsmittel

Es werden einige grundlegende Definitionen zusammengestellt, die in dieser Arbeit benötigt werden. Die Einführung der Flächen im ersten Abschnitt stammt aus [13], die Definition der Sobolevräume ist [30] entnommen.

A.1 Untermannigfaltigkeiten

Definition A.1 $S \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, heißt Immersion, falls $\text{rang } \nabla \tau = k$, $\forall t \in S$.

Folgende Definition einer Fläche ist aus praktischer Sicht sinnvoll.

Definition A.2 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^{k,\kappa}$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ relativ M , eine offene Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^m$ und eine Immersion $\tau : S \rightarrow U$ der Klasse $\mathcal{C}^{k,\kappa}$ gibt, die S homöomorph auf U abbildet, $0 \leq \kappa \leq 1$, $\mathcal{C}^k := \mathcal{C}^{k,0}$. Nicht differenzierbare Untermannigfaltigkeiten seien stets Lipschitz-stetig, d. h. $k = 0 \Rightarrow \kappa = 1$.

Dagegen heißt eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ m -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}_{stet}^{k,\kappa}$, falls $M \in \mathcal{C}^{0,1}$ und es endlich viele offene Mengen $M_i \subset M$ gibt mit

- $\bigcap_i M_i = \emptyset$,
- $\bigcup_i \overline{M_i} = M$ und
- $M_i \in \mathcal{C}^{k,\kappa} \quad \forall i$.

Die M_i heißen glatte Komponenten von M .

Eine Immersion τ mit obigen Eigenschaften bildet zusammen mit ihrem Bild U eine Karte (τ, U) . Überdecken die Kartengebiete U_i einer Familie $((\tau_i, U_i))_{i \in I}$ M , so spricht man von einem Atlas, schließlich erfüllt jede dieser Familien die Atlas-Axiome einer abstrakten Mannigfaltigkeit. Damit ist jede Untermannigfaltigkeit eine Mannigfaltigkeit.

Definition A.3 M sei eine m -dimensionale $\mathcal{C}^{k,\kappa}$ -Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $(\tau_i, U_i)_{i \in I}$. Eine Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ gehört zur Klasse $\mathcal{C}^{l,\lambda}(M)$, $l + \lambda \leq k + \kappa$, falls

$$\varphi \circ \tau_i \in \mathcal{C}^{l,\lambda}(\tau_i^{-1}(U_i)), \quad \forall i \in I$$

gilt.

Im nächsten Abschnitt benötigen wir die

Definition A.4 (Partition der Eins) $(U_i)_{i \in I}$ überdecke M endlich. Eine Familie $(\alpha_j)_{j \in J}$ von Funktionen auf M heißt der Überdeckung (U_i) untergeordnete Partition der Eins, falls

- $\forall j \in J \exists i \in I$ mit $\alpha_j \in \mathcal{C}_0^\infty(U_i)$, d. h. $\alpha_j \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $\text{supp}(\alpha_j) \subset\subset U_i$,
- $\sum_i \alpha_i(x) \equiv 1$ und $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$, $\forall x \in M$.

Werden dagegen die $\alpha_j \circ \tau_i$ nur als lokal-integrierbar und $\text{supp}(\alpha_i) \subset U_i$ vorausgesetzt, so spricht man von einer lokal-integrierbaren Partition der Eins.

Bemerkung Ist eine endliche Überdeckung gegeben, dann existiert immer eine Partition der Eins. Es werden nur kompakte Oberflächen betrachtet, daher gibt es immer eine endliche Teilüberdeckung.

A.2 Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten

Wie bei den elliptischen Differentialgleichungen sind es die auf $L^2(\Omega)$ [30] aufbauenden Sobolevräume, die den Rahmen schaffen für die variationelle Formulierung der Randintegralgleichung.

Sobolevräume im \mathbb{R}^n

Definition A.5 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $l \in \mathbb{N}_0$, α ein Multiindex und $|\alpha| := \sum_i |\alpha_i|$.

$$H^l(\Omega) := \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq l, \exists \varphi^{(\alpha)} \in L^2(\Omega) \text{ mit} : \right. \\ \left. \int_{\Omega} \varphi D^\alpha v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi^{(\alpha)} v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

D^α wird verallgemeinerte Ableitung zum Multiindex α genannt. Zusammen mit dem Skalarprodukt und der induzierten Norm

$$(\varphi, \psi)_{\Omega, l} := \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} D^\alpha \varphi(x) \overline{D^\alpha \psi(x)} \, dx, \quad \|\varphi\|_{\Omega, l} := \sqrt{(\varphi, \varphi)_{\Omega, l}},$$

wird $H^l(\Omega)$ zum Hilbert- bzw. Banachraum. Sei nun $l = \lfloor l \rfloor + \lambda > 0$, $0 < \lambda < 1$.

$$H^l(\Omega) := \left\{ \varphi \in H^{\lfloor l \rfloor} : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^s \varphi(x) - D^s \varphi(y)|^2}{|x - y|^{n+2\lambda}} \, dx dy < \infty, \quad \forall s \leq \lfloor l \rfloor \right\}$$

$$(\varphi, \psi)_{\Omega, l} := (\varphi, \psi)_{\Omega, \lfloor l \rfloor} + \sum_{|s| \leq \lfloor l \rfloor} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^s \varphi(x) - D^s \varphi(y)) \overline{(D^s \psi(x) - D^s \psi(y))}}{|x - y|^{r+2\lambda}} dx dy .$$

Die vollständige Hülle von \mathcal{C}_0^∞ bezüglich $\|\cdot\|_l$ bildet den Raum

$$H_0^l(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}.$$

Ist $l < 0$, so wird auf $L^2(\Omega)$ durch

$$\|\varphi\|_{\Omega, l} := \sup_{\psi \in \mathcal{C}_0^\infty} \frac{(\varphi, \psi)_{\Omega, 0}}{\|\psi\|_{\Omega, -l}}$$

eine Norm erklärt, bezüglich deren Topologie die Menge $L^2(\Omega)$ nicht abgeschlossen ist. Die vollständige Hülle stellt den negativen Sobolevraum

$$H^l(\Omega) := \overline{L^2(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\Omega, l}}$$

dar.

Bemerkung Es sei $\varphi_i \in L^2(\Omega)$ eine Cauchy-Folge mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi\|_{\Omega, -l} = 0$. Dann wird durch

$$\langle \psi, \varphi \rangle := \lim_{i \rightarrow \infty} (\psi(x), \varphi_i(x))_{\Omega, 0} \quad (\text{A.1})$$

eine duale Paarung $H_0^l \times H^{-l} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\langle \cdot, \varphi \rangle \in H_0^l(\Omega)'$ erklärt. Es gilt sogar

$$H^{-l}(\Omega) \simeq H_0^l(\Omega)', \quad (\text{A.2})$$

siehe [1, Abschnitt 3.2].

Sobolevräume auf Flächen

Es sei (τ, U) eine Karte der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Matrix $(g_{i,j}(t))_{i,j=1}^m$ mit den Komponenten

$$g_{i,j} := \left(\frac{\partial \tau(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial \tau(t)}{\partial t_j} \right) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\tau_\nu(t)}{\partial t_i} \frac{\tau_\nu(t)}{\partial t_j}$$

heißt *Maßtensor* in $t \in \tau^{-1}(U)$, dessen Determinante $g(t) := \det g_{i,j}(t)$ *Gramsche Determinante*.

Bemerkung Der Maßtensor und die Gramsche Determinante hängen von der Karte ab.

Das Integral über Untermannigfaltigkeiten, das mit Hilfe der Gramschen Determinante erklärt wird, ist dennoch invariant unter Kartenwechsel.

Definition A.6 $(\tau_i, U_i)_{i \in I}$ sei ein Atlas der Untermannigfaltigkeit M und $(\alpha_j)_{j \in J}$ untergeordnete lokal-integrierbare Partition der Eins. Wir setzen noch $\tilde{\alpha}_i := \sum_{j \in J(i)} \alpha_j$, wobei $J(i) := \{j \in J : \text{supp}(\alpha_j) \subset U_i\}$ gilt. Dann heißt die Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ über M integrierbar, falls

$$t \rightarrow \varphi(\tau_i(t)) \sqrt{g_i(t)} \quad \text{für alle } i \in I$$

integrierbar ist und wir definieren

$$\int_M \varphi(x) ds(x) := \sum_{i \in I} \int_{\tau_i^{-1}(U_i)} \tilde{\alpha}_i(\tau_i(t)) \varphi(\tau_i(t)) \sqrt{g_i(t)} dt.$$

Satz A.1 Das Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit ist unabhängig vom Atlas und der Partition der Eins.

Beweis Siehe Forster [13].

Definition A.7 (Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten) Es sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit, mit endlicher untergeordneter Partition der Eins $(\alpha_i)_{i \in I}$, $l \leq k + \kappa$, falls $k + \kappa \in \mathbb{Z}$, und $l < k + \kappa$ sonst. Der Raum

$$H^l(M) := \{\varphi \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall i \in I \ (\varphi \cdot \alpha_i) \circ \tau_i : \tau_i^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{K} \in H_0^l(\tau_i^{-1}(U_i))\} \quad (\text{A.3})$$

wird zusammen mit dem Skalarprodukt $(\varphi, \psi)_{\Gamma, l} := \sum_{i \in I} ((\varphi \cdot \alpha_i) \circ \tau_i, (\psi \cdot \alpha_i) \circ \tau_i)_{H^l(\mathbb{R}^m)}$ zum Hilbertraum.

Satz A.2 Die Definition von $H^l(M)$ ist unabhängig vom Atlas und der untergeordneten Partition der Eins. Verschiedene Atlanten bzw. Partitionen der Eins führen zu äquivalente Normen induzierenden Skalarprodukten.

Beweis Siehe Wloka [30, Satz 4.2].

Literaturverzeichnis

- [1] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H. Andrä and E. Schnack. Galerkin-type boundary element analysis for 3D elasticity problems. In W. L. Wendland, editor, *Boundary Element Topics*, pages 221–243. Springer-Verlag, 1997.
- [3] I. Babuška and A. K. Aziz. *The Mathematical Foundation of Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*. Academic Press, New York, 1972.
- [4] D. Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [5] W. Brakhage and P. Werner. Über das Dirichletsche Außenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Arch. Math.* 16, pages 325–329, 1965.
- [6] P. G. Ciarlet and J. L. Lions. *Handbook of Numerical Analysis, Finite Element Methods (Part 1)*. North Holland, Amsterdam, 1989.
- [7] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [8] M. Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results. *SIAM J. Math. Anal.* 19(3), pages 613–626, 1988.
- [9] P. J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, 1975.
- [10] M. G. Duffy. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM J. Numer. Anal.* 19, pages 1260–1262, 1982.
- [11] W. Fischer and I. Lieb. *Funktionentheorie*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1994.
- [12] O. Forster. *Analysis 1*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1983.
- [13] O. Forster. *Analysis 3*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1984.
- [14] K. Giebermann. *Schnelle Summationsverfahren zur numerischen Lösung von Integralgleichungen für Streuprobleme im \mathbb{R}^3* . PhD thesis, Universität Karlsruhe, 1997.

-
- [15] W. Hackbusch. *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1991.
- [16] W. Hackbusch. *Elliptic Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [17] W. Hackbusch and Z. P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numerische Mathematik* 54, pages 463–491, 1989.
- [18] W. Hackbusch and S. A. Sauter. On numerical cubatures of nearly singular surface integrals arising in BEM collocation. *Computing* 52, pages 139–159, 1994.
- [19] G. Hämmerlin and K. H. Hoffmann. *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [20] F. T. Johnson. A general panel method for analysis and design of arbitrary configurations in incompressible flow. *Technical Report CR 3079, NASA*, 1980.
- [21] C. Lage. *Analyse, Entwurf und Implementation von Randelementmethoden*. PhD thesis, Universität Kiel, 1995.
- [22] S. A. Sauter. *Über die effiziente Verwendung des Galerkinverfahrens zur Lösung Fredholmscher Integralgleichungen*. PhD thesis, Universität Kiel, 1992.
- [23] S. A. Sauter. Cubature techniques for 3-D Galerkin BEM. In W. Hackbusch and G. Wittum, editors, *Boundary Elements: Implementation and Analysis of Advanced Algorithms*. Vieweg-Verlag, 1996.
- [24] S. A. Sauter and A. Krapp. On the effect of numerical integration in the Galerkin boundary element method. *Numerische Mathematik* 74, pages 337–359, 1996.
- [25] S. A. Sauter and C. Schwab. Quadrature for hp-Galerkin BEM in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik* 78, pages 211–258, 1997.
- [26] R. Schneider. *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [27] C. Schwab. Variable order composite quadrature of singular and nearly singular integrals. *Computing* 53, pages 173–194, 1994.
- [28] C. Schwab and W. L. Wendland. On numerical cubatures of singular surface integrals in boundary element methods. *Numerische Mathematik* 62, pages 343–369, 1992.
- [29] T. von Petersdorff and C. Schwab. Fully discrete multiscale Galerkin BEM. Technical Report 95-08, Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich, 1995.
- [30] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1982.