

Mathematisches Institut
Universität Bonn

Numerische Bewertung von
Finanzderivaten durch adaptive
Dünngitter-Integrationsverfahren

Diplomarbeit
Sebastian Wahl

Referent: Prof. Dr. Michael Griebel

Bonn, August 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Eindimensionale Normalverteilung	11
2.1	Einführung	11
2.2	Gauss'sche Normalverteilung	11
2.3	Kumulative Normalverteilung	12
2.3.1	Quadratur	13
2.3.2	Approximation	17
2.4	Numerische Ergebnisse	17
2.4.1	Einführung	17
2.4.2	Performance-Vergleich	17
2.4.3	Approximationsfehler	19
2.5	Integral der Normalverteilung	21
2.6	Inverse Normalverteilung	21
2.6.1	Nullstellen-Verfahren	22
2.6.2	Approximation	22
2.6.3	Vergleich der Verfahren	22
3	Mehrdimensionale Normalverteilung	25
3.1	Einführung	25
3.2	Normalverteilung	25
3.3	Numerische Integration in n Dimensionen	26
3.3.1	Monte-Carlo-Verfahren	26
3.3.2	Quasi-Monte-Carlo-Verfahren	26
3.3.3	Produktansatz für Quadraturverfahren	28

3.3.4	Dünngitter-Verfahren	29
3.4	Integral der Normalverteilung	30
3.4.1	Quadratur der Normalverteilung	32
3.4.2	Genz' Algorithmus	32
3.5	Numerische Ergebnisse	34
4	Einführung in Termingeschäfte	39
4.1	Einführung	39
4.2	Termingeschäfte	39
4.2.1	Termingegenstände	40
4.2.2	Futures	40
4.2.3	Optionen	41
4.3	Bewertung	41
4.3.1	Voraussetzungen	42
4.3.2	Payoff-Funktion	43
4.3.3	Verfahren	44
5	Europäische Optionen	45
5.1	Einführung	45
5.2	Eigenschaften	45
5.3	Bewertungsmethoden	46
5.3.1	Simulation der Aktienkurse	46
5.3.2	Erwartungswert	47
5.3.3	Integration & Transformation	47
5.3.4	Black-Scholes-Formel	49
5.3.5	PDE-Ansatz	51
5.3.6	Binomialmethode	52
5.4	Numerische Ergebnisse	54

6	Asiatische Optionen	57
6.1	Einführung	57
6.2	Eigenschaften	57
6.3	Bewertungsmethoden	58
6.3.1	Erwartungswert	58
6.3.2	Black-Scholes-Formel	62
6.4	Numerische Ergebnisse	67
7	Performance Orientierte Optionen	71
7.1	Einführung	71
7.2	Eigenschaften	71
7.2.1	Payoff-Funktion	72
7.2.2	Erwartungswert	73
7.2.3	Black-Scholes	79
7.3	Numerische Ergebnisse	80
8	Zusammenfassung/Ergebnisse	83
8.1	Normalverteilung	83
8.2	Optionsbewertung	83
A	Numerische Ergebnisse	85
A.1	1-dimensionale Normalverteilung	85
A.1.1	Kumulative Normalverteilung $\Phi(1)$	85
A.2	n-dimensionale Normalverteilung	87
A.2.1	4D-Normalverteilung, $A = E$	87
A.2.2	4D-Normalverteilung, $A = CC^t \quad C_{ij} = \max(0, 4 - \ i - j\)/4$	88
A.2.3	12D-Normalverteilung, $A = E$	89
A.2.4	12D-Normalverteilung, $A = CC^t \quad C_{ij} = \max(0, 4 - \ i - j\)/4$	90
A.3	Europäische Optionen	91
A.3.1	Black-Scholes-Formel	91
A.3.2	Integrand gewichtet, Integration von $(-10; 10)$	92
A.3.3	Integrand transformiert nach $(0; 1)$	93

A.4	Asiatische Optionen	94
A.4.1	4D-Asiacall, geometrisch	94
A.4.2	8D-Asiacall, geometrisch	95
A.4.3	12D-Asiacall, geometrisch	96
A.4.4	4D-Asiacall, arithmetisch	97
A.5	Performance-Orientierte Optionen	98
A.5.1	4D-Tailored Call	98
A.5.2	8D-Tailored Call	99

Kapitel 1

Einleitung

Termingeschäfte werden im aktuellen Börsengeschehen immer wichtiger, insbesondere nach Erscheinen der Arbeit von F.Black und W.Scholes im Jahre 1973[4], in der erstmals ein Verfahren zur effizienten Bewertung von Terminkontrakten vorgestellt wurde.

Ein Terminkontrakt gibt dem Käufer das Recht (oder die Pflicht) den Vertragsgegenstand, wie z.B. Aktien oder Rohstoffe zu einem festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. Er zeichnet sich dadurch aus, daß der eigentliche Handel (also der Austausch: Ware gegen Geld) nicht bei Vertragsabschluß, sondern erst in der Zukunft stattfindet.

Ursprünglich dienten Termingeschäfte der Risikoabsicherung. So kann sich z.B. eine Fluggesellschaft gegen das Risiko von Ölpreis-Schwankungen absichern, indem sie die Option erwirbt, eine bestimmte Menge Kerosin zu einem bestimmten Preis kaufen zu dürfen.

Der direkte Vertragsabschluß zwischen Lieferant und Kunde machte die Verhandlungen aber langwierig und damit teuer. Daher werden Terminkontrakte heute in standardisierter Form an Börsen gehandelt und zwar in Form von Optionsscheinen an normalen Wertpapierbörsen oder in Form von Optionen und Futures an speziellen Terminbörsen. Neben dem Kostenvorteil können hierdurch deutlich mehr Parteien am Handel teilnehmen, so daß ein Funktionieren der Mechanismen eines freien Marktes besser gewährleistet ist.

Neben den Aspekt der Risikoabsicherung tritt immer stärker auch das Interesse an reiner Spekulation. Der Wert einer Option schwankt durch die sogenannte Hebelwirkung deutlich stärker als der Kurs des Basiswertes. Somit kann man mit geringerem Kapitaleinsatz höhere Gewinne erzielen. Allerdings ist auch ein Totalverlust des eingesetzten Kapitals möglich bzw. bei bestimmten Arten von Termingeschäften auch ein Verlust über das eingesetzte Kapital hinaus.

Die entscheidende Frage beim Kauf einer Option ist nun, wieviel dieser Vertrag wert ist. Das Risiko von Kursschwankungen verschwindet ja nicht mit Abschluß des

Vertrages, sondern es wird vom Verkäufer übernommen. Somit zahlt der Käufer bei Vertragsabschluß eine sogenannte Prämie an den Verkäufer.

An den Börsen findet die Preisbildung in der Regel nach dem Prinzip von Angebot und Nachfrage statt – der Markt selbst reguliert den Preis. Wenn aber zu wenig Kontrakte gehandelt werden, weil Angebot oder Nachfrage zu gering sind, stellt sich die Frage, wie der Preis festgelegt werden sollte.

Natürlich wird hier nicht in die Preisbildung eingegriffen, sondern es gibt lediglich die Möglichkeit den sogenannten „fairen Preis“ zu bestimmen, der gerade dem theoretischen Wert der Option entspricht. Dieser Wert dient nur der Orientierung – am Markt werden Optionen sowohl über als auch unter diesem Wert gehandelt.

Die Berechnung dieses Wertes beruht auf einem Ansatz für die Simulation von Aktienkursen, der den Kursverlauf mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung beschreibt. Auf dieser Grundlage kann man nun den Erwartungswert des Optionswertes am Verfallstag bestimmen und von diesem wiederum auf den aktuellen Kurs zurückrechnen.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit sollen nun Verfahren vorgestellt werden, die es ermöglichen, den Wert einer Option anhand weniger bekannter Kennzahlen numerisch zu bestimmen, da die Bestimmung des exakten Wertes nur bei wenigen Optionstypen überhaupt möglich ist. Aus der Vielzahl der zu diesem Thema erschienenen Veröffentlichungen seien an dieser Stelle nur die Bücher von Wilmott[43] und Neftci[29] erwähnt.

Während der Wert europäischer Optionen nach Black/Scholes[4] exakt bestimmt werden kann, treten bei pfadabhängigen und performance-orientierten[27, 25] Optionen mehrdimensionale Integrationsprobleme auf. Hierbei wird man mit dem “Fluch der Dimension”[41, 3] konfrontiert, der den exponentiellen Abfall der Konvergenzrate mit größer werdender Zahl der Dimensionen bezeichnet.

Ziel dieser Arbeit ist der Vergleich und die Entwicklung von Integrationsverfahren, die auch für höhere Dimensionen geeignet sind. Hierfür wird neben klassischen Integrationsverfahren[38, 35, 6], Monte-Carlo-Verfahren[21] und dem Quasi-Monte-Carlo-Verfahren[30, 31, 40] auch die Dünngitterintegration[37, 17] angewandt.

Es wird versucht ein Verfahren zu entwickeln, das in der Lage ist beliebige Optionen zu bewerten, ohne daß es individuell angepaßt werden muß. Dies wird durch eine Transformation des Integrationsgebietes erreicht, die so in den Algorithmus integriert ist, daß sie sowohl für pfadabhängige als auch für performance-orientierte Optionen funktioniert. Es wird sich zeigen, daß dieser Ansatz bei mittleren Dimensionen ($n \leq 8$) Vorteile gegenüber dem Monte-Carlo- und dem Quasi-Monte-Carlo-Ansatz bietet.

Da verschiedene Verfahren auf Integrale der Normalverteilung zurückgreifen, beschäftigen sich die ersten Kapitel mit eben dieser Problematik. Anhand der Integration der 1-dimensionalen Normalverteilung werden in Kapitel 2 zunächst die verschiedenen

Quadraturverfahren vorgestellt. Diese werden dann zur Berechnung der kumulativen Normalverteilung eingesetzt und mit den Approximationsverfahren nach Moro[28], Abramovitz[1] und Cody[7] verglichen.

In Kapitel 3 wird dann die mehrdimensionale Normalverteilung behandelt, die z.B. bei der Bewertung performance-orientierter Optionen nach Korn[25] benötigt wird. Hier wird auch auf die besondere Problematik der mehrdimensionalen Integration[41] eingegangen und es werden entsprechende Verfahren vorgestellt. Außerdem wird eine Transformation beschrieben, die die Integration der Normalverteilung erheblich erleichtert[15].

Die wirtschafts-wissenschaftlichen Grundlagen für die weiteren Ausführungen bildet das Kapitel 4. Hier wird die eigentliche Idee des Terminhandels erläutert[46, 47, 48]. Neben den Grundbegriffen werden auch schon die Grundgedanken der Optionscheinbewertung erklärt. Außerdem wird ein Modell zur Simulation von Aktienkursen aufgestellt, daß ebenfalls in den weiteren Kapiteln eingesetzt wird[43].

Die folgenden Kapitel der Arbeit beschäftigen sich dann jeweils mit einzelnen Optionstypen. In Kapitel 5 wird zunächst der einfachste Optionstyp, nämlich die europäische Option, untersucht. Die verschiedenen Verfahren, die für ihre Bewertung zur Verfügung stehen, werden kurz vorgestellt und anschließend miteinander verglichen. Hier finden auch die Ergebnisse aus Kapitel 2 Anwendung, da für das Black-Scholes-Verfahren[4] die Berechnung von 1-dimensionalen Normalverteilungen notwendig ist.

In Kapitel 6 wird die Klasse der pfadabhängigen Optionen eingeführt. Während für pfadabhängige Optionen mit geometrischem Mittel noch eine exakte Lösung durch eine Modifikation des Black-Scholes-Verfahrens aus Kapitel 5 bestimmt werden kann, ist dies allgemein nicht mehr möglich. Die Bewertung dieser Optionen führt dann auf das Problem von mehrdimensionalen Integralen. Neben den Ansätzen durch direkte Integration der Payoff-Funktion wird eine Transformation vorgeschlagen, die die Konvergenz insbesondere des Dünngitter-Verfahrens deutlich verbessert. Wir vergleichen zunächst anhand der geometrischen asiatischen Optionen die verschiedenen Verfahren mit der exakten Lösung nach Black-Scholes. Anschließend wird gezeigt, daß die vorgeschlagene Transformation auch bei arithmetischen asiatischen Optionen zu dem richtigen Ergebnis führt.

Performance-orientierte Optionen werden in Kapitel 7 vorgestellt und es wird auf die besondere Problematik ihrer Bewertung eingegangen. Das Verfahren der Transformation des Integrationsgebietes wird auch hier angewandt und es zeigt sich, daß es zumindest in niedrigen Dimensionen einen Vorteil bringt. Durch die besonderen Eigenschaften der performance-orientierten Optionen versagt es aber bei höheren Dimensionen ($d > 4$). Hier setzt ein von Korn[25] vorgeschlagenes Verfahren an, daß den Wert einer pfadabhängigen Option durch Gebietszerlegung und Transformation auf Integrale von mehrdimensionalen Normalverteilungen zurückführt. Mit den Ergebnissen aus Kapitel 3, insbesondere dem Verfahren von Genz[15], ist es möglich

auch Optionen bis zu 8 Dimensionen zu bewerten.

Den Abschluß dieser Arbeit bildet die Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse in Kapitel 8. Desweiteren werden an dieser Stelle noch einmal die Probleme und Grenzen der implementierten Verfahren aufgezeigt, sowie Ansätze für weitere Forschungen beschrieben.

Kapitel 2

Eindimensionale Normalverteilung

2.1 Einführung

Bei der Berechnung der Werte von Finanzderivaten spielen verschiedene Normalverteilungen eine Rolle. Besonderes Augenmerk gilt dabei der *kumulativen Normalverteilung* und der zugehörigen *inversen Normalverteilung*. Für die weiteren Betrachtungen ist es daher wichtig, daß zur Berechnung dieser beiden Funktionen möglichst effiziente Verfahren zur Verfügung stehen. In diesem Kapitel werden daher verschiedene Ansätze zu ihrer Berechnung vorgestellt und die Performance der einzelnen Verfahren verglichen.

Im Falle der kumulativen Normalverteilung werden zunächst Quadraturverfahren eingesetzt. Dies sind im einzelnen: die Trapez-Regel und die Simpson-Regel[38, 35], die Quadratur nach Clenshaw-Curtis[6], das Monte-Carlo-[21] und das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren[19]. Verglichen werden sie mit den speziellen Approximationsverfahren nach Abramovitz/Stegun[1], Moro[28] und Cody[7].

Für die inverse Normalverteilung finden sich in der Literatur nur zwei Lösungsansätze, die hier vorgestellt werden. Und zwar sind dies das Approximationsverfahren nach Moro[28] und das Verfahren nach Kennedy/Gentle[24], das z.B. in der NAG Library implementiert ist und keinen direkten Ansatz verfolgt, sondern eine Bestimmungsgleichung mittels des Newton-Verfahrens löst.

Wir beginnen aber zunächst mit der *Gauss'schen Normalverteilung*, die die Grundlage für die weiteren Betrachtungen bildet.

2.2 Gauss'sche Normalverteilung

Die Gauss'sche Normalverteilung (mit Mittel 0 und Varianz 1), die auch als Standardnormalverteilung bezeichnet wird, wird durch die Funktion

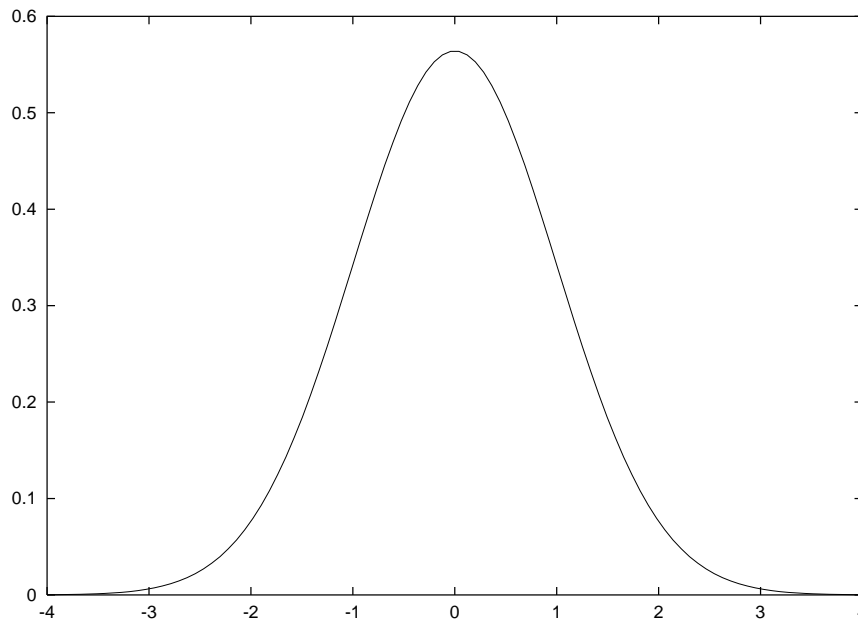


Bild 2.1: Gauss'sche Normalverteilung

$$\phi_{(0,1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

beschrieben.

Die Funktionswerte von $\phi_{(0,1)}(t)$ lassen sich offensichtlich direkt aus der Formel berechnen. Der Graph dieser Funktion ist die bekannte Gauss'sche Glockenkurve (Bild 2.1).

Die allgemeinere Form der Normalverteilung mit Mittel μ und Varianz σ wird durch die Funktion

$$\phi_{(\mu,\sigma)}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

beschrieben. Eine (μ,σ) -Normalverteilung lässt sich aber immer mit Hilfe folgender Formel auf die Standardnormalverteilung zurückführen:

$$\phi_{(\mu,\sigma)}(t) = \sigma\phi_{(0,1)}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

2.3 Kumulative Normalverteilung

Die kumulative Normalverteilung ist das Integral von $-\infty$ bis x über die Gauss'sche Normalverteilung. Also

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Für dieses Integral gibt es keine geschlossene Lösung. Daher ist man bei der Berechnung auf Näherungsverfahren angewiesen.

Da $\phi(t)$ achsensymmetrisch ist, besteht der Zusammenhang

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

und man kann sich bei der Auswertung auf positive x beschränken.

Weiterhin gilt aufgrund der Normierung von $\phi(t)$

$$\Phi(x) = 0.5 + \int_0^x \phi(t) dt \quad \text{für } x \geq 0$$

Für beliebiges x ist also stets nur ein einfaches Integrationsproblem über ein geschlossenes, endliches Intervall zu lösen.

Dies ist extrem wichtig, da die Integration der Normalverteilung über ein unendliches Intervall numerisch problematisch ist. Nichtadaptive Verfahren scheitern meist an dem lokalen Charakter der Funktion, da ein Grossteil der Stützstellen in Bereichen liegt, wo die Funktionswerte nahe 0 liegen und somit wenig zum Integral beitragen.

Im 1-dimensionalen Fall läßt sich dieses Problem durch obige Umformung leicht umgehen. In Kapitel 3 wird sich aber dieselbe Problematik im mehrdimensionalen Fall stellen.

2.3.1 Quadratur

Einführung

Ein allgemeines numerisches Quadraturverfahren hat die Form

$$\int f(x) dx \approx Q f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

wobei x_i die Stützstellen und w_i die dazugehörigen Gewichtungsfaktoren darstellen. Für unser Problem ergibt sich daraus

$$\Phi(x) \approx 0.5 + \sum_{i=1}^n w_i \phi(x_i)$$

Die Quadraturverfahren sind skalierbar, d.h. man kann durch Veränderung der Anzahl der ausgewerteten Punkte die Genauigkeit des Verfahrens beeinflussen. Dies hat den Vorteil, daß die benötigte Rechenzeit verkürzt werden kann, wenn man nur eine geringe Genauigkeit benötigt bzw. auch eine (theoretisch) beliebig hohe Genauigkeit erzielt werden kann, wenn man nur lange genug rechnet.

Die Quadratur-Verfahren unterscheiden sich in ihrer Konvergenzrate. Die Konvergenzrate ist ein Maß für die Abhängigkeit der Genauigkeit eines numerischen Integrationsverfahrens von der Anzahl der Stützstellen. Es besteht die Proportionalität

$$\left| \int f(x) dx - Q f \right| = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$$

wobei die linke Seite den absoluten Fehler des Integrationsverfahrens beschreibt und α die Konvergenzrate darstellt. Eine Konvergenzrate von $\alpha = 2$ würde also bedeuten, daß man die Anzahl der Stützstellen verdoppeln muß, um den Fehler um den Faktor 4 zu verringern.

Trapez und Simpson-Regel

Man kann das Integral mit einem Standard-Quadratur-Verfahren mit äquidistanten Stützstellen wie der Trapez-Regel

$$\Phi(x) \approx 0.5 + \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\phi(x_i) + \phi(x_{i+1})}{2} \quad \text{mit} \quad x_i = \frac{x * i}{n}$$

oder der Simpson-Regel

$$\Phi(x) \approx 0.5 + \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\phi(x_i) + 4\phi\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \phi(x_{i+1})}{6} \quad \text{mit} \quad x_i = \frac{x * i}{n}$$

berechnen.

Die einfache Trapez-Regel weist eine Konvergenzrate von 2 auf, die Simpsonregel erreicht bereits eine Konvergenzrate von 4.

Gauss-Quadratur

Höhere Konvergenzraten erreicht man durch Verwendung der Gauss-Quadratur-Formeln, bei denen die Stützstellen nicht äquidistant sein müssen, sondern so gewählt werden, daß der polynomiale Exaktheitsgrad der Quadraturformel maximiert wird. Sie weisen im Idealfall, d.h. wenn die zu integrierende Funktion hinreichend glatt

ist, eine exponentielle Konvergenz auf. Nachteil dieses Verfahrens ist, daß die Berechnung der Stützstellen und Gewichte sehr aufwändig ist. Im Rahmen der Berechnungen zu dieser Arbeit ist die Gauss-Quadratur deshalb nicht berücksichtigt worden.

Clenshaw-Curtis-Quadratur

Einfacher als die Gauss-Quadratur, jedoch ähnlich in ihren Eigenschaften, sind die *Clenshaw-Curtis-Formeln*. Sie beruhen auf einer Interpolation der Funktion mit Chebyshev-Polynomen. Die Stützstellen x_i sind dann gerade die Nullstellen oder die Extremstellen dieser Chebyshev-Polynome. Werden die Extremstellen verwendet, so erhält man ein geschachteltes Gitter.

Die Stützstellen sind dann

$$x_{li} = -\cos \frac{\pi(i-1)}{n-1}$$

und die zugehörigen Gewichte

$$w_{l1} = w_{ln} = \frac{1}{n(n-2)}$$

und

$$w_{li} = \frac{2}{n} \left(1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{1-4j^2} \cdot \cos \frac{2\pi(i-1)j}{n-1} \right) \quad \text{für } 2 \leq i \leq n-1$$

Das Summenzeichen \sum bedeutet dabei, daß der letzte Summand halbiert wird.

Die offene Variante der Clenshaw-Curtis-Formeln sind die sogenannten *Filippi-Formeln*, die man durch Weglassen der Randpunkte erhält.

Die Clenshaw-Curtis-Quadratur weist im Idealfall, d.h. wenn die Funktion hinreichend glatt ist, ebenfalls eine exponentielle Konvergenz auf. Da die Normalverteilung unendlich oft stetig differenzierbar ist, ist diese Bedingung natürlich erfüllt.

Monte-Carlo-Verfahren (MC-Verfahren)

Eine weitere Möglichkeit zur numerischen Integration ist das Monte-Carlo-Verfahren. Es ist im eindimensionalen Fall den anderen Verfahren unterlegen, da es nur eine Konvergenzrate von $1/2$ aufweist, während die anderen Verfahren bei glatten Funktionen durchweg höhere Konvergenzraten erzielen. Seinen wahren Vorteil kann das

Monte-Carlo-Verfahren erst in höheren Dimensionen ausspielen, da es im Gegensatz zu den anderen Verfahren dimensionsunabhängig arbeitet.

Die Funktion wird an n zufälligen, uniform verteilten Stellen ausgewertet, die alle gleich stark gewichtet werden

$$\Phi(x) \approx 0.5 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(x_i) \quad \text{mit } x_i = \text{uniform verteilte Zufallszahlen aus } [0, x]$$

In der Praxis stehen meist keine echten Zufallszahlen zur Verfügung. Man muß somit Pseudo-Zufallszahlen verwenden, wie sie z.B. die Standardbibliotheken zur Verfügung stellen. Hierdurch wird das Verfahren nicht beeinträchtigt.

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren (QMC-Verfahren)

Das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren ist, wie der Name schon vermuten lässt, eine Abwandlung des MC-Verfahrens. Statt (Pseudo-) Zufallszahlen zu verwenden, setzt man hier auf uniform verteilte Stützstellen, die nicht zufällig sind, sondern explizit berechnet werden. Hierfür stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Das hier verwendete geht auf Halton[19] zurück.

Die Halton-Folge wird in einer Dimension erzeugt, indem man zu einer Primzahl p die Folge $0, 1, 2, \dots, N$ als Zahlen zur Basis p umschreibt. Die n -te Zahl der Folge ist dann also zerlegt in

$$z_n^p = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots + \frac{a_m}{p^{m+1}}$$

wobei die a_i gerade die Ziffern der Darstellung von $n - 1$ zur Basis p sind.

$$[n - 1]_p = a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 a_0 \quad \text{mit } 0 \leq a_i < p$$

Zum Beispiel lautet die Halton-Folge für $p = 3$

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{5}{27}, \frac{8}{27}, \frac{1}{81}, \frac{10}{81}, \frac{19}{81}, \dots$$

Die so erzeugten Punkte sind uniform auf das Intervall $(0; 1)$ verteilt.

2.3.2 Approximation

Die schnellsten Verfahren zur Berechnung der kumulativen Normalverteilung beruhen nicht auf der direkten Integration der Funktion, sondern auf der Approximation von $\Phi(x)$ mit stückweise gebrochen-rationalen Funktionen.

Auch hierfür gibt es verschiedene Ansätze, die sich in der Genauigkeit der Approximation unterscheiden. Je höher die Ansprüche an die Genauigkeit sind, umso exakter muß $\Phi(x)$ approximiert werden und um so langsamer werden die Verfahren.

Im Vergleich werden die Verfahren von Moro[28], Abramowitz und Stegun[1] und das in der NAG-Lib implementierte Verfahren von Cody[7] verwendet.

2.4 Numerische Ergebnisse

2.4.1 Einführung

Beim Performance-Vergleich von numerischen Verfahren betrachtet man den Fehler des Verfahrens im Verhältnis zum benötigten Aufwand. Der Fehler des Verfahrens ist dabei der Betrag der Differenz zwischen numerischer und exakter Lösung. Als Maß für den Aufwand kann man entweder die tatsächlich benötigte Zeit nehmen oder auch die Zahl der benötigten Funktionsauswertungen (bei Integrationsverfahren). Die Angabe der Funktionsauswertungen hat den Vorteil, daß sie in der Regel nicht von der Implementierung abhängt und schon gar nicht von der verwendeten Hardware.

Die benötigte Zeit ist zwar sowohl implementations-abhängig als auch hardware-abhängig, berücksichtigt aber dafür auch alle Teile des Algorithmus, wie z.B. Umformungen der eigentlichen Funktion oder Gebietstransformationen.

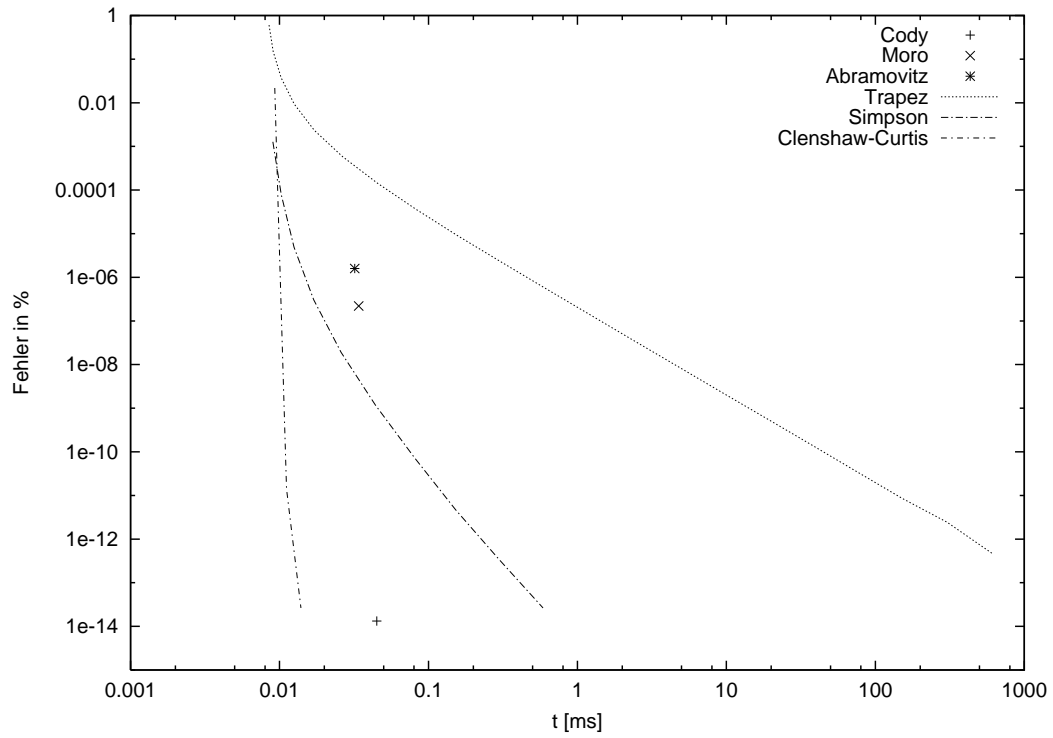
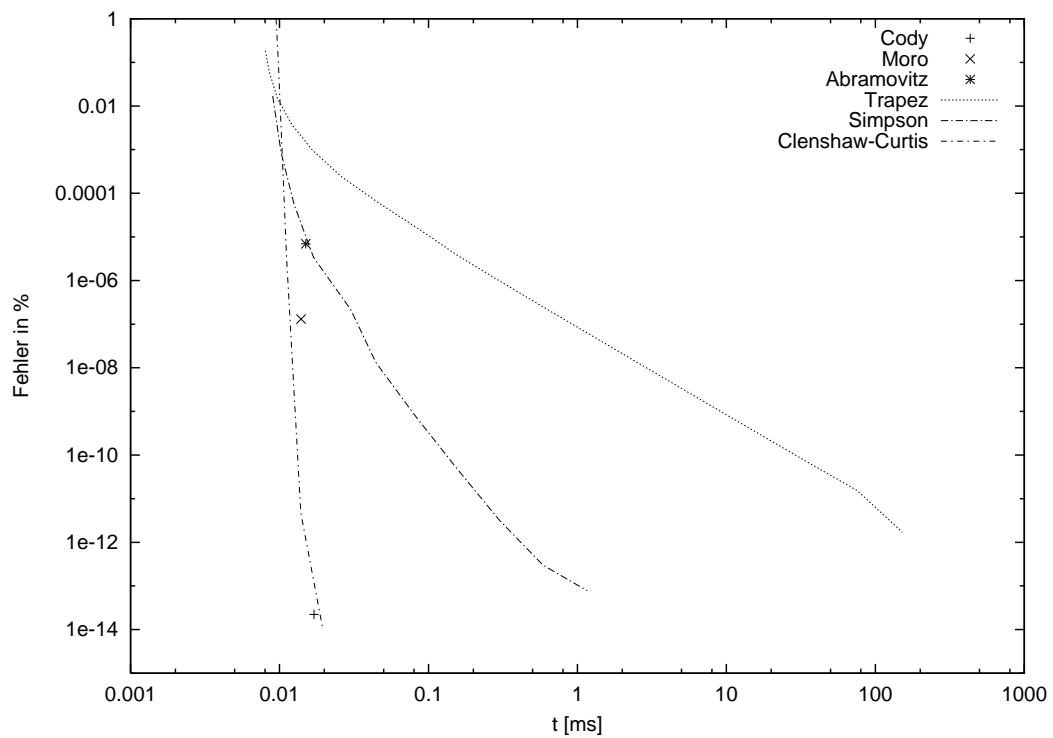
In dieser Arbeit wird daher meist die real benötigte Rechenzeit angegeben. Um die Werte vergleichbar zu halten, wurden alle Berechnungen innerhalb der Kapitel auf derselben Hardware und mit denselben Compiler-Optionen durchgeführt.

Das Haupt-Augenmerk beim Performance-Vergleich liegt aber sowieso nicht auf den absoluten Zeiten sondern auf dem Vergleich zu den anderen Verfahren.

2.4.2 Performance-Vergleich

Mit Hilfe der verschiedenen Verfahren wurden die Näherungswerte für $\Phi(1)$ und $\Phi(3)$ berechnet. Die Ergebnisse der Messungen sind in tabellarischer Form auszugsweise im Anhang A enthalten.

Die Performance eines Verfahrens wird durch das Verhältnis von Genauigkeit zu benötigtem Rechenaufwand bestimmt. Während die nicht skalierbaren Verfahren

(a) $x = 1$ (b) $x = 3$ Bild 2.2: Fehler von $\Phi(x)$ gegen die exakte Lösung (Clenshaw-Curtis($n = 14$))

hier nur ein Wertepaar als Maß für die Performance liefern, erhält man bei den skalierbaren Verfahren eine ganze Reihe von Wertepaaren.

Anschaulich wird die Performance der Verfahren in Bild 2.2. Hier ist in einem doppeltlogarithmischen Diagramm der relative Fehler gegen die Rechenzeit des Verfahrens aufgetragen. Für die skalierbaren Verfahren kann man aus diesem Plot direkt die Konvergenzrate ablesen. Es ist gerade die negative Steigung der Verbindungslinie der verschiedenen Punkte des Verfahrens.

Die Ordnung der skalierbaren Verfahren ist somit:

- Trapezregel: Ordnung 2
- Simpson-Regel: Ordnung 4
- Monte-Carlo: Ordnung 1/2
- Quasi-Monte-Carlo: Ordnung 1
- Clenshaw-Curtis: Ordnung 40

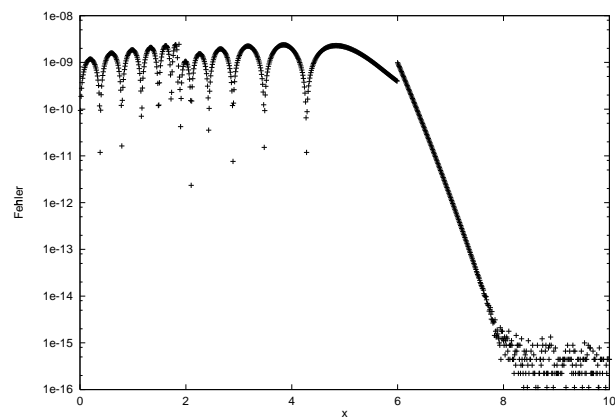
Von den Quadratur-Verfahren schneidet das Clenshaw-Curtis-Verfahren, wie erwartet, am besten ab. In den weiteren Kapiteln werden wir daher meist nur das Clenshaw-Curtis-Verfahren in Diagrammen aufführen, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Die Approximationsverfahren stellen eine interessante Alternative zu dem Quadraturansatz da und liegen bei der Performance im Bereich des Clenshaw-Curtis-Verfahrens. Falls eine Genauigkeit von 10^{-8} ausreicht, kann man das Moro-Verfahren verwenden, bei höheren Anforderungen sollte man auf den Algorithmus nach Cody[7] zurückgreifen, wie er zum Beispiel in der NAG Library implementiert ist. Das Verfahren von Abramowitz ist hingegen nicht sinnvoll, da es bei nahezu gleichem Zeitbedarf wie das Moro-Verfahren, eine deutlich schlechtere Genauigkeit liefert.

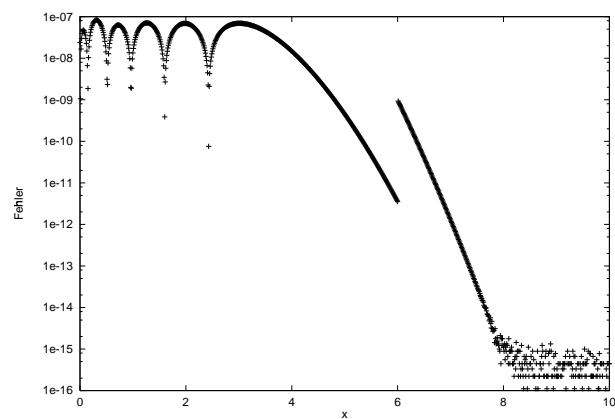
2.4.3 Approximationsfehler

Obwohl die Approximationsverfahren im Performance-Vergleich gut abschneiden, bleibt der Nachteil, daß sie nicht skalieren. Sie besitzen für jede Stelle x einen festen Fehler, den man nicht durch längeres Rechnen ausgleichen kann. Daher ist es interessant festzustellen, wie groß dieser Fehler werden kann.

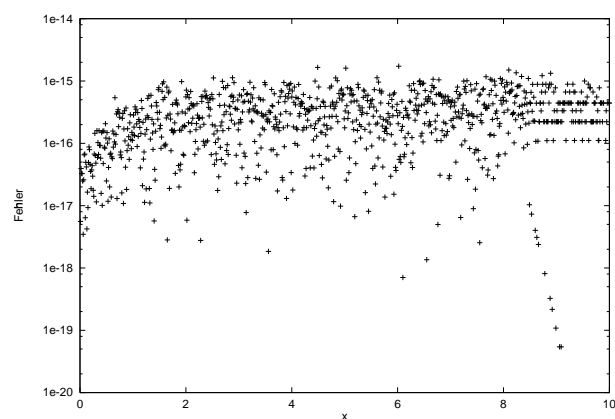
In Bild 2.3 ist der Fehler der Approximationsverfahren gegen die exakte Lösung auf einem Intervall angegeben. Man sieht, daß der Fehler der Approximationsverfahren nach Moro und Abramowitz stark von der ausgewerteten Stelle x abhängt, aber stets nach oben beschränkt bleibt. Die Cody Methode weist auf dem gesamten Bereich einen Fehler $\leq 10^{-14}$ auf und ist somit deutlich besser als die beiden anderen Verfahren, allerdings auch um den Faktor 2 langsamer.



(a) Moro



(b) Abramowitz



(c) Cody

Bild 2.3: Fehler von $\Phi(x)$ gegen die exakte Lösung (Clenshaw-Curtis($n = 10$))

Die Entscheidung zwischen Moro und Cody richtet sich also nach den Anforderungen an die Genauigkeit. In dieser Arbeit verwenden wir das Cody-Verfahren nur zur Berechnung von Referenzwerten. Die eigentlichen Rechnungen werden mit Hilfe des Moro-Verfahrens durchgeführt.

2.5 Integral der Normalverteilung

Das Integral der Normalverteilung über ein beliebiges Intervall

$$\int_a^b \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

läßt sich entweder per numerischer Integration berechnen, oder man verwendet die Zerlegung

$$\int_a^b \phi(t) dt = \int_{-\infty}^b \phi(t) dt - \int_{-\infty}^a \phi(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

und reduziert das Problem auf die Berechnung von zwei kumulativen Normalverteilungen.

Das ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn man hierfür kein Quadraturverfahren verwendet, sondern auf eines der schnelleren Approximationsverfahren zurückgreift. Dies kann aber, wie der obige Performance-Vergleich zeigt, schneller als die direkte Quadratur, obwohl die kumulative Normalverteilung zweimal berechnet werden muß.

Eine extra Performance-Messung wurde für diese Problemstellung nicht durchgeführt, da keine neuen Erkenntnisse zu erwarten sind.

2.6 Inverse Normalverteilung

Unter der inversen Normalverteilung $\Phi^{-1}(p)$ versteht man die Umkehrfunktion der kumulativen Normalverteilung. Also die Funktion für die gilt

$$\Phi(\Phi^{-1}(p)) = p$$

Zu ihrer Berechnung gibt es grundsätzlich zwei unterschiedliche Verfahren:

2.6.1 Nullstellen-Verfahren

Man kann $x = \Phi^{-1}(p)$ berechnen, indem man das Nullstellenproblem

$$\Phi(x) - p = 0$$

löst. Hierfür bietet sich z.B. das Newton-Verfahren an, das auch in dem Verfahren nach Kennedy/Gentle[24] verwendet wird.

Der Aufwand eines solchen Verfahrens hängt also sowohl vom Verfahren zur Nullstellenbestimmung als auch zur Berechnung von $\Phi(x)$ ab. Sinnvoll sind hier eigentlich nur die Approximationsverfahren, da Quadraturverfahren bei hoher Genauigkeit zu viel Rechenzeit benötigen.

Die Genauigkeit von $x = \Phi^{-1}(p)$ hängt natürlich ganz wesentlich von der Genauigkeit von $\Phi(x)$ ab.

2.6.2 Approximation

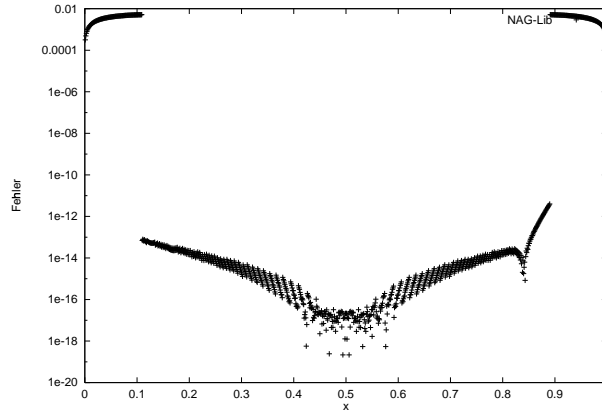
Von Moro[28] gibt es auch für diese Funktion eine Approximation, die es ermöglicht, $\Phi^{-1}(p)$ mit hoher Genauigkeit sehr schnell zu berechnen. Hierzu wird die inverse Normalverteilung stückweise mit ganzrationalen bzw. logarithmischen Funktionen interpoliert.

2.6.3 Vergleich der Verfahren

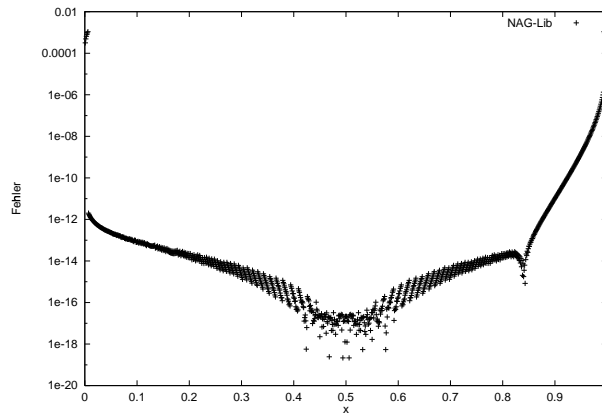
In Bild 2.4 ist jeweils der Differenzbetrag $|\Phi(\Phi^{-1}(p)) - p|$ für die einzelnen Verfahren gegen p aufgetragen. Man kann hier also den Fehler der Näherungsfunktion an einer beliebigen Stelle p ablesen. Man sieht, dass die Newton-Verfahren eine deutlich bessere Genauigkeit liefern als Moro. Allerdings sind in den Randbereichen ($p \approx 0$ oder $p \approx 1$) sehr viele Iterationen erforderlich, bis das Verfahren ein brauchbares Ergebnis liefert, da $\Phi^{-1}(p)$ hier sehr steil ist. Bei äquidistant verteilten Werten ist das Verfahren nach Moro 125-mal schneller als die Kennedy/Gentle-Verfahren aus der NAG-LIB mit maximal 100 Iterationen und sogar 900-mal schneller als mit maximal 10000 Iterationen.

Man muß jedoch berücksichtigen, daß in der Praxis die Randwerte deutlich seltener vorkommen als die Werte in der Mitte des Intervalls. Und der Performance-Vorteil schrumpft auf den Faktor 50 zusammen, wenn man sich auf Werte aus $[0.25 : 0.75]$ beschränkt.

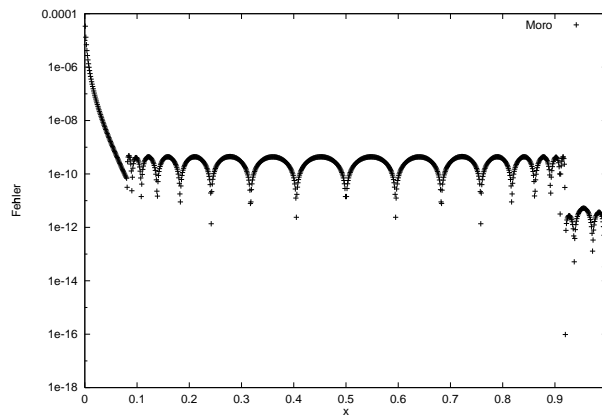
Dennoch bleibt ein massiver Geschwindigkeitsvorteil für das Moro-Verfahren bestehen. In den meisten Fällen reicht die Genauigkeit des Moro-Verfahrens aus. Auch bei den Implementierungen im Rahmen dieser Arbeit wurde stets das Moro-Verfahren zur Berechnung der inversen Normalverteilung verwendet.



(a) Kennedy/Gentle (100 Iterationen)



(b) Kennedy/Gentle (10000 Iterationen)



(c) Moro

Bild 2.4: Fehler der Inversen Normalverteilung: $\Phi(\Phi^{-1}(p)) - p$

Kapitel 3

Mehrdimensionale Normalverteilung

3.1 Einführung

Obwohl die Berechnung der eindimensionalen Normalverteilung zur Bewertung einer großen Gruppe von Optionen zur ausreicht, werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf Verfahren stoßen, die die effiziente Berechnung von Integralen mehrdimensionaler Normalverteilungen erfordern.

Für 2- und 3-dimensionale Normalverteilungen gibt es spezielle Verfahren z.B. von Cox/Wermuth[8], Donnelly[13] und Drezner/Wesolowsky[14], die auf Approximation der Funktion beruhen. Verfahren für beliebige Dimensionen wurden von Schervish[36] (bis 8D), Deák[10, 11], Tong[39] und Genz[15] entwickelt. In Vergleichen dieser Verfahren in [2] und [16] zeigte das Verfahren von Genz seine Überlegenheit.

In diesem Kapitel werden wir die Problematik der direkten numerischen Integration der mehrdimensionalen Normalverteilung aufzeigen, sowie die von Genz vorgeschlagene Transformation beschreiben. Während Genz für die Integration das Monte-Carlo-Verfahren vorschlägt, werden wir aber auch ein Dünngitter-Verfahren einsetzen, um zu testen, ob hierdurch eine weitere Performance-Steigerung möglich ist.

3.2 Normalverteilung

Die Formel der Normalverteilung lautet im mehrdimensionalen Fall

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|A|(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t A^{-1} \mathbf{x}}$$

Wobei n die Dimension bezeichnet, \mathbf{x} ein Vektor und A eine symmetrische, positiv semi-definite $n \times n$ Matrix ist, die sogenannte Korrelationsmatrix. $|A|$ bezeichnet die Determinante der Korrelationsmatrix.

Auch die Werte der mehrdimensionalen Normalverteilung lassen sich direkt aus der Formel berechnen.

Die Normalverteilungen mit den Korrelationsmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & .6 \\ .6 & .6 \end{pmatrix}$$

sind in Bild 3.1 dargestellt. Zur Verdeutlichung des Einflusses der Korrelationsmatrix ist dort nicht nur der Surface-Plot zu sehen, sondern auch die zugehörigen Isolinien.

3.3 Numerische Integration in n Dimensionen

3.3.1 Monte-Carlo-Verfahren

Das Monte-Carlo-Verfahren läßt sich sehr leicht auf n Dimensionen erweitern. Der einzige Unterschied ist, daß nun statt einer einfachen Zufallszahl der n -dimensionalen Zufallsvektor \mathbf{x} benötigt wird. Diesen erhält man aber leicht, indem man jeweils n Zufallszahlen x_i zu einem Vektor zusammenfaßt.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad x_i \text{ uniform verteilte Zufallszahlen}$$

3.3.2 Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Für die mehrdimensionale Quasi-Monte-Carlo-Methode benötigen wir ein Verfahren, um uniform verteilte Punkte auf einem Hyperwürfel zu erzeugen. Hierzu verwenden wir wieder das Halton-Verfahren[19] wie in 2.3.1. Die Erweiterung auf mehrere Dimensionen erreicht man, indem man für jede Dimension eine andere Primzahl p_i als Basis der Halton-Folge verwendet. Für eine d -dimensionale Folge verwenden wir also die ersten d Primzahlen $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_d) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$. Der n -te Halton Punkt in d Dimensionen ist dann

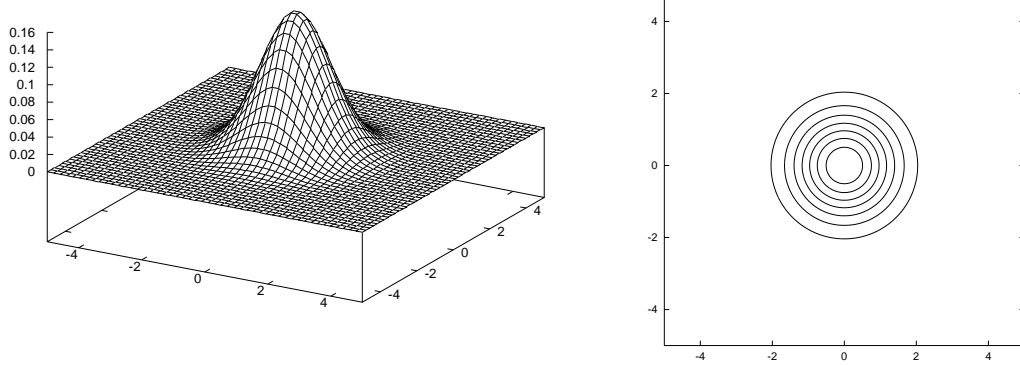
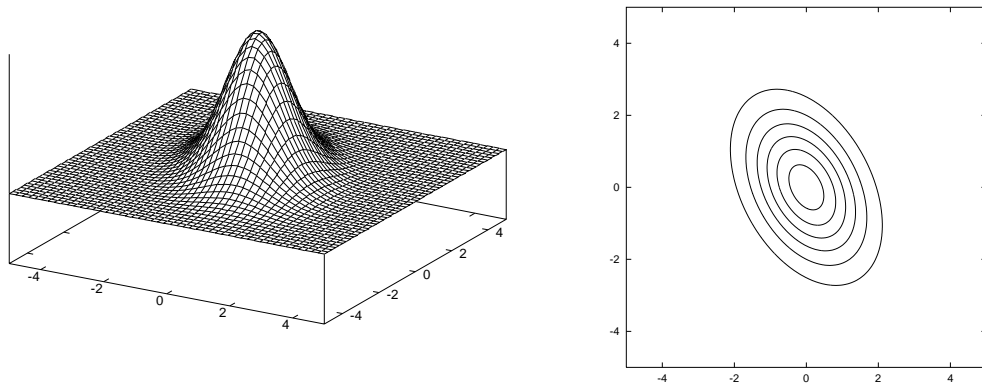
(a) *Korrelationsmatrix* A_1 (b) *Korrelationsmatrix* A_2

Bild 3.1: 2D-Normalverteilung für verschiedene Korrelationsmatrizen (siehe Text)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z_n^{p_1} \\ z_n^{p_2} \\ \vdots \\ z_n^{p_{n-1}} \\ z_n^{p_n} \end{pmatrix}$$

wobei z_n^p gerade der n -te Punkt der eindimensionalen Halton-Folge zur Basis p ist.

3.3.3 Produktansatz für Quadraturverfahren

Eine mehrdimensionale Quadraturformel erhält man aus einer 1-dimensionalen Quadraturformel über den sogenannten Produktansatz.

Ausgehend von einer beliebigen, 1-dimensionalen Quadraturformel Q^1

$$Q^1 f := \sum_{i=1}^{n^1} w_i \cdot f(x_i)$$

bildet man die mehrdimensionale Quadraturformel Q^d

$$Q^d f := (Q^1 \otimes \cdots \otimes Q^1) f$$

Das Tensor-Produkt von d Quadraturformeln $Q^1 \otimes \cdots \otimes Q^1$ ist hierbei definiert als die Summe aller möglichen Kombinationen

$$(Q^1 \otimes \cdots \otimes Q^1) f := \sum_{i_1=1}^{n^1} \cdots \sum_{i_d=1}^{n^1} w_{i_1} \cdot \dots \cdot w_{i_d} \cdot f(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$$

Dieser klassische Produktansatz wird auch als Vollgitter-Verfahren bezeichnet.

Das größte Problem bei der mehrdimensionalen numerischen Integration ist die mit der Anzahl der Dimensionen exponentiell ansteigende Rechenzeit (Fluch der Dimension)[3, 41]. Dieses Phänomen tritt bei allen klassischen Quadraturverfahren auf. Zurückzuführen ist es auf den exponentiellen Anstieg der Funktionsauswertungen bei steigender Dimension und konstanter Schrittweite. Eine Quadraturformel mit n Funktionsauswertungen in einer Dimension, benötigt in d Dimensionen ganze n^d Funktionsauswertungen. Der Fehler eines Vollgitter-Verfahrens besitzt also die Ordnung

$$\left| \int f(x) dx - Q f \right| = \mathcal{O}(n^{-\alpha/d})$$

Hierbei ist α die Konvergenzrate der 1-dimensionalen Quadraturformel.

Es gibt aber auch Verfahren, die nicht dem Fluch der Dimension unterliegen. Eine Ausnahmen bilden z.B. das Monte-Carlo- und das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren. Neben dem Monte-Carlo-Verfahren, das völlig dimensionsunabhängig ist und dessen Fehler immer die Ordnung $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ hat, weist das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren eine logarithmische Abhängigkeit auf, also einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(n^{-1} \log n^{-d})$.

Während bei einem klassischen Quadraturverfahren die Konvergenzrate also mit steigender Dimension exponentiell fällt, so bleibt sie beim MC-Verfahren konstant bei $\frac{1}{2}$ und fällt beim Quasi-Monte-Carlo-Verfahren nur logarithmisch. Es ist leicht einzusehen, daß die Dimension nur hinreichend groß sein muß, damit das QMC-Verfahren oder das MC-Verfahren besser sind als alle anderen klassischen Verfahren.

3.3.4 Dünngitter-Verfahren

Einen möglichen Ausweg bieten hier allerdings moderne Quadraturverfahren, wie z.B. das Dünngitter-Verfahren, das wie das QMC-Verfahren eine logarithmische Abhängigkeit der Konvergenzrate zur Anzahl der Dimensionen aufweist und somit bei hochdimensionalen Integralen durchaus eine Alternative darstellen kann. Sein Vorteil ist, daß die Konvergenzrate des zugrundeliegenden 1D-Verfahrens in die Ordnung eingeht und somit eine exponentielle Konvergenz in höheren Dimensionen erzielt werden kann, wenn die Funktion hinreichend glatt ist.

Das von Smolyak[37] vorgeschlagene Quadratur-Verfahren, das den Fluch der Dimension durchbrechen kann, ist unter den Namen *Blending Methode*[18], *Boolsche Methode*[12] und eben auch *Dünngitter-Verfahren*[45, 17] bekannt.

Allerdings stellt es stärkere Voraussetzungen an die zu integrierende Funktion als das zu Grunde liegende Vollgitter-Verfahren. Falls alle gemischten Ableitungen der Funktion beschränkt bleiben, steigt der Rechenaufwand mit der Dimension nur noch logarithmisch an.

Smolyaks Konstruktion geht von einer 1-dimensionalen Quadraturformel Q_l^1 aus, deren Gitter Γ_l^1 nicht unbedingt geschachtelt sein muß. Im Falle eines geschachtelten Gitters (also $\Gamma_{l-1}^1 \subset \Gamma_l^1$) ist allerdings der Rechenaufwand etwas geringer, da weniger Stützstellen ausgewertet werden müssen.

$$Q_l^1 f := \sum_{i=1}^{n_l^1} w_{li} \cdot f(x_{li})$$

Hierbei bezeichnet w_{li} das Gewicht der i -ten Stützstelle $x_{li} \in \Gamma_l^1$ auf Level l .

Von dieser Quadraturformel Q_l läßt sich nun eine Differenzquadraturformel ableiten, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}\Delta_k^1 f &:= (Q_k^1 - Q_{k-1}^1) f \\ Q_0^1 &:= 0\end{aligned}$$

Auch hierbei handelt es sich um eine (nun hierarchische) Quadraturformel auf dem Gitter $\Gamma_l^1 \cup \Gamma_{l-1}^1$ (im geschachtelten Fall entspricht dies natürlich Γ_l^1).

Die zugehörige mehrdimensionale Produkt-Integrationsformel erhält man wieder wie oben, nur muß man hier über alle Level summieren:

$$Q_l^d f := \sum_{|\mathbf{k}|_\infty \leq l} (\Delta_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes \Delta_{k_d}^1) f$$

In diesem Fall werden alle Stützstellen des vollen Gitters verwendet und die Anzahl der Punkte steigt exponentiell mit der Dimension. Dies entspricht einem Durchlaufen aller Punkte des Würfels $|\mathbf{k}|_\infty \leq l$.

Das Dünngitter-Verfahren schneidet diesen Würfel ab und beschränkt sich auf die Punkte im Simplex $|\mathbf{k}|_1 \leq l + d - 1$. Also:

$$Q_l^d f := \sum_{|\mathbf{k}|_1 \leq l+d-1} (\Delta_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes \Delta_{k_d}^1) f$$

Wenn die Zahl der Stützstellen des 1D-Verfahrens auf Level l $\mathcal{O}(2^l)$ ist, so werden in d Dimensionen nur noch $\mathcal{O}(2^l \cdot l^{d-1})$ Funktionsauswertungen benötigt im Gegensatz zu $\mathcal{O}(2^{ld})$ Funktionsauswertungen beim Vollgitter-Verfahren[42, 32]. Der Fehler des Dünngitter-Verfahrens ist $\mathcal{O}(n^{-\alpha} \cdot \log n^{(\alpha-1)(d+1)})$ und damit gerade in hohen Dimensionen deutlich günstiger als bei einem Vollgitter-Verfahren[17].

Anschaulich wird dieses Verfahren in Bild 3.2. Hier ist das Dünngitter dem Vollgitter bei verschiedenen Leveln gegenüber gestellt, wobei geschachtelte Clenshaw-Curtis-Stützstellen verwendet werden. Diese erhält man, indem man $n_l = 2^{l-1} + 1$ wählt.

3.4 Integral der Normalverteilung

Zu berechnen ist das Integral von $\phi(x)$ über einen beliebigen Hyperwürfel

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{|A|(\sqrt{2\pi})^n} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t A^{-1} \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

Wie schon im 1-dimensionalen Fall existiert hierfür keine geschlossene Lösung. Für beliebiges n stehen auch keine Approximationen zur Verfügung, es bleibt also nur die Möglichkeit das Integral numerisch zu berechnen.

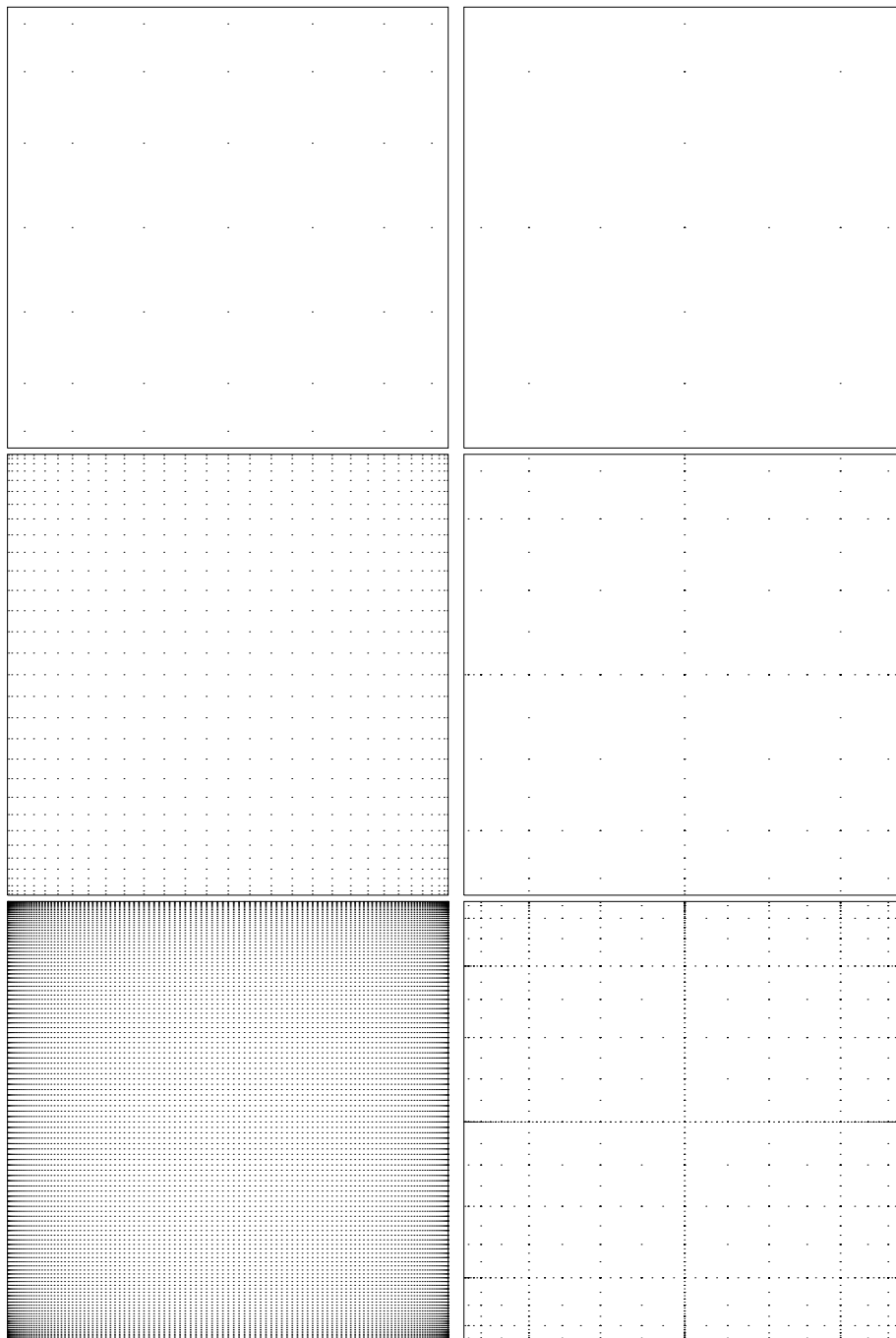


Bild 3.2: Vergleich von Vollgitter und Dünngitter für Clenshaw-Curtis-Stützstellen bei Level 4, 6 und 8

3.4.1 Quadratur der Normalverteilung

Im Fall der Normalverteilung sieht man sich neben dem Fluch der Dimension auch noch mit der Problematik konfrontiert, daß die Funktion fast überall nahe 0 verläuft. Nur ein (im Verhältnis zum ggf. unendlich großen Integrationsgebiet) kleines Gebiet um den Ursprung trägt wesentlich zum Wert des Integrals bei.

Ein nicht-adaptives Verfahren scheitert an dieser Konstellation und liefert erst bei sehr vielen Punkten, die den Peak der Funktion richtig auflösen, vernünftige Ergebnisse. In höheren Dimensionen ($d \geq 6$) kann diese Schrittweite aber meist nicht mehr in vertretbaren Zeiten erreicht werden.

Der Lösungsansatz hierfür sind Transformationen, die die Normalverteilung in eine einfachere, bzw. einfacher zu integrierende Form überführen. Die hier vorgestellte Transformation wurde von A. Genz[15] vorgeschlagen und stellte sich in [16] als das schnellste Verfahren zur Berechnung einer mehrdimensionalen Normalverteilung heraus.

3.4.2 Genz' Algorithmus

Der Algorithmus von Genz verwendet drei Transformationen, die das ursprüngliche Integral

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{|A|\sqrt{2\pi}^n} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t A^{-1} \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

in ein Integral über den Einheitshyperwürfel überführt.

Zuerst wird die Cholesky-Zerlegung $CC^t = A$ der Korrelationsmatrix A bestimmt, bei der C eine untere Dreiecksmatrix ist. Diese Zerlegung existiert für alle positiv-semidefiniten Matrizen.

Setzt man nun $\mathbf{x} = C\tilde{\mathbf{x}}$ ergibt sich

$$\mathbf{x}^t A^{-1} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} C^t C^{-t} C^{-1} C \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^t \tilde{\mathbf{x}}$$

und

$$d\mathbf{x} = |C| d\tilde{\mathbf{x}} = \sqrt{|A|} d\tilde{\mathbf{x}}$$

Aus $\mathbf{a} \leq \mathbf{x} = C\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}$ folgt

$$\frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \tilde{x}_j}{c_{ii}} \leq \tilde{x}_i \leq \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \tilde{x}_j}{c_{ii}}$$

und man erhält somit

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{a'_1}^{b'_1} e^{-\frac{\tilde{x}_1^2}{2}} \int_{a'_2(\tilde{x}_1)}^{b'_2(\tilde{x}_1)} e^{-\frac{\tilde{x}_2^2}{2}} \cdots \int_{a'_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})}^{b'_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})} e^{-\frac{\tilde{x}_n^2}{2}} d\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\text{mit } a'_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}) = \frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \tilde{x}_j}{c_{ii}} \text{ und } b'_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}) = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \tilde{x}_j}{c_{ii}}.$$

Mit Hilfe der inversen Normalverteilung $\Phi^{-1}(z)$ kann nun jedes \tilde{x}_i einzeln transformiert werden:

$$\tilde{x}_i = \Phi^{-1}(z_i)$$

Nach dieser Transformation verschwindet der Integrand und wir erhalten:

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{d_1}^{e_1} \int_{d_2(z_1)}^{e_2(z_1)} \cdots \int_{d_n(z_1, \dots, z_{n-1})}^{e_n(z_1, \dots, z_{n-1})} d\mathbf{z}$$

$$\text{mit } d_i(z_1, \dots, z_{i-1}) = \Phi\left(\frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \Phi^{-1}(z_j)}{c_{ii}}\right) \text{ und } e_i(z_1, \dots, z_{i-1}) = \Phi\left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \Phi^{-1}(z_j)}{c_{ii}}\right).$$

Der Preis für den nun sehr einfachen Integranden ist ein viel komplizierteres Integrationsgebiet, daß man nicht direkt mit Standardintegrationsverfahren behandeln kann.

Mit der Transformation $z_i = d_i + w_i(e_i - d_i)$ erhält man als Integrationsgebiet den Einheitshyperwürfel und als zu berechnendes Integral:

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (e_1 - d_1) \int_0^1 (e_2 - d_2) \cdots \int_0^1 (e_n - d_n) \int_0^1 d\mathbf{z}$$

$$\text{mit } d_i = \Phi\left(\frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \Phi^{-1}(d_j + w_j(e_j - d_j))}{c_{ii}}\right) \text{ und } e_i = \Phi\left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \Phi^{-1}(d_j + w_j(e_j - d_j))}{c_{ii}}\right).$$

Zusammengefaßt ergibt sich dann folgender Algorithmus:

1. Eingabewerte sind: Korrelationsmatrix A , Grenzen \mathbf{a} , \mathbf{b}
2. Berechne Cholesky Zerlegung CC^t von A
3. Setze $d_1 = \Phi(a_1/c_{11})$, $e_1 = \Phi(b_1/c_{11})$ und $f_1 = e_1 - d_1$
4. Für \mathbf{x} der Quadraturformel auf dem $n-1$ -dimensionalen Einheitswürfel mit Gewichten w
5. Für $i = 2, 3, \dots, n$ setze $y_{i-1} = \Phi^{-1}(d_{i-1} + x_{i-1}(e_{i-1} - d_{i-1}))$, $d_i = \Phi((a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij})/c_{ii})$, $e_i = \Phi((b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij})/c_{ii})$ und $f_i = (e_i - d_i)f_{i-1}$
6. Setze $sum = sum + w f_n$
7. Ausgabewert ist: sum Wert des Integrals

Genz verwendet zur Integration der transformierten Funktion das Monte-Carlo-Verfahren. Die hier vorliegende Implementierung läßt aber beliebige Integrationsverfahren zu. Zur Berechnung der eindimensionalen Normalverteilung und ihrer Inversen wird das Verfahren nach Moro verwendet, da die hohe Genauigkeit von Cody bzw. Kennedy/Gentle nicht erforderlich ist.

3.5 Numerische Ergebnisse

Wie schon im letzten Kapitel wird ein Performance-Vergleich durchgeführt, indem der Fehler gegen die benötigte Zeit aufgetragen wird.

Es wird das Integral über die n -dimensionale Normalverteilung

$$F(0, 3) = \frac{1}{|A|\sqrt{2\pi}^n} \int_0^3 \int_0^3 \dots \int_0^3 e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t A^{-1} \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

berechnet. Dabei wird für die Korrelationsmatrix A einmal die Einheitsmatrix verwendet (Fall $A = E$) und einmal eine Matrix $A = CC^t$ mit $C_{ij} = \max(0, 4 - \|i - j\|)/4$. Die Anwendung einer Cholesky-Zerlegung garantiert an dieser Stelle, daß die Matrix A , wie gefordert, symmetrisch positiv semi-definit ist.

Diese Berechnungen wurden jeweils in 4, 8 und 12 Dimensionen durchgeführt. Die Meßwerte sind (auszugsweise) im Anhang aufgeführt. An dieser Stelle sind die Ergebnisse in Bild 3.3 bis Bild 3.5 graphisch dargestellt. Hier wird wieder in einem

doppelt-logarithmischen Plot der relative Fehler gegen die Zeit aufgetragen. Als Referenzwert wurde jeweils ein lange laufendes Clenshaw-Curtis- Dünngitter-Verfahren mit der Genz-Transformation verwendet.

In den Bildern zu den Standardnormalverteilungen (d.h. mit $A = E$) fehlt jeweils der Plot des Clenshaw-Curtis-Dünngitter-Verfahrens mit der Transformation nach Genz. Dies hat den einfachen Grund, daß im Falle der Einheitsmatrix dieses Verfahren exakt löst und somit einen Fehler von 0 liefert. In den logarithmischen Plots taucht es somit nicht auf. Wie man den tabellarischen Werten im Anhang entnehmen kann, liegen die Laufzeiten aber im Bereich der ersten Zeitschritte des Quasi-Monte-Carlo-Verfahrens mit Transformation.

Im Falle der Einheitsmatrix ist es somit das optimale Verfahren. Aber auch die anderen Tests belegen die Überlegenheit der Kombination Clenshaw-Curtis-Dünngitter mit Transformation. In allen getesteten Dimensionen konvergiert es sehr gut und ist stets performanter als die Kombination Quasi-Monte-Carlo mit Transformation. Allerdings muß man feststellen, daß es bei 12 Dimensionen eine schlechtere Konvergenz aufweist als Quasi-Monte-Carlo mit Transformation und somit für hohe Genauigkeiten schlechter geeignet ist.

Die Verfahren ohne Transformation scheitern alle bei höheren Dimensionen an dem Peak der Funktion, und das obwohl das Integrationsgebiet relativ klein gewählt wurde. Bei größerem Gebiet, wenn also der Peak für die Integrationsroutine noch schwerer aufzulösen ist, schneiden diese Verfahren noch einmal deutlich schlechter ab und zeigen auch bei längeren Laufzeiten keine Konvergenz.

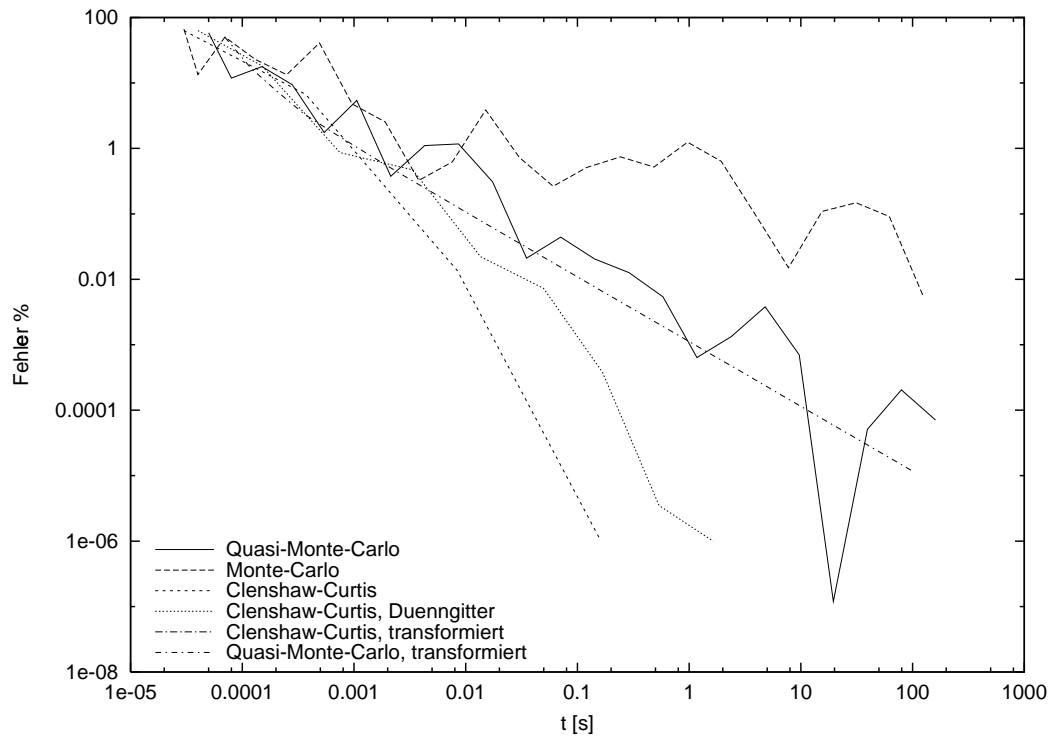
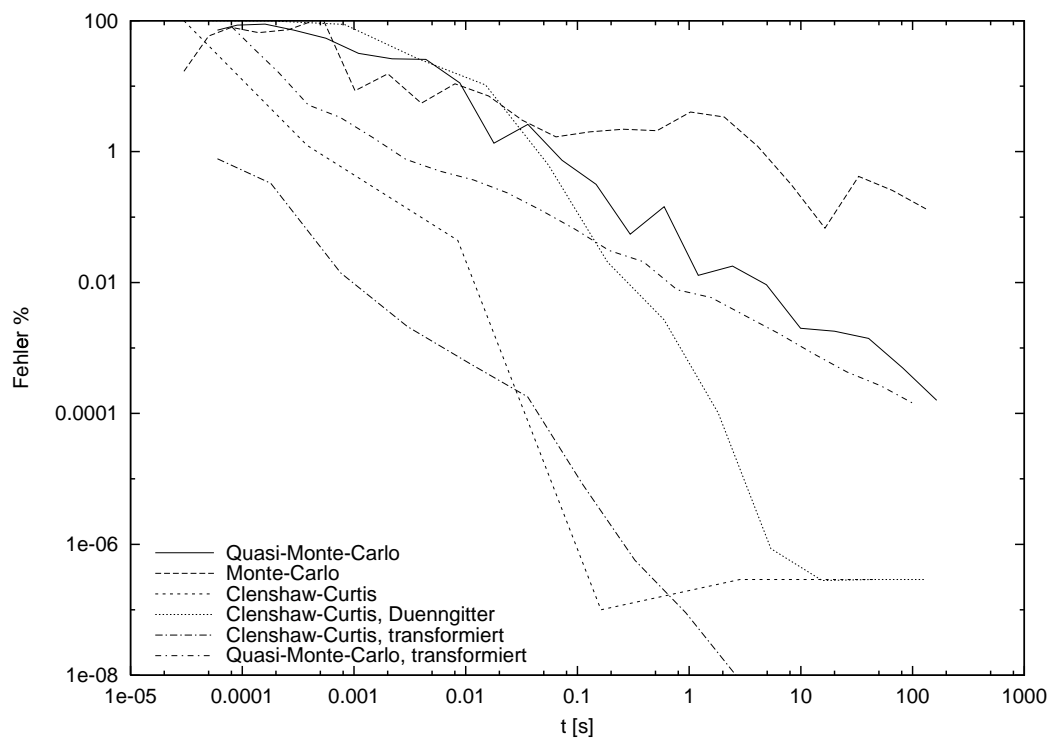
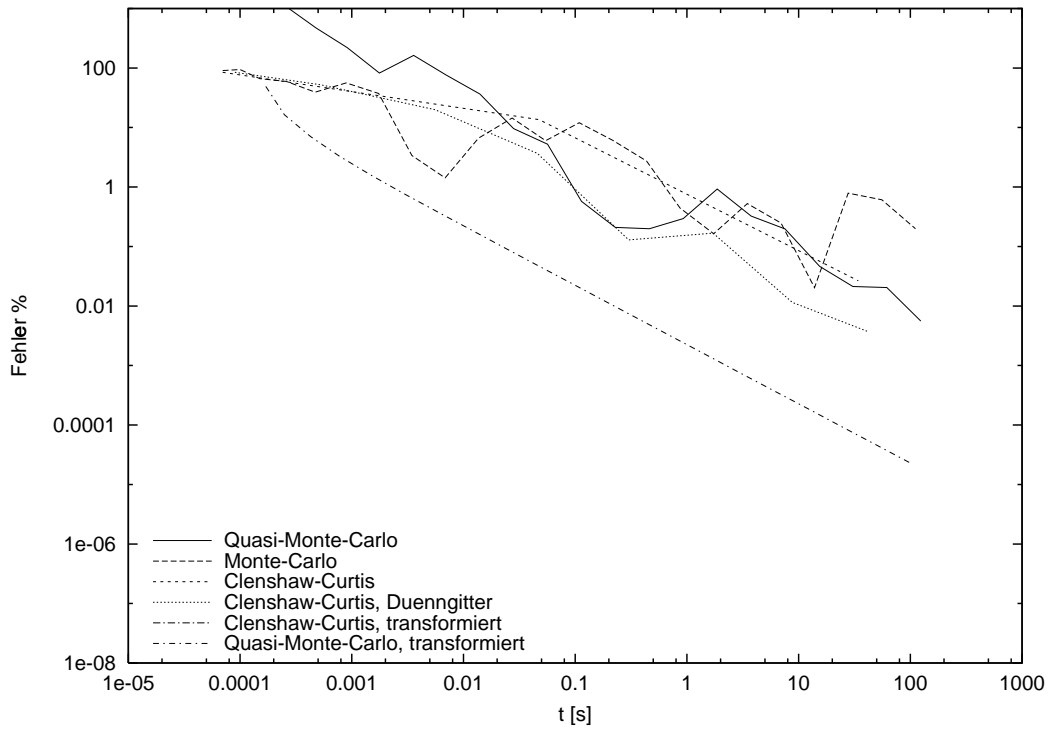
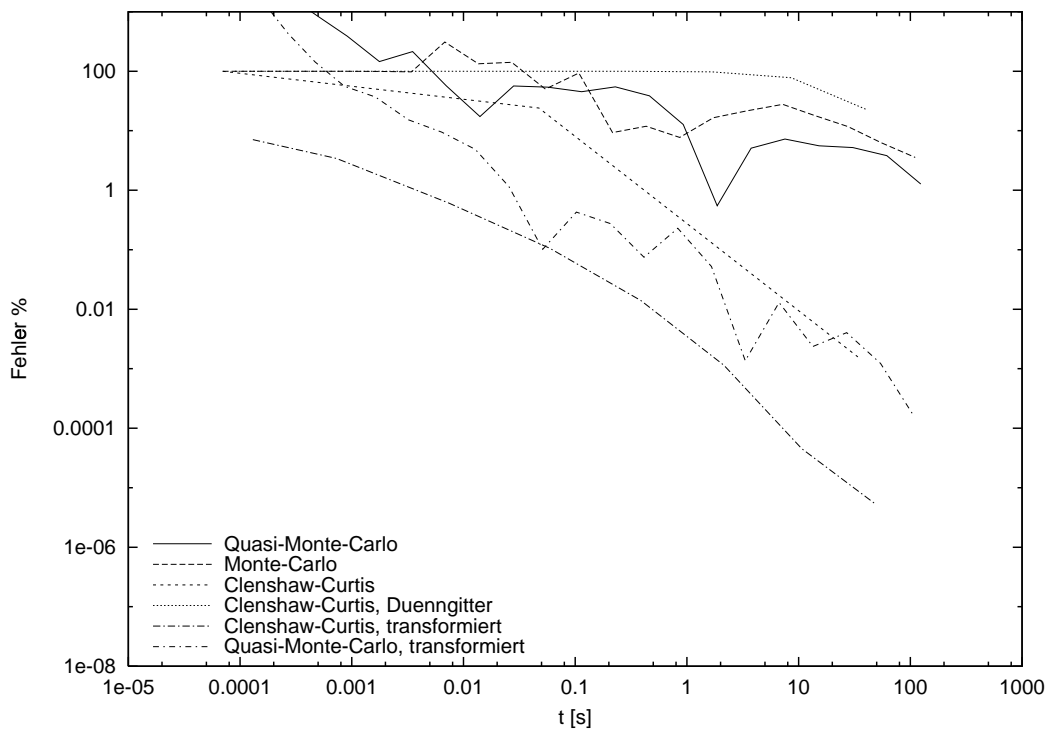
(a) $A = E$ (b) $A = CC^t \quad C_{ij} = \max(0, 4 - \|i - j\|)/4$

Bild 3.3: Performance der Berechnung der 4D-Normalverteilung



(a) $A = E$



(b) $A = CC^t \quad C_{ij} = \max(0, 4 - \|i - j\|)/4$

Bild 3.4: Performance der Berechnung der 8D-Normalverteilung

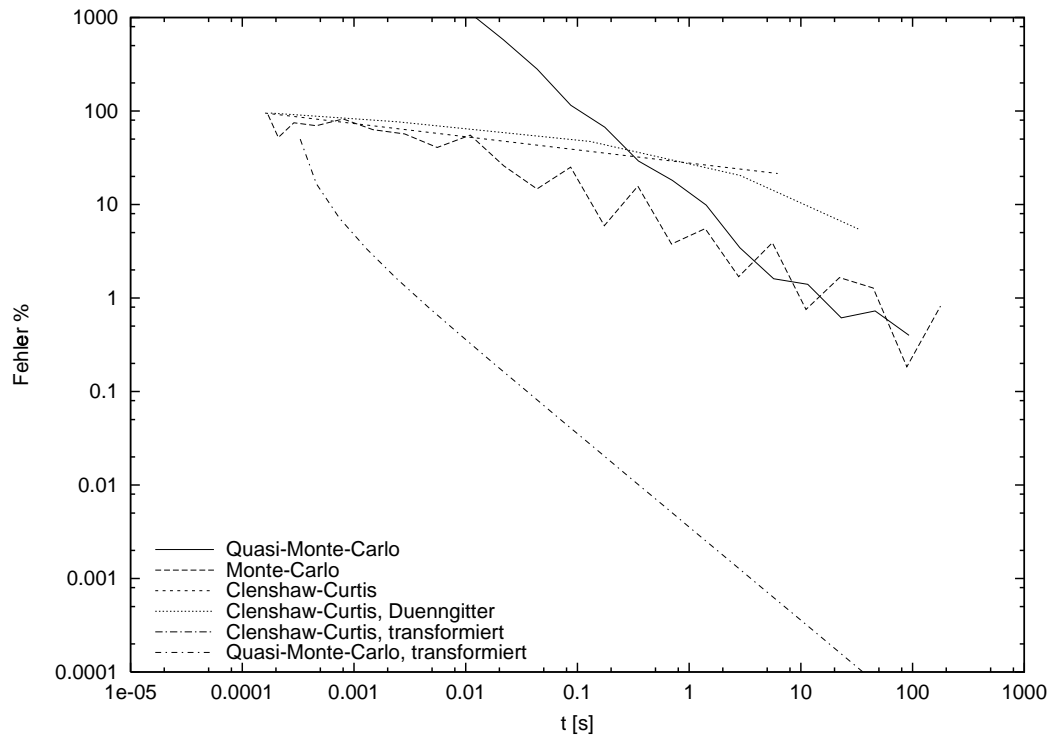
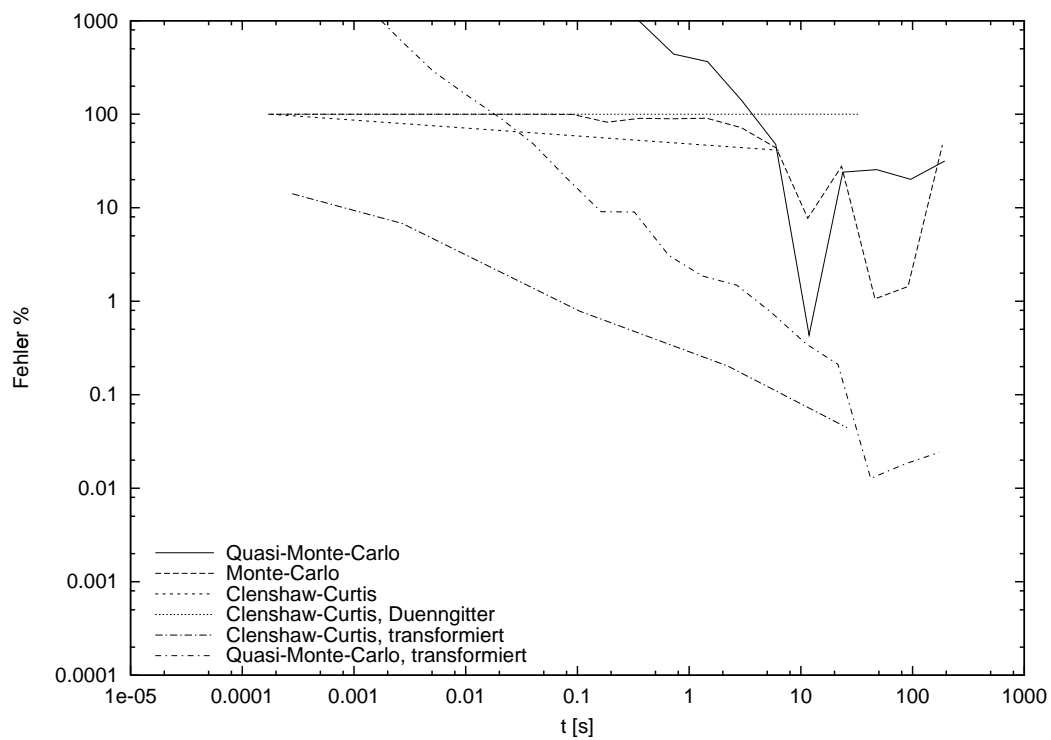
(a) $A = E$ (b) $A = CC^t \quad C_{ij} = \max(0, 4 - \|i - j\|)/4$

Bild 3.5: Performance der Berechnung der 12D-Normalverteilung

Kapitel 4

Einführung in Termingeschäfte

4.1 Einführung

In diesem Kapitel soll eine Einführung in die Ideen der Termingeschäfte gegeben werden[46, 47, 48]. Des weiteren wird ein vereinfachtes Modell für die Simulation von Aktienkursen vorgestellt[43]. Es bildet somit die Grundlage für das Verständnis der folgenden Kapitel, in denen auf konkrete Optionsklassen eingegangen wird.

4.2 Termingeschäfte

Termingeschäfte sind auf Aktien, Finanz- oder Rohstoffprodukten basierende Zeitgeschäfte. Sie sind das Ergebnis einer historischen Entwicklung und entstanden aus dem Bestreben der Produzenten landwirtschaftlicher Produkte, aber auch der Abnehmer, den Absatz langfristig und zu stabilen Preisen zu sichern. Mit Hilfe von Termingeschäften konnte man die Preise gegen Risiken absichern (Hedging), wie z.B. Überproduktion oder Mißernten.

Moderne Warentermingeschäfte zeichnen sich dadurch aus, daß mit Ausnahme des Preises alle Vertragsbedingungen (z.B. Menge, Qualität, Laufzeit usw.) standardisiert sind. Der Preis, bzw. die Formel wie der Preis berechnet wird, wird bei Vertragsabschluß festgelegt, aber die Vertragserfüllung findet erst zu einem späteren Termin statt. Aus einem geschlossenen Vertrag kann man sich lösen, indem man ein Gegengeschäft zum gleichen Termin abschließt (Glattstellung), d.h. es wird z.B. gekauft und dann wieder verkauft. Man kann allerdings auch zu einem Termin verkaufen und erst zu einem späteren Zeitpunkt kaufen (Short-Verkäufe). Solange am Markt genügend Händler beteiligt sind, sollte es in der Regel möglich sein, alle übernommenen vertraglichen Verpflichtungen durch Glattstellung zu lösen.

Termingeschäfte üben im modernen Wirtschaftsgeschehen wichtige Funktionen aus:

- Begrenzung des Risikos aus Preis- und Kursschwankungen (Hedging)
- Grundlage für langfristige Dispositionen auf gesicherter Kalkulationsgrundlage
- Preisausgleichende Funktion durch Ausdehnung des Marktes
- Spekulation

Bei Spekulationen wird der Profit durch sogenannte Differenzgeschäfte erzielt, d.h. man nutzt die Kursdifferenz ein und derselben Ware und schließt Verträge und stellt diese später glatt. Nur etwa 2% aller abgeschlossenen Warenterminkontrakte werden wirklich physisch umgesetzt!

4.2.1 Termingegenstände

Gegenstand des Terminhandels sind vor allem:

- Finanztitel (Aktien, Devisen, Zinstitel, etc.)
- Rohstoffe (Metalle, Agrarerzeugnisse, etc.)
- Energie (Rohöl, Ölprodukte)
- Edelmetalle (Gold, Silber, etc.)

Beim Terminhandel unterscheidet man zwischen dem Handel mit (echten) Terminkontrakten (sg. Futures) und mit Optionen.

4.2.2 Futures

Ein Terminkontrakt (Future) ist ein standardisierter, börsengehandelter Vertrag zwischen zwei Parteien, zu einem vereinbarten Preis und festgelegten Termin in der Zukunft, ein Kassageschäft abzuwickeln, d.h. durch die Lieferung der dem Vertrag zugrundeliegenden Ware (Basiswert) auf der einen sowie Entgegennahme derselben auf der anderen Seite.

Durch die Standardisierung von Kontraktgrößen (Volumen), Art und Qualität der Ware, sowie von Lieferorten und -terminen wird die Übertragbarkeit der Futures ermöglicht.

Der abgeschlossene Vertrag ist für beide Seiten verpflichtend, d.h. man ist zur Lieferung bzw. Annahme und Bezahlung der Ware am festgelegten Termin verpflichtet, solange man seine Position nicht vorher glatt stellt.

4.2.3 Optionen

Bezogen auf das Börsengeschehen ist eine Option ein Recht, jedoch (im Unterschied zum Future) keine Verpflichtung, den entsprechenden Optionsgegenstand innerhalb eines bestimmten Zeitraumes, zu einem festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. (Es ist allerdings auch möglich, daß nur festgelegt wird, wie der Preis bestimmt werden soll, s.u.)

Beim Recht auf Kauf spricht man von einer *Kaufoption* oder einem *Call*, beim Recht auf Verkauf von einer *Verkaufsoption* bzw. einem *Put*. Börsengehandelte Optionen selbst kann man kaufen und verkaufen. Der Käufer einer Option zahlt dabei an den Verkäufer einen Preis, die sogenannte *Prämie*. Diese ist sofort fällig und ist bei negativem Verlauf der Spekulation verloren. Allerdings stellt die Höhe der Prämie (außer beim Verkauf eines Puts) auch die absolute Verlustgrenze dar.

Der Käufer einer Option ist der *Berechtigte*. Er hat das Recht die Option

- ausüben (Kauf/Verkauf des entsprechenden Basiswertes)
- zu verkaufen
- verfallen zu lassen

Der Herausgeber einer Option ist der *Verpflichtete*. Er wird auch als *Stillhalter* bezeichnet, weil er nach dem Verkauf nur noch "stillhalten" kann und keinen Einfluß mehr darauf hat, ob der Käufer die Option ausübt, also die Lieferung des Optionsgegenstandes selbst fordert oder nicht. Zur Lieferung ist der Stillhalter dann verpflichtet. Läßt der Berechtigte die Option verfallen, d.h. übt er sie während der Laufzeit nicht aus, so erlischt die Verpflichtung des Stillhalters.

4.3 Bewertung

Der Preis einer Option setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der *innere Wert* ist der Erlös, den man zu diesem Zeitpunkt beim Ausüben der Option erzielen würde. Der *Zeitwert* ist der Anteil der Prämie, der über dem inneren Wert der Option liegt. Er sinkt mit abnehmender Laufzeit gegen 0, so daß am Verfallstag der Wert der Option gerade dem inneren Wert entspricht.

Besitzt die Option einen inneren Wert, so sagt man auch, sie ist *im Geld*. Ist dies gerade nicht der Fall, so ist die Option *aus dem Geld*. Eine Option, die diese Grenze gerade überschreitet, ist *am Geld*.

Wird eine Option an der Börse gehandelt, so wird der Preis vom Markt bestimmt, d.h. Angebot und Nachfrage sorgen für die Preisbildung. Allerdings gibt es auch einen theoretischen Wert, den sogenannten *fairen Preis*, den man mathematisch

bestimmen kann. Der tatsächliche Marktpreis kann durchaus ein anderer sein, in einem solchen Fall spricht man von unter- bzw. überbewerteten Optionen.

Der faire Preis ist besonders in Fällen wichtig, wo die Option nicht so stark gehandelt wird, daß der Markt stets aktuelle Preise liefert. In diesem Fall ist der Emittent als sogenannter *Market-Maker* verpflichtet, Kurse für den Optionsschein festzusetzen und den Markt zu bedienen.

Die Bewertung einer Option und besonders die anschließende numerische Berechnung ihres Wertes hängen von der Art der Option ab. Aber die Grundlagen sind für alle Optionstypen identisch.

4.3.1 Voraussetzungen

Im Folgenden wird nicht mehr zwischen Aktien und anderen Basiswerten unterschieden, da sie sich mathematisch völlig identisch verhalten.

Modell für Aktienpreise

Wir bezeichnen den Kurs einer Aktie S zum Zeitpunkt t mit $S(t)$. Der Kursverlauf der Aktie wird dann durch die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dX$$

beschrieben.

dX ist dabei ein *Wiener Prozeß*, also eine Zufallsprozeß, wie er z.B. auch bei der Brownschen Bewegung von Gasmolekülen in der Physik auftritt.

Die Parameter, die die Aktie charakterisieren, sind die *Volatilität* σ und der *Trend* bzw. auch *Drift* μ . Während die Volatilität als Faktor vor dem Wiener Prozeß beeinflusst, wie stark der Aktienkurs schwankt, beschreibt der Trend die langfristige Entwicklung des Kurses. Eine Aktie mit geringer Volatilität hätte demnach einen exponentiellen Kursverlauf. Dies entspräche der Wertentwicklung bei festverzinslicher Anlage.

In Bild 4.1 sind die simulierten Kursverläufe für verschiedene Parameter σ und μ dargestellt.

Modellvoraussetzungen

Alle weiteren Überlegungen zur Bewertung von Optionen basieren auf folgenden Voraussetzungen:

Keine Transaktionskosten Es werden keine Gebühren für den Kauf und Verkauf von Aktien und Optionen fällig.

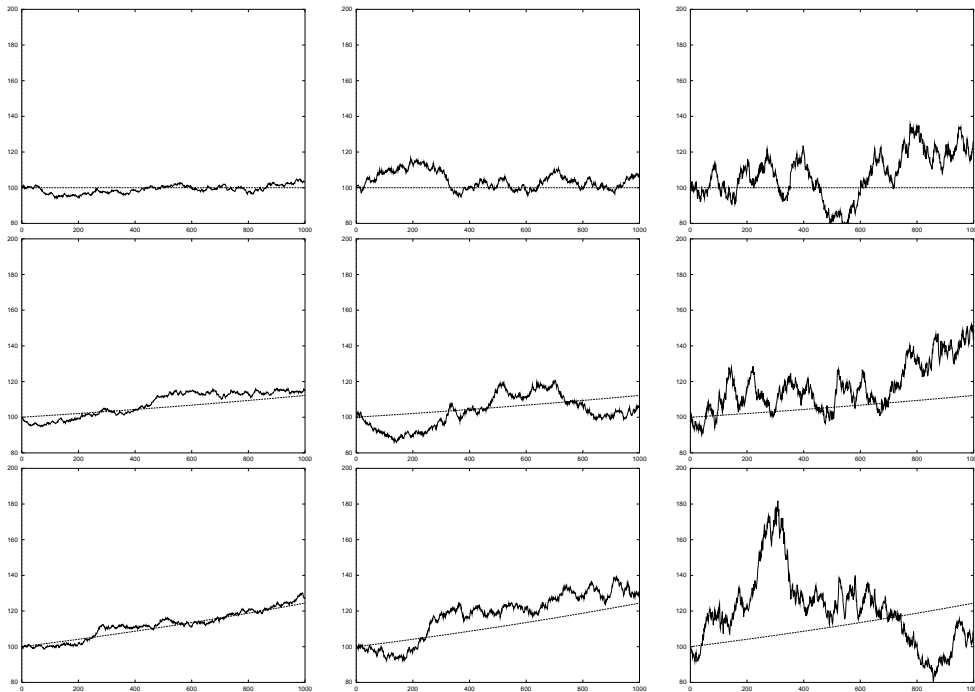


Bild 4.1: Simulierte Aktienkurse für $\sigma = 0.1, 0.2, 0.5, \mu = 0.0, 0.1, 0.2$

Keine Stückelungen Es können auch Teile von Aktien gehandelt werden und nicht nur ganze Aktien.

Keine Dividendenzahlungen Dividendenzahlungen führen zu Kurssprüngen am Tag nach der Auszahlung, die in diesem Modell nicht berücksichtigt werden.

Keine Arbitragemöglichkeiten Dies bedeutet, daß es keine Möglichkeit eines risikolosen Gewinns gibt, der über dem des sg. risikolosen Zinssatzes liegt. Der Markt sorgt in der Regel dafür, daß keine Arbitragemöglichkeiten existieren.

Risikoloser Zinssatz r bleibt konstant Der Zinssatz, zu dem man sein Geld risikofrei anlegen kann, bleibt über die gesamte Laufzeit einer Option konstant.

Short Verkäufe sind erlaubt Es ist also möglich, Aktien bzw. in diesem Fall Futures zu verkaufen, die man zum Zeitpunkt des Verkaufs gar nicht besitzt.

4.3.2 Payoff-Funktion

Der Kurs einer Option am Verfallstag wird durch ihre Payoff-Funktion $V(S_T)$ beschrieben und hängt zu diesem Zeitpunkt nur noch vom Kurs S_T des Basiswertes zum Verfallszeitpunkt T ab.

Um den Kurs der Option vor dem Verfallstag zu bestimmen, berechnet man den Erwartungswert E^* für den Preis der Option am Verfallstag, indem man den Kurs $S(t)$ der Aktie simuliert.

Der Wert der Option zum Zeitpunkt $t_0 \leq T$ ergibt sich dann aus dem erwarteten Wert zum Zeitpunkt T abzüglich des Zinsgewinns bei risikofreier Geldanlage.

$$V(S, t_0) = e^{-r(T-t_0)} E^* [V(S, T)]$$

Der Erwartungswert $E^* [V(S, T)]$ ist dabei das Integral über alle möglichen Werte von $V(S, T)$, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit, daß sie eintreten.

Das Abziehen des risikofreien Zinsgewinns durch den Faktor $e^{-r(T-t_0)}$ muß stets berücksichtigt werden, da der Anleger ja immer die Alternative hat, sein Geld auch risikolos anzulegen. Hier liegt auch der Hauptgrund für die Voraussetzung eines konstanten Zinssatzes über den Zeitraum. Wäre der Zinssatz r auch einem stochastischen Prozeß unterworfen, so würde aus dem einfachen *discounten* mit der Exponentialfunktion ein Integral über die Exponentialfunktion werden.

4.3.3 Verfahren

Die meisten Verfahren der Optionsscheinbewertung beruhen auf der Überlegung, daß der Erwartungswert der Payoff-Funktion berechnet werden muß. Allerdings hängt es stark von der Art der Option ab, wie leicht man diesen Erwartungswert bestimmen kann. In bestimmten Fällen ist es sogar möglich, eine explizite Formel für den Erwartungswert anzugeben (und somit auch für den Kurs der Option).

Um die weiteren Ausführungen etwas übersichtlicher zu gestalten, wird (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) im Folgenden stets $t_0 = 0$ gesetzt. Die Laufzeit ist somit nur noch T (statt $T - t_0$) und der aktuelle Kurs der Aktie ist S_0 (statt S_{t_0}).

Des weiteren werden die Herleitungen i.d.R. nur für Calls durchgeführt. Für Puts gelten diese aber stets völlig analog.

Kapitel 5

Europäische Optionen

5.1 Einführung

In diesem und den folgenden Kapiteln geht es jeweils um bestimmte Optionsscheintypen, auf die im Detail eingegangen wird. Anhand der einfachen europäischen Optionen kann man die verschiedenen Ansätze zur Bewertung veranschaulichen.

5.2 Eigenschaften

Einer der einfachsten Optionstypen ist die *europäische Option*. Sie ist als Put oder Call ausgelegt und berechtigt den Käufer, den Basiswert am Verfallstag zu einem vorher festgesetzten Preis (dem *Ausübungskurs* oder auch *Strike Price*) zu kaufen bzw. zu verkaufen.

Eine Ausübung der Option vor diesem Zeitpunkt ist, im Gegensatz zu einer *amerikanischen Option*, nicht möglich¹.

Die Payoff-Funktion eines europäischen Calls ist

$$V_C(S_T) = \max(0, S_T - A)$$

und für den Put entsprechend

$$V_P(S_T) = \max(0, A - S_T)$$

wobei A der Ausübungskurs ist und S_T der Kurs des Basiswertes am Verfallstag.

In Bild 5.1 sind die Payoff-Funktionen zur Veranschaulichung dargestellt.

¹Bemerkung: In Europa werden in erster Linie amerikanische Optionen gehandelt, während in den USA die europäischen Optionen weiter verbreitet sind.

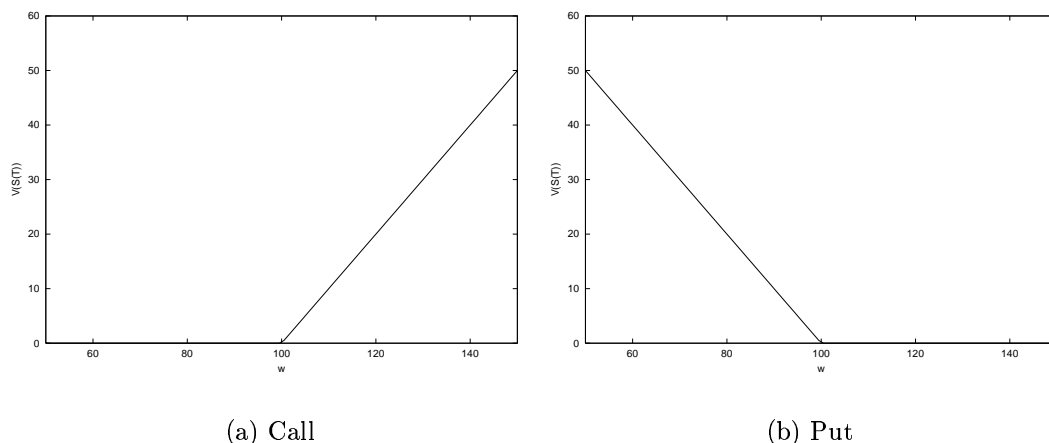


Bild 5.1: Payoff einer europäischen Option ($r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $A = 100$)

5.3 Bewertungsmethoden

5.3.1 Simulation der Aktienkurse

Die Simulation des Aktienkurses wird, wie in 4.3.1 erwähnt, durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

beschrieben.

Für die Bewertung von Optionen überführt man diese in die risikoneutrale Form indem man die Drift μ durch den risikofreien Zinssatz r ersetzt. Also

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Dieses Vorgehen ist eine direkte Konsequenz aus der Arbitrage-Voraussetzung, die risikofreie Gewinne über dem Zinssatz r verbietet.

Die Lösung dieser SDE (Stochastic Differential Equation) lautet

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right),$$

wobei W_t eine Zufallsvariable mit Varianz dt ist.

Dies läßt sich leicht mit Hilfe von Ito's-Lemma[26] überprüfen:

$S(W_t, t)$ ist eine zweimal differenzierbare Funktion der Zeit t und der Zufallsvariablen

W_t . Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 dS_t &= \frac{\partial S}{\partial W_t} dW_t + \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial W_t^2} \sigma^2 dt \\
 &= S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \left(\sigma dW_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \frac{1}{2}\sigma^2 dt\right) \\
 &= S_t (\sigma dW_t + r dt) \\
 &= r S_t dt + \sigma S_t dW_t
 \end{aligned}$$

Im konkreten Fall interessieren wir uns nur für den möglichen Wert der Aktie am Verfallstag, da eine europäische Option nicht vom Kursverlauf der Aktie abhängt, sondern nur vom Kurs S_T .

Es ergibt sich also

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T},$$

wobei W_T eine Zufallsvariable mit Varianz T ist.

5.3.2 Erwartungswert

Obige Formel beschreibt nun den Aktienkurs am Verfallstag in Abhängigkeit einer normalverteilten Zufallsvariablen W_T mit Varianz T . Der Erwartungswert ist nun definitionsgemäß das Integral über alle möglichen Werte, jeweils gewichtet mit Ihrer Wahrscheinlichkeit.

Der Erwartungswert-Ansatz ergibt für einen europäischen Call also

$$\begin{aligned}
 V(S, 0) &= e^{-rT} E[\max(0, S_T - A)] \\
 &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \max\left(0, S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi} - A\right) d\xi
 \end{aligned}$$

In Bild 5.2 ist der Integrand einmal ungewichtet und einmal mit der Wahrscheinlichkeitsgewichtung dargestellt.

5.3.3 Integration & Transformation

Die numerische Integration dieser Funktion ist insofern problematisch, daß sie nicht glatt ist, sondern eine Unstetigkeit in der ersten Ableitung besitzt. Dieser Knick sorgt bei den meisten numerischen Verfahren für unbefriedigende Konvergenzraten.

Allerdings ist leicht ersichtlich, daß man die Knickstelle x_0 explizit bestimmen kann, indem man die Gleichung $S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x_0} - A = 0$ löst. Also:

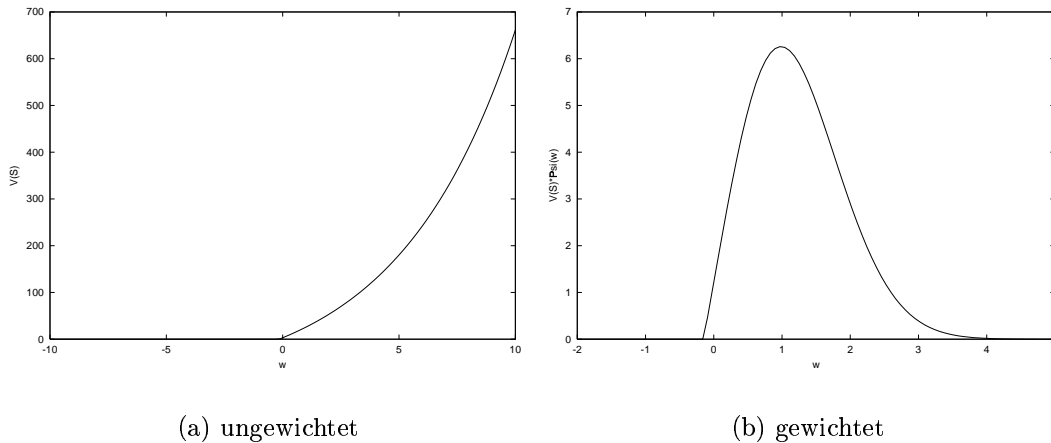


Bild 5.2: Integrand zur Berechnung des Wertes eines europäischen Calls ($r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $A = 100$)

$$\begin{aligned}
 A &= S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x_0} \\
 \ln\left(\frac{A}{S_0}\right) &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x_0 \\
 \ln\left(\frac{A}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T &= \sigma\sqrt{T}x_0 \\
 x_0 &= \frac{\ln\left(\frac{A}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

Da die Funktion für alle $x \leq x_0$ verschwindet, kann man nun die Integration auf das Intervall $[x_0; \infty]$ beschränken. Auf diesem Intervall liegt nun eine glatte, unendlich oft differenzierbare Funktion vor.

Allerdings existiert ein weiteres Problem, das auch schon bei der Integration der Normalverteilung relevant war. Es soll wieder über ein unendliches Intervall integriert werden, wobei die Funktion aber fast überall nahe 0 verläuft (sonst wäre das Integral auch nicht definiert). Auch hier werden bei Standardverfahren die meisten Funktionsauswertungen “verschwendet”, da die Funktion an den ausgewerteten Stellen nichts zum Integral beiträgt.

Substituiert man die Integrationsvariable ξ mit der inversen Normalverteilung $\phi^{-1}(x)$, so muß nur noch über das Einheitsintervall integriert werden. Ein weiterer Vorteil ist, daß durch die Substitution der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ wegfällt, da dieser in der inversen Normalverteilung bereits berücksichtigt ist.

Wir erhalten also folgendes Integrationsproblem:

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_0^1 \max\left(0, S_0 e^{((r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\phi^{-1}(x))} - A\right) dx$$

Auch hier läßt sich die Knickstelle wieder explizit bestimmen und man integriert nur über den glatten Teil der Funktion. Der Preis der Transformation ist allerdings eine Singularität bei 1, die numerisch ungünstig ist. Im 1-dimensionalen Fall fällt sie aber nicht so stark ins Gewicht und wird daher nicht gesondert behandelt.

5.3.4 Black-Scholes-Formel

Wie in 5.3.2 beschrieben, erhalten wir für einen europäischen Call das Integrationsproblem

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \max\left(0, S_0 e^{((r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi)} - A\right) d\xi$$

Wie in 5.3.3 beschrieben, erhält man für die Nullstelle χ

$$\chi = \frac{\ln \frac{A}{S_0} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und für das Integral ergibt sich somit

$$\begin{aligned} V(S, 0) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \max\left(0, S_0 e^{((r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi)} - A\right) d\xi \\ &= e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \left(S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi\right) - A\right) d\xi \end{aligned}$$

Schaut man sich die beiden Summanden des Integrals nun getrennt an, so ergibt sich für den ersten:

$$\begin{aligned} &e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi\right) d\xi \\ &= S_0 \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - rT\right) d\xi \\ &= S_0 \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}\xi - \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \\ &= S_0 \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T} - \xi)^2\right) d\xi \\ &= S_0 \left(1 - \int_{-\infty}^{\chi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T} - \xi)^2\right) d\xi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_0 \left(1 - \Phi \left(\chi - \sigma\sqrt{T} \right) \right) \\
&= S_0 \Phi \left(\sigma\sqrt{T} - \chi \right)
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden erhält man:

$$\begin{aligned}
&e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} A d\xi \\
&= e^{-rT} A \left(1 - \int_{-\infty}^{\chi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} A d\xi \right) \\
&= e^{-rT} A (1 - \Phi(\chi)) \\
&= e^{-rT} A \Phi(-\chi)
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich nun die sogenannte *Black-Scholes-Formel*, die das Bewertungsproblem auf die Bestimmung zweier eindimensionaler Normalverteilungen zurückführt:

$$V(S, 0) = S_0 \Phi(d_1) - e^{-r(T)} A \Phi(d_2)$$

mit

$$\begin{aligned}
d_1 &= \sigma\sqrt{T} - \chi = \frac{\ln \frac{S_0}{A} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\
&= \frac{\ln \frac{S_0}{A} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= -\chi \\
&= \frac{\ln \frac{S_0}{A} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Der Nutzen dieser Umformung besteht darin, daß man nun mit Hilfe der Approximationsverfahren aus 2 problemlos und schnell den Wert einer europäischen Option bestimmen kann. Hiermit liegt also ein nahezu optimales Verfahren für die Bewertung von europäischen Optionen vor.

Leider existiert eine solche geschlossene Lösung nur für ganz wenige Optionstypen. Daher sind die nachfolgenden Performance-Vergleiche als Grundlage für die Bewertungsproblematik anderer Optionstypen zu sehen, für die man nicht auf eine geschlossene Lösung zurückgreifen kann.

5.3.5 PDE-Ansatz

Nach 5.3.1 erfüllt der Aktienkurs die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Man kann zeigen, daß jede Option, deren Wert nur von S und t abhängt, die stochastische Differentialgleichung

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

erfüllen muß[43].

Bildet man nun ein Portfolio, das die Option V und eine noch nicht näher bestimmte Anzahl $-\Delta$ der entsprechenden Aktien enthält, so ist sein Wert

$$\Pi = V - \Delta S$$

Wenn Δ sich innerhalb eines Zeitschritts nicht ändert, ist die Wertänderung

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

Setzt man nun die beiden obigen SDE's ein, so erhält man

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt$$

Man kann nun zu jedem Zeitpunkt Δ so wählen, daß die Zufallskomponente verschwindet

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Hierdurch wird der Wert des Portfolios deterministisch

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Die Arbitrage-Bedingung, die risikolose Gewinne über dem Zinssatz r verbietet, besagt, daß gelten muß

$$d\Pi = r\Pi dt$$

da die deterministische Wertänderung unseres Portfolios gerade der Wertsteigerung bei Anlage zum Zinssatz r entsprechen muß. Also

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)$$

Setzt man nun

$$\Pi = V - S \frac{\partial V}{\partial S}$$

in diese Gleichung ein und teilt beide Seiten durch dt , erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Dies ist die sogenannte Black-Scholes-PDE, die von jeder Option erfüllt sein muß, die nur von S und t abhängt. Man kann also den Wert einer Option bestimmen, indem man gerade diese partielle Differentialgleichung löst. Dieser Ansatz ist allerdings sehr speziell, da die Voraussetzungen von den Optionen der folgenden Kapitel schon nicht mehr erfüllt werden. Wir verzichten deshalb im Rahmen dieser Arbeit auf die Anwendung von PDE-Methoden.

Allerdings sei bemerkt, daß die oben hergeleitete Black-Scholes-Formel gerade die Lösung der Black-Scholes-PDE für den Fall der europäischen Option ist.

5.3.6 Binomialmethode

Einen völlig anderen Ansatz der Bewertung liefert die Binomialmethode. Sie beruht auf der Idee, daß sich der Aktienkurs nicht kontinuierlich ändert, sondern nur zu diskreten Zeiten $0, \delta t, 2\delta t, 3\delta t, \dots, M\delta t = T$, und dann auch nur um feste Faktoren a bzw. b :

$$S^{m+1} = aS^m < S^m$$

$$S^{m+1} = bS^m < S^m$$

(Der obere Index $m < M$ gibt hier den Zeitschritt an und ist kein Exponent)

Des weiteren muß die Wahrscheinlichkeit p für einen Kursanstieg bekannt sein.

Die Parameter a , b und p müssen so gewählt werden, daß der diskrete und der kontinuierliche Random walk das gleiche Mittel und die gleiche Varianz haben.

Hierfür existieren zwei Ansätze, die zu einem leicht anderen Aussehen des Binomialbaums führen (Bild 5.3), aber natürlich dasselbe Ergebnis liefern:

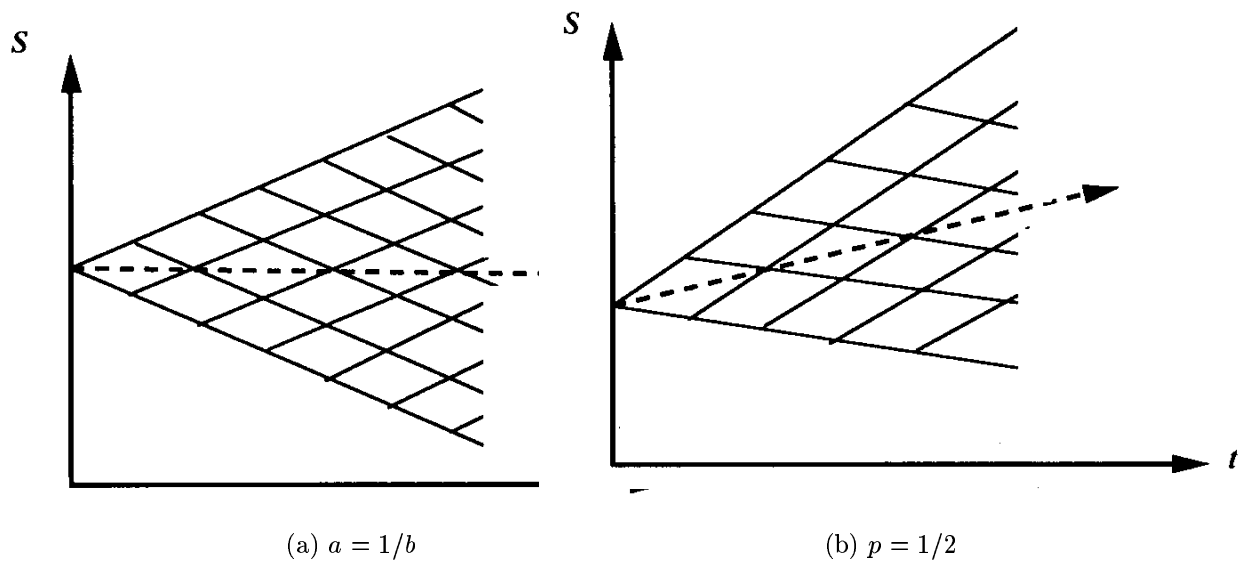


Bild 5.3: Baum der Binomialmethode

Ansatz: $a = 1/b$	Ansatz: $p = 1/2$
$a = A - \sqrt{A^2 - 1}$	$a = e^{r\delta t} \left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \delta t} - 1} \right)$
$b = A + \sqrt{A^2 - 1}$	$b = e^{r\delta t} \left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \delta t} - 1} \right)$
$p = \frac{e^{r\delta t} - a}{b - a}$	$p = \frac{1}{2}$
mit	
$A = \frac{1}{2} \left(e^{-r\delta t} + e^{r+\sigma^2} \delta t \right)$	

Der Algorithmus der Binomialmethode ist recht anschaulich. Zunächst wird der Baum von links nach rechts mit den Aktienkursen S_n^m gefüllt:

$$S_n^m = bS_{n-1}^{m-1} \quad \text{für } n \neq 0$$

$$S_0^m = aS_0^{m-1}$$

Aus den Kursen S_n^M läßt sich nun mit Hilfe der Payoff-Funktion $V(S, T)$ der Wert der Option zum Zeitpunkt $T = M\delta t$ bestimmen.

Verwendet man nun die Formel

$$e^{r\delta t} V_n^m = pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1}$$

so kann man den Baum wiederum von rechts nach links rekursiv mit den korrekten Werten für den Optionsscheinpreis füllen.

Der letzte Schritt liefert dann mit V_0^0 den gegenwärtigen Preis der Option. Das Binomial-Verfahren ist an dieser Stelle aber nur der Vollständigkeit halber angegeben. In der Praxis ist es deutlich langsamer als die anderen Verfahren und wird daher auch bei den weiteren Untersuchungen nicht mehr berücksichtigt.

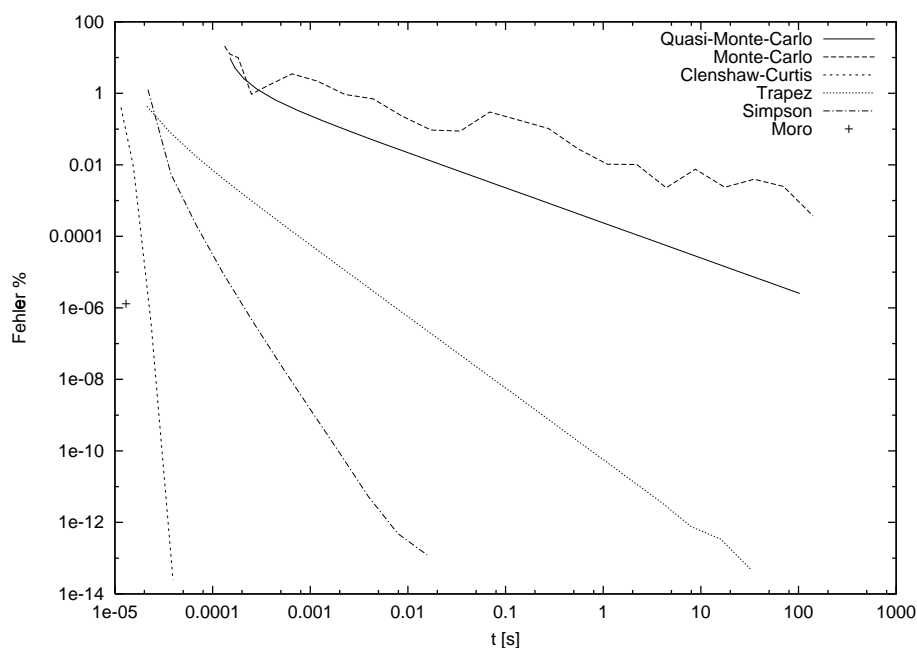


Bild 5.4: Performance der Black-Scholes-Formel

5.4 Numerische Ergebnisse

Zur Untersuchung der Performance der verschiedenen Verfahren wurden Näherungswerte für einen europäischen Call berechnet und mit dem als exakt angenommenen Black-Scholes-Wert mit Normalverteilungsberechnung nach Cody verglichen. In den Plots ist jeweils der relative Fehler gegen die Zeit aufgetragen.

Die effektivste Methode zur Bewertung von europäischen Optionen ist die Anwendung der Black-Scholes-Formel. Die Performance dieser Verfahren hängt ausschließlich vom verwendeten Verfahren zur Berechnung der kumulativen Normalverteilung ab. Der doppelt-logarithmische Performanceplot (Bild 5.4) entspricht somit weitestgehend den Ergebnissen aus Kapitel 2.

Verzichtet man auf die Black-Scholes-Formel, so bleiben zwei Möglichkeiten der Integration. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Integration über ein unendliches Gebiet durchgeführt wird, die Payoff-Funktion also mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung gefaltet ist. Die Ergebnisse sind in Bild 5.6 dargestellt. Das Integrationsgebiet wurde hier auf $(-10; 10)$ beschränkt, was aufgrund der Faltung nur zu einem sehr geringen Abschneidefehler führt.

Das Ergebnis zeigt recht deutlich den Einfluß der Knickstelle auf die Konvergenzrate der Verfahren. Gerade das Simpson-Verfahren und das Clenshaw-Curtis-Verfahren erzielen bei Beschränkung des Integrationsgebietes durch Transformation auf den Teil rechts der Knickstelle deutlich bessere Konvergenzraten. Ohne diese Transformation fallen alle Verfahren auf die Konvergenz des Quasi-Monte-Carlo-Verfahrens

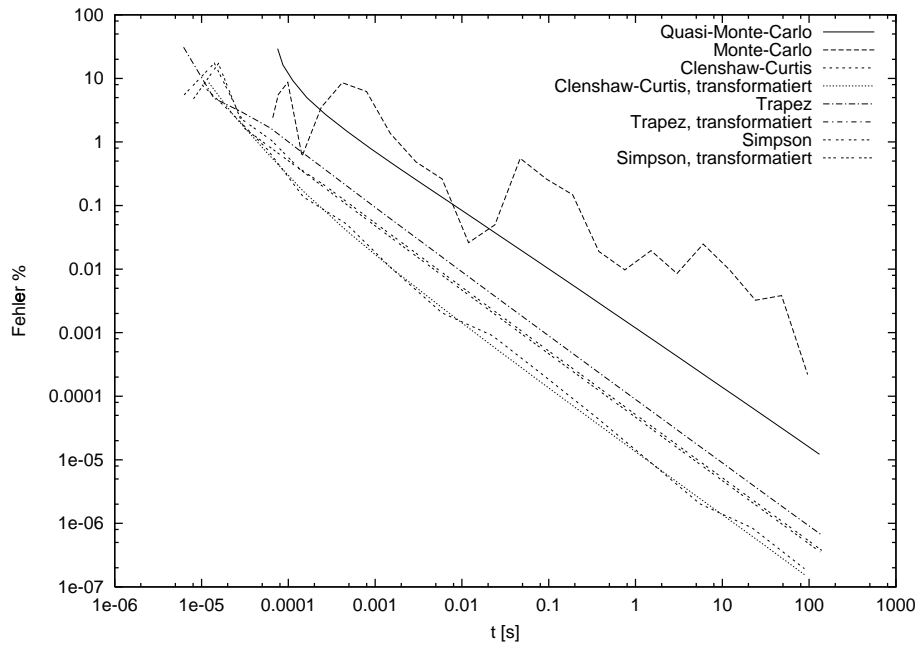


Bild 5.5: Performance bei Integration über die auf $(0; 1)$ transformierte Payoff-Funktion

zurück.

Die letzte Variante ist die Integration über das Einheitsintervall, wobei die Payoff-Funktion mittels der inversen Normalverteilung entsprechend transformiert wurde. Die in Bild 5.6 dargestellten Ergebnisse zeigen jedoch, daß dieser Ansatz einen entscheidenden Nachteil hat. Die Konvergenzraten aller Verfahren liegen bei 1, obwohl auch hier der Knick berücksichtigt wurde und das Integrationsgebiet entsprechend verkleinert wurde. Dieses unerwartete Verhalten ist vermutlich auf die, durch die inverse Normalverteilung entstandene, Singularität der Funktion bei 1 zurückzuführen.

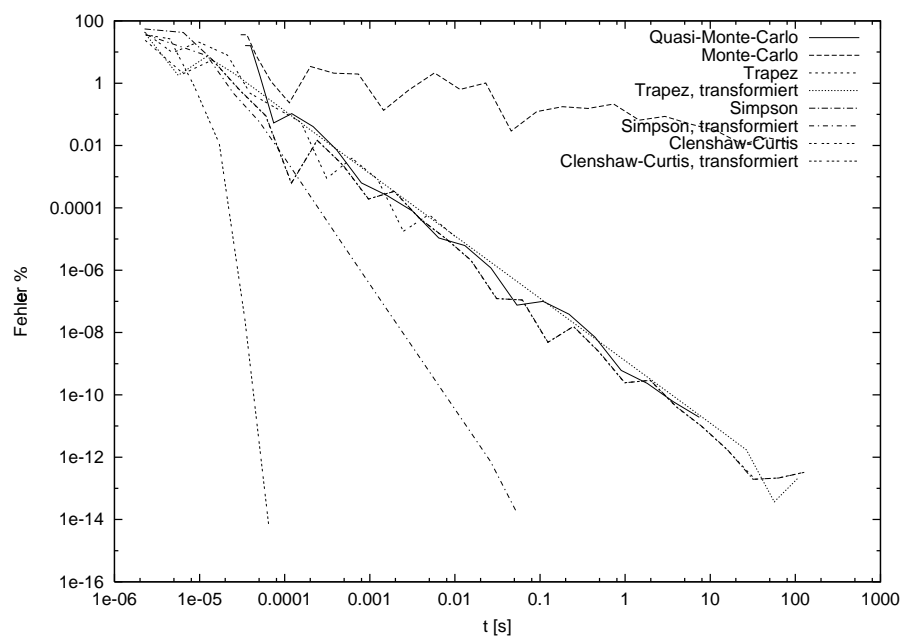


Bild 5.6: Performance bei Integration über die nicht-gefaltete Payoff-Funktion

Kapitel 6

Asiatische Optionen

6.1 Einführung

Anhand der asiatischen Optionen wird die Klasse der pfadabhängigen Optionen eingeführt, deren Wert nicht nur vom Kurs des Basiswertes am Verfallstag abhängt, sondern vom Kursverlauf während der Laufzeit der Option.

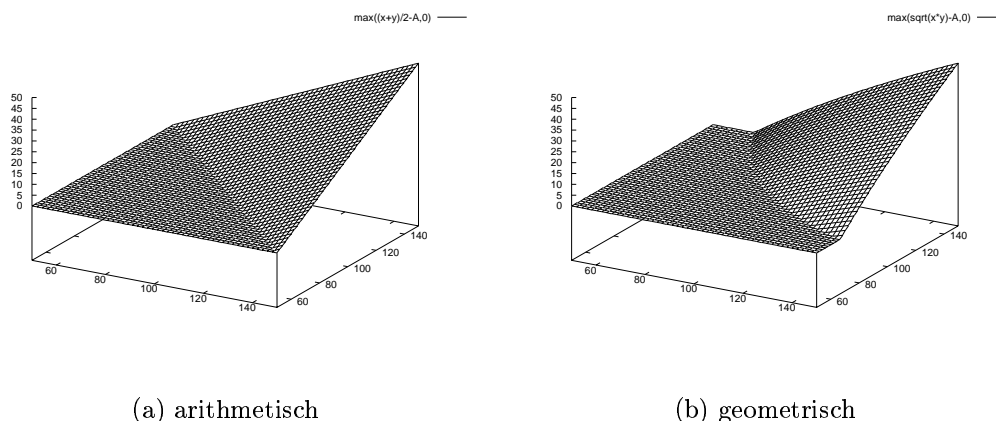
Zur Bewertung stehen auch hier wieder verschiedene Verfahren zur Verfügung. Wir werden sowohl den Erwartungswertansatz[29, 43] betrachten, als auch im Falle der geometrischen asiatischen Optionen den Black-Scholes-Ansatz. Der Erwartungswertansatz führt auf ein mehrdimensionales Integrationsproblem, auf das die verschiedenen Verfahren, die in Kapitel 3.1 vorgestellt wurden, angewendet werden.

Besonderes Augenmerk gilt hierbei dem Dünngitter-Verfahren[37, 17], daß allerdings aufgrund einer Unstetigkeit in der 1. Ableitung des Integranden nicht effizient arbeitet.

Daher wird in diesem Kapitel ein Algorithmus entwickelt, der durch Gebietstransformation eine glatte Funktion liefert und somit die Konvergenz des Dünngitter-Verfahrens entscheidend verbessert. Dieses Verfahren wird so allgemein gehalten, daß es nicht nur auf alle asiatischen Optionen anwendbar ist, sondern auch bei den performance-orientierten Optionen angewandt werden kann.

6.2 Eigenschaften

Im Fall der asiatischen Optionen wird der Ausübungskurs nicht bei Vertragsabschluss explizit festgelegt, sondern bestimmt sich aus einer Mittelwertbildung über den Kursverlauf. Dabei hängt es von der konkreten Auslegung der Option ab, ob der Mittelwert kontinuierlich oder diskret bestimmt wird und um welche Art von Mittelwert es sich handelt. Die üblichsten sind hier das arithmetische Mittel und das

Bild 6.1: Payoff eines asiatischen Calls ($A = 100$)

geometrische Mittel. Theoretisch sind aber auch beliebige andere Mittelwerte denkbar. Die Ausübung einer asiatischen Option ist definitionsgemäß nur zum Verfallstag möglich.

Mögliche Payoff-Funktionen eines asiatischen Calls sind also

$$V(S, T) = \max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S(t_i) - E, 0 \right)$$

im Fall des diskreten, arithmetischen Mittels und

$$V(S, T) = \max \left(\left(\prod_{i=0}^n S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}} - E, 0 \right)$$

im Fall des diskreten, geometrischen Mittels.

$S(t_i)$ ist hierbei der Kurs des Basiswertes zum Zeitpunkt t_i .

In Bild 6.1 sind die Payoff-Funktionen eines 2-dimensionalen Calls für arithmetisches und geometrisches Mittel dargestellt.

6.3 Bewertungsmethoden

6.3.1 Erwartungswert

Wie bei der europäischen Option bietet sich ein Ansatz über den Erwartungswert des Kurses des Basiswertes an. Allerdings reicht im Fall einer asiatischen Option

ein Erwartungswert nicht mehr aus, da die Payoff-Funktion von den Kursen des Basiswertes zu verschiedenen Zeitpunkten abhängt.

Integration

Zur Berechnung des Erwartungswertes muß wie schon im Fall der europäischen Option die Lösung der SDE aus 5.3.1 verwendet werden. Hier allerdings in der Form für beliebige Zeiten:

$$S_{t_i} = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_i + \sigma W_{t_i} \right)$$

In Kombination mit der obigen Payoff-Funktion für einen asiatischen Call mit geometrischem Mittel ergibt sich dann das Integrationsproblem

$$\begin{aligned} V(S, 0) &= e^{-rT} E \left[\max \left(\left(\prod_{i=0}^n S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}} - A, 0 \right) \right] \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} \xi^2} \max \left(0, S_0 \prod_{i=1}^n e^{((r - \frac{1}{2} \sigma^2) t_i + \sigma \sqrt{t_i} \xi_i)} - A \right) d\xi_1 \dots d\xi_n \end{aligned}$$

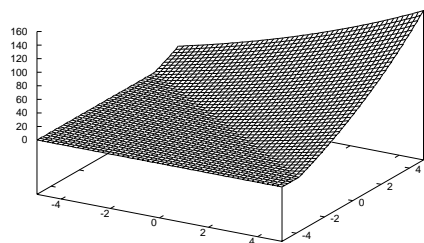
Um das unendlich große Integrationsgebiet zu vermeiden, greift man wieder auf den Trick der Transformation auf den Einheitswürfel mit Hilfe der inversen Normalverteilung zurück.

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_0^1 \dots \int_0^1 \max \left(0, S_0 \prod_{i=1}^n e^{((r - \frac{1}{2} \sigma^2) t_i + \sigma \sqrt{t_i} \phi^{-1}(\xi_i))} - A \right) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

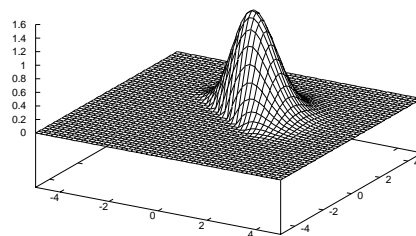
Fluch der Dimension

Die Dimension des Problems hängt von der Diskretisierung der Mittelwertbestimmung ab, d.h. über wie viele (diskrete) Kurse gemittelt wird. Jeder Zeitpunkt liefert dabei eine Dimension. Es ist leicht einzusehen, daß man hier sehr schnell sehr hohe Dimensionen erreicht. Wenn man z.B. nur die Kassakurse bei einer 4-wöchigen Laufzeit berücksichtigt, so wäre bereits ein 20-dimensionales Integral zu lösen.

Das größte Problem ist wieder der *Fluch der Dimension*, der es nahezu unmöglich macht, ein solches Problem mit einem klassischen Quadraturverfahren zu lösen.



(a) ungewichtet



(b) gewichtet

Bild 6.2: Integrand zur Berechnung des Wertes eines geometrischen asiatischen Calls

Knickstelle

Desweiteren tritt, wie auch schon bei den europäischen Optionen, eine Unstetigkeit in der 1. Ableitung der Funktion auf. Bei einer n -dimensionalen Payoff-Funktion liegen diese Unstetigkeiten auf einer $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

In Bild 6.2 und 6.3 sind für 2-dimensionale Asia-Calls die Integranden dargestellt und zwar sowohl mit als auch ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Der Knick ist in beiden Fällen deutlich sichtbar.

Dieser Knick bereitet größere Schwierigkeiten als im eindimensionalen Fall, da er sich i.A. nicht mehr explizit bestimmen läßt. Man ist daher auf eine numerische Bestimmung der Nullstelle angewiesen. Dabei hilft einem aber eine Eigenschaft, die alle Arten der Mittelwertbildung aufweisen:

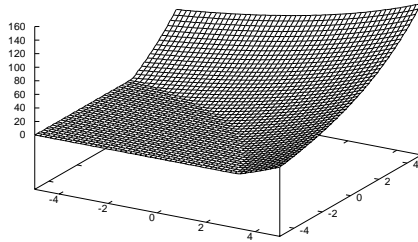
Alle partiellen Ableitungen der Mittelwertbildung sind stets positiv. Mit anderen Worten heißt das, daß die Payoff-Funktion im Falle eines Calls in achsenparallele Richtung monoton steigt, bzw. im Falle eines Puts monoton fällt.

Wählt man $S_{t_i} > 0$ für $i = 1..n - 1$ beliebig aber fest, so strebt die Payoff-Funktion für $S_{t_n} \rightarrow \infty$ stets gegen ∞ .

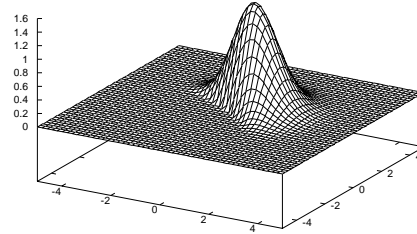
Somit ergibt sich, daß für besagte S_{t_i} in Richtung der letzten Dimension höchstens eine Knickstelle existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $V(S_{t_i}, S_n = 0, T) = 0$ gilt.

Diese Stelle läßt sich nun mit einem beliebigen numerischen Verfahren bestimmen (z.B. Bisektion), bzw. wenn man sich im Algorithmus auf einen bestimmten Optionstyp festlegen will, auch explizit auflösen.

Da es sich bei der inversen Normalverteilung um eine stetige, streng monotone Funktion handelt, ändert sich durch die Transformation des Integrationsgebietes nichts



(a) ungewichtet



(b) gewichtet

Bild 6.3: Integrand zur Berechnung des Wertes eines arithmetischen asiatischen Calls an besagter Eigenschaft.

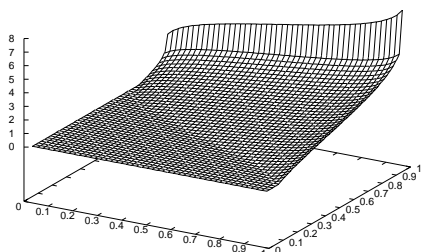
Gebietstransformation

Der Knick der Payoff-Funktion lässt sich somit wie folgt umgehen:

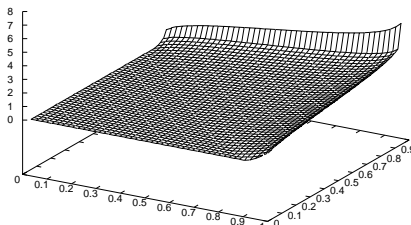
1. Wähle ein beliebiges Diskretisierungsgitter auf dem Hyper-Einheitswürfel für die ersten $n - 1$ Dimensionen
2. Für alle Punkte $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_{n-1}$ des Gitters
3. Setze $x_n = 0$ (bzw. $x_n = 10e - 10$)
4. Setze $W_i = \phi^{-1}(x_i)$ für $i \in 1, 2, \dots, n$
5. Wenn $V(S_i, T) = 0$
6. Setze x_n auf die Knickstelle
(entweder numerisch oder direkt)
7. Integriere die letzte Dimension von x_n bis 1

Dieser Algorithmus führt anschaulich eine Transformation des Gebietes, in dem der Integrand nicht verschwindet, auf den vollen Einheitswürfel durch. Somit ist nur noch eine glatte Funktion auf einem endlichen Intervall zu integrieren.

In Kombination mit dem Dünngitter-Verfahren ergeben sich also zu jeder Quadraturformel vier verschiedene Integrationsverfahren: Dünngitter/Vollgitter jeweils mit



(a) geometrisch



(b) arithmetisch

Bild 6.4: Integrand zur Berechnung des Wertes eines asiatischen Calls nach Transformation auf den Einheitswürfel

und ohne Transformation. In Bild 6.5 - 6.8 sind die vier möglichen Gitter für das Clenshaw-Curtis-Verfahren dargestellt. Die zugrunde liegende Option ist ein 2-dimensionaler Asiaticall (geometrisch).

6.3.2 Black-Scholes-Formel

Obwohl es allgemein nicht möglich ist, den Wert asiatischer Optionen explizit zu berechnen, existiert für Optionen mit geometrischem Mittel eine angepasste Black-Scholes-Formel:

$$V = S_0 \cdot A \Phi(d_1) - e^{-r(T)} A \Phi(d_2)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= e^{-r(T-T_\mu) - \frac{\sigma^2}{2}(T_\mu - T_2)} \\ d_1 &= d_2 + \sigma \sqrt{T_2} \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{S_0}{E} + r - \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot T_\mu}{\sigma \cdot \sqrt{T_2}} \\ T_\mu &= T \cdot \frac{h(n-1)}{2} \\ T_2 &= T - \frac{n(n-1)(4n+1)}{6n^2 \cdot h} \end{aligned}$$

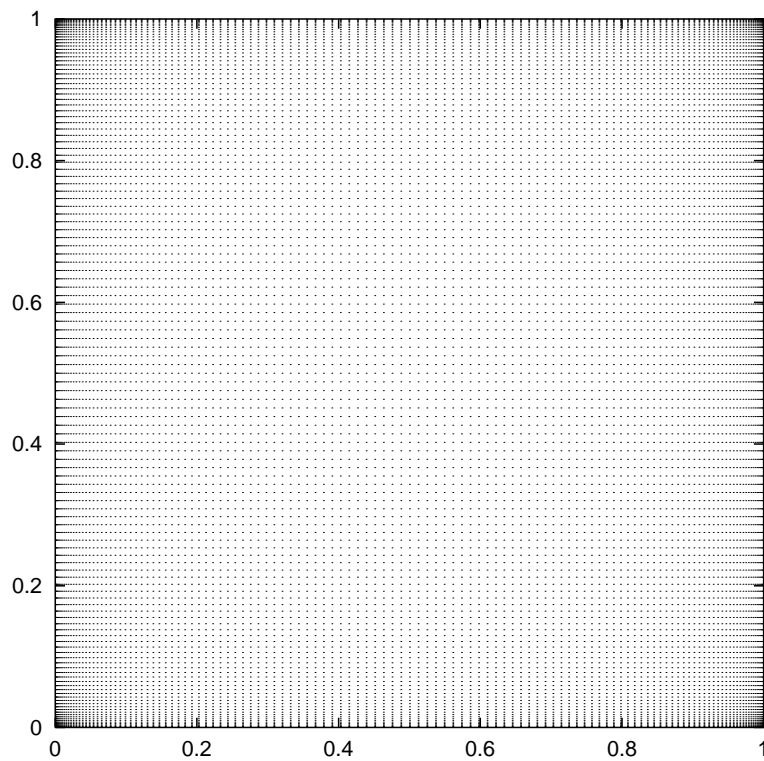
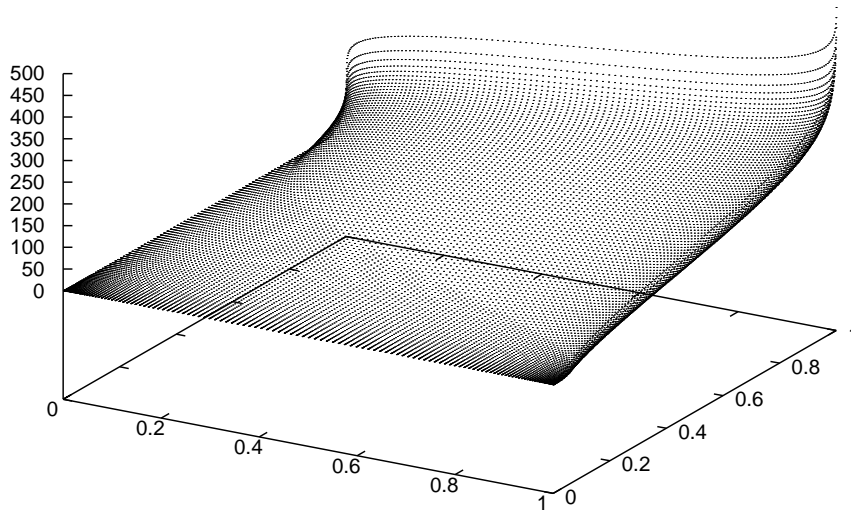


Bild 6.5: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Vollgitter ohne Transformation

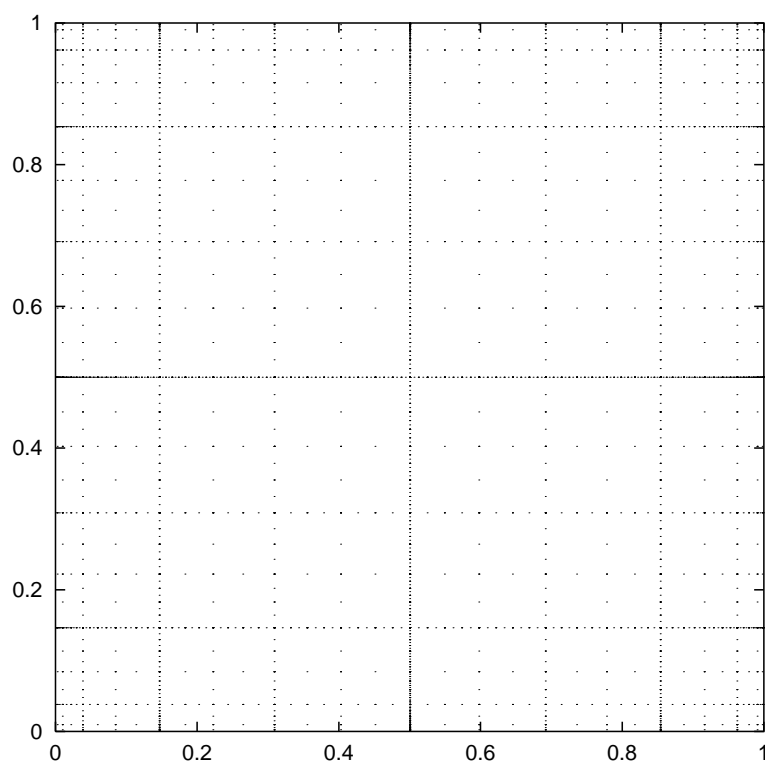
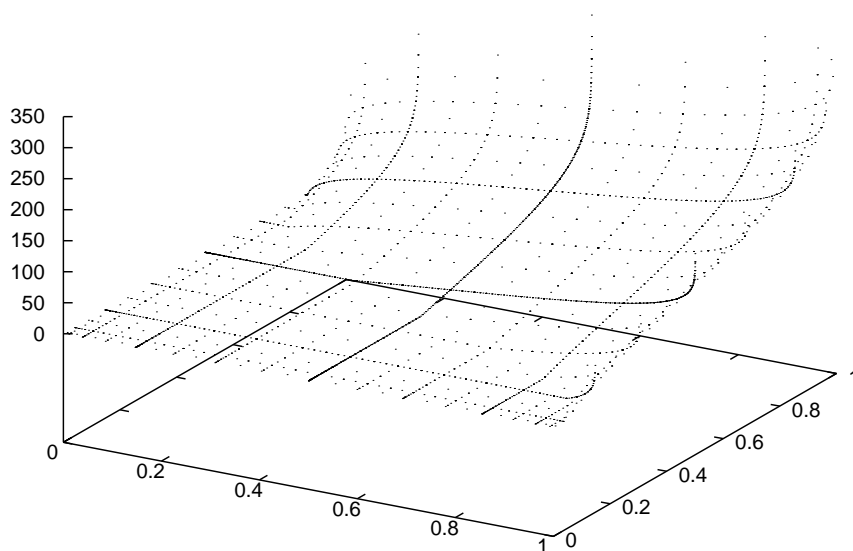


Bild 6.6: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Dünngitter ohne Transformation

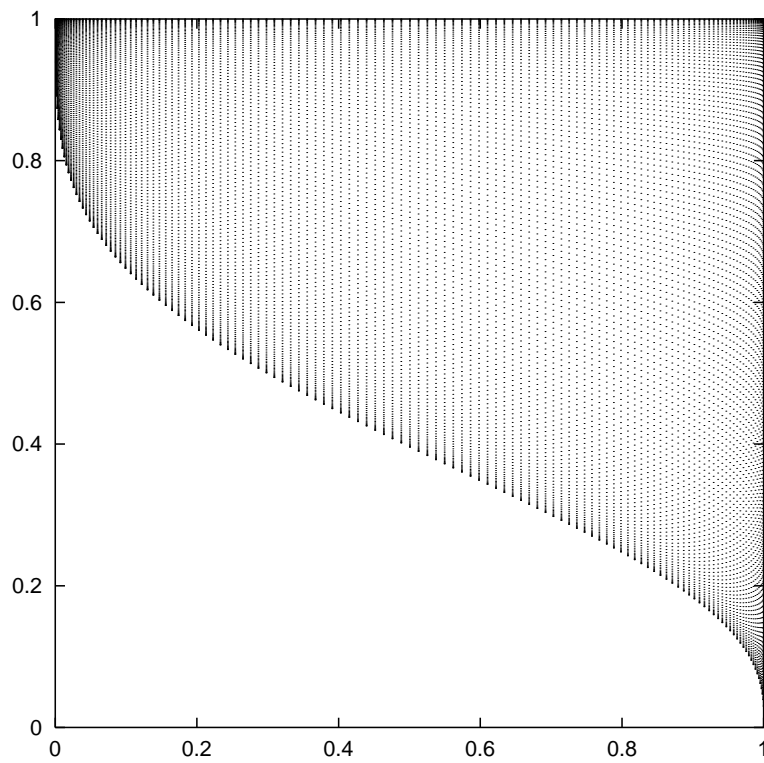
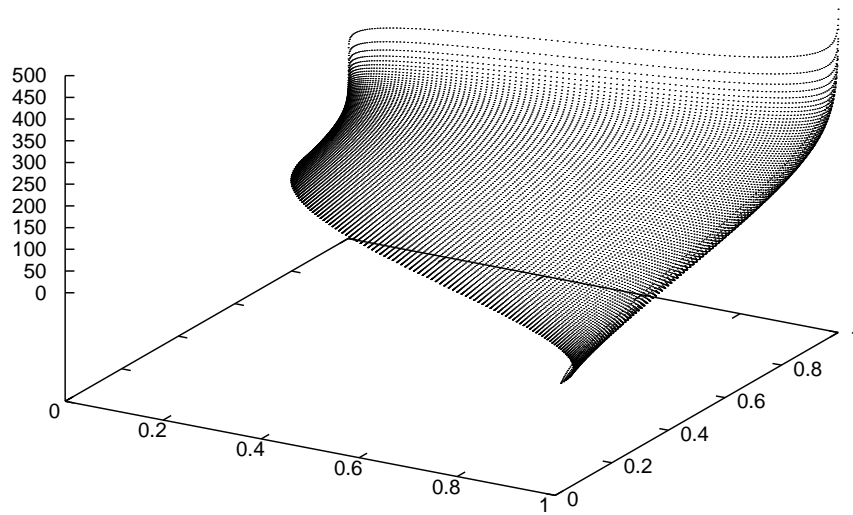


Bild 6.7: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Vollgitter mit Transformation

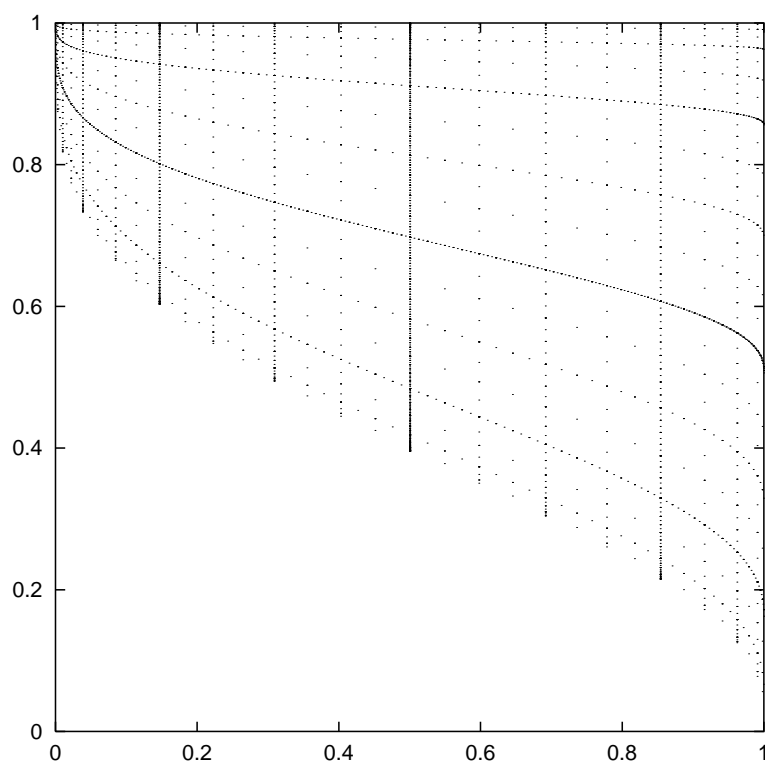
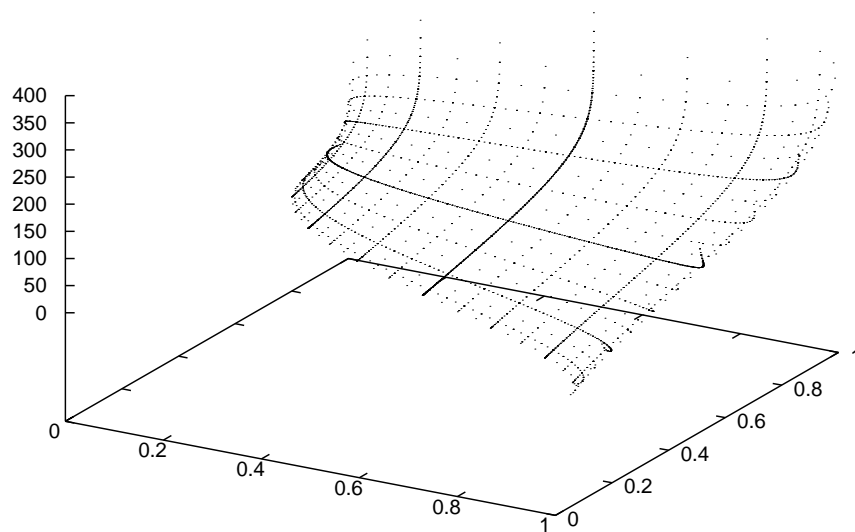


Bild 6.8: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Dünngitter mit Transformation

Für asiatische Optionen mit arithmetischem Mittel existiert eine solche Formel leider nicht.

Bei den Performance-Messungen ist die Black-Scholes-Formel der Integrationsmethode natürlich deutlich überlegen. Insbesondere da die Normalverteilungen zur Berechnung der Black-Scholes-Formel weiterhin nur 1-dimensional sind und das Verfahren somit keine exponentielle Abhängigkeit zur Anzahl der Dimensionen aufweist.

Das bestreben dieser Arbeit ist es aber, ein möglichst allgemeines Lösungsverfahren zu verwenden. Daher wird die Black-Scholes-Formel nur zur Berechnung des Referenzwertes eingesetzt an dem sich die anderen Verfahren messen müssen. Alle anderen Verfahren sind nämlich deutlich flexibler, da sie sich auf alle asiatischen Optionen anwenden lassen und nicht auf das geometrische Mittel festgelegt sind.

6.4 Numerische Ergebnisse

Es werden zunächst asiatische Calls mit geometrischem Mittel in verschiedenen Dimensionen berechnet und der Fehler jeweils gegen den Referenzwert (Black-Scholes-Formel mit NAG-Lib-Normalverteilung) betrachtet. Die Ergebnisse werden an dieser Stelle nur in der schon bekannten doppelt-logarithmischen Darstellung wiedergegeben. Die tabellierten Ergebnisse finden sich auszugsweise im Anhang.

Bei 4 Dimensionen (Bild 6.9) sieht man deutlich die Auswirkungen der Transformation auf die Konvergenzrate des Dünngitter-Verfahrens. Das Clenshaw-Curtis-Verfahren mit und ohne Transformation konvergiert bereits in 4 Dimensionen schlechter als das einfache Quasi-Monte-Carlo-Verfahren. Der Dünngitter-Ansatz führt zwar zu einer etwas besseren Konvergenz, aber hier macht sich die Unstetigkeit in der 1. Ableitung bemerkbar, die eine weitere Verbesserung verhindert.

Führt man jedoch die Gebietstransformation in der letzten Dimension durch und wendet dann das Dünngitter-Clenshaw-Curtis-Verfahren an, erhält man ein deutlich besseres Konvergenzverhalten und erzielt bei gleicher Konvergenzrate eine bessere Performance als das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren.

Derselbe Versuch in 8 Dimensionen (Bild 6.10) bestätigt dieses Ergebnis. Allerdings erzielt man hier trotz Transformation nur noch die Konvergenzrate des Monte-Carlo-Verfahrens. Die höhere Dimension macht sich an dieser Stelle bemerkbar. Dennoch kann man sehen, daß es eine deutliche Verbesserung gegenüber den anderen Clenshaw-Curtis-Varianten gibt. Das Clenshaw-Curtis-Vollgitter-Verfahren konvergiert bei 8 Dimensionen eindeutig zu langsam für eine sinnvolle Anwendung und das Dünngitter-Verfahren zeigt in dem gemessenen Bereich gar keine Asymptotik. Die Kombination mit der Transformation ergibt aber auch bei 8 Dimensionen noch ein stabiles Verfahren.

Als letzter numerischer Test in diesem Kapitel wurde ein asiatischer Call mit arithmetischem Mittel in 4 Dimensionen (Bild 6.11) gerechnet. Da hier keine Black-

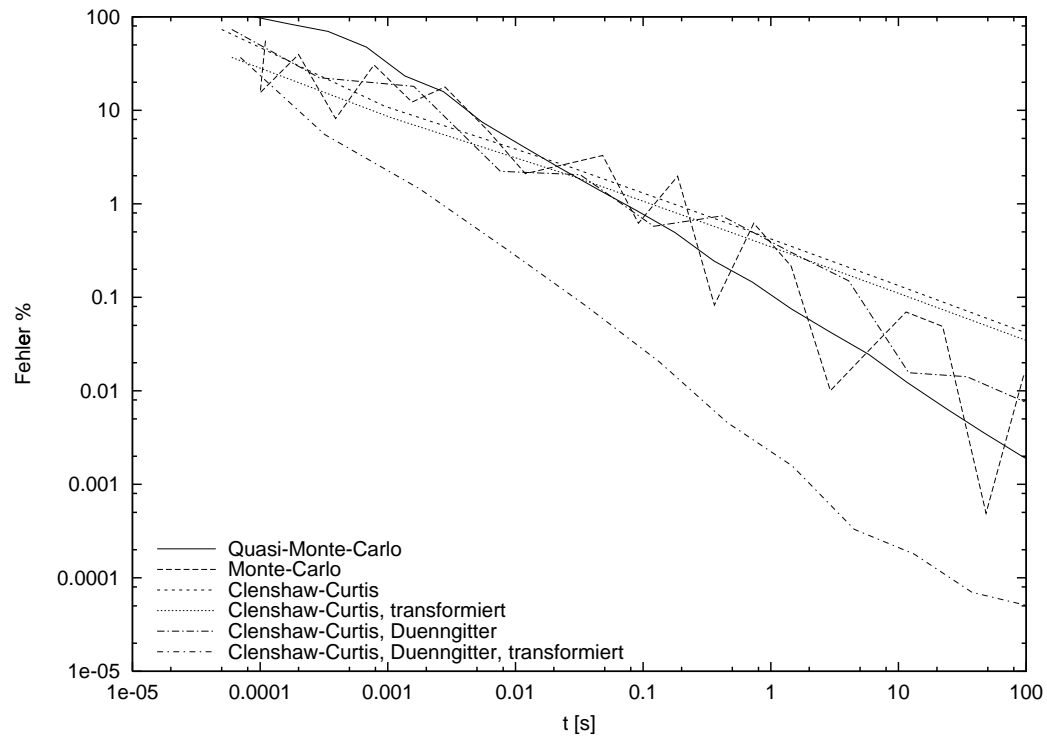


Bild 6.9: Performance Asiaticall 4D, geometrisch

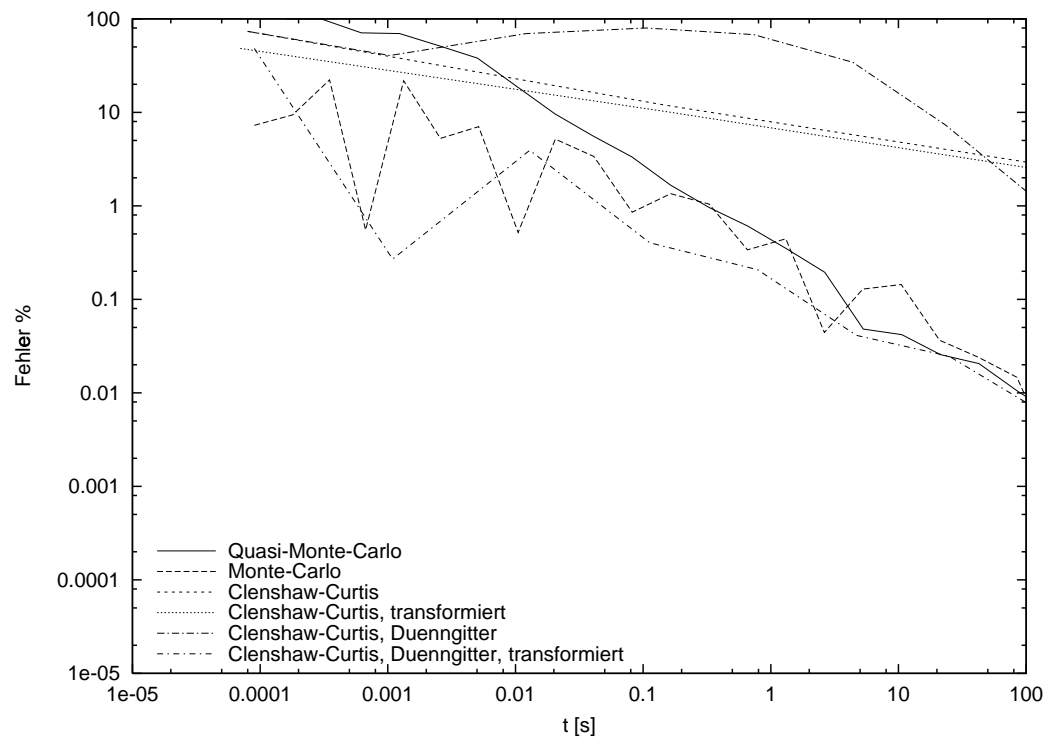


Bild 6.10: Performance Asiaticall 8D, geometrisch

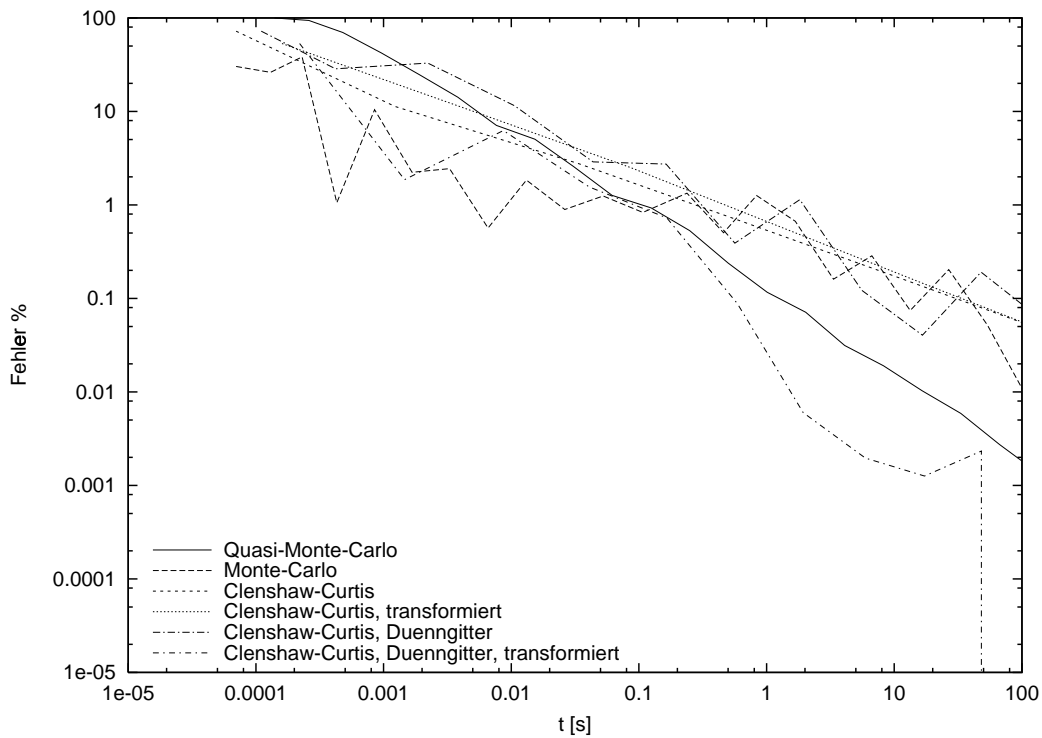


Bild 6.11: Performance Asiacall 4D, arithmetisch

Scholes-Formel zur Verfügung steht, wurde der Referenzwert mit Hilfe des Quasi-Monte-Carlo-Verfahrens auf 5 Nachkommastellen genau ausgerechnet.

Der universelle Ansatz der Gebietstransformation wird deutlich. Der gleiche Algorithmus wie bei den geometrischen asiatischen Optionen führt auch hier zu einer deutlichen Performance-Verbesserung beim Clenshaw-Curtis-Dünngitter-Verfahren.

Die Grundidee des Verfahrens, die Beschränkung der Integration auf den glatten Funktionsteil und eine anschließende Dünngitter-Integration, wurde bestätigt. Sie liefert in allen Dimensionen einen deutlichen Performance-Vorteil, nicht nur gegenüber der reinen Vollgitter-Integration, sondern auch gegenüber dem Clenshaw-Curtis-Vollgitter-Verfahren mit Transformation.

Allerdings muß man feststellen, daß man mit steigender Dimension doch recht schnell an die Grenzen stößt und ab ca. 8 Dimensionen das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren die bessere Wahl sein dürfte.

Kapitel 7

Performance Orientierte Optionen

7.1 Einführung

Die Tailored Options[27] oder auch performance-orientierte Optionen, sind die komplexesten Optionen, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden sollen. Ihre Payoff-Funktion hängt nicht vom Kurs eines einzelnen Basiswertes ab, sondern gleichzeitig von mehreren Basiswerten, die über eine sogenannte Korrelationsmatrix gekoppelt sind. Das heißt die Kurse der einzelnen Basiswerte sind nicht völlig unabhängig voneinander, sondern beeinflussen sich gegenseitig.

Die Anzahl n der Basiswerte ist hierbei die Dimension des später zu lösenden Integrals beim Erwartungswertansatz. Man hat es also somit, wie schon bei den pfadabhängigen Optionen, mit einem mehrdimensionalen Integrationsproblem zu tun. Allerdings weist die zu integrierende Funktion neben einem Knick auch noch eine Unstetigkeit auf, d.h. sie ist noch weniger glatt als bei einer pfadabhängigen Option.

Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß es zumindest in niedrigen Dimensionen möglich ist, diese Optionen mit dem Algorithmus aus Kapitel 6 zu berechnen. Des weiteren greifen wir einen Ansatz von Korn[25] auf, der ein Black-Scholes-Modell für tailored Options entwickelt hat, was die Bewertung auf die Lösung mehrdimensionaler Normalverteilungen zurückführt. Es wird sich zeigen, daß dieser Ansatz, in Kombination mit dem in Kapitel 3.1 vorgestellten Algorithmus nach Genz[15], die Möglichkeit bietet, auch diese Optionen in vertretbaren Zeiten zu bewerten.

7.2 Eigenschaften

Die Bezeichnung performance-orientiert rührt daher, daß der Wert der Option von der relativen Performance einer Aktie im Vergleich zu anderen Aktien abhängt. In der Praxis werden Tailored Options meist dort eingesetzt, wo Unternehmen, die

Mitarbeiteraktien ausgeben, sich gegen das finanzielle Risiko eines solchen Vorgehens absichern wollen.

Eine solche Firma bietet ihren Mitarbeitern Firmenaktien zu einem festen Preis an. Die Anzahl der Aktien, die jeder Mitarbeiter kaufen darf, hängt dabei von der Performance des Aktienkurses im Vergleich zu den Mitbewerbern ab.

Ein Beispiel soll die Funktion verdeutlichen: Bei einem Top-Ranking, also wenn die Aktie die beste Kursentwicklung aufweist, darf ein Mitarbeiter N Aktien zum Kurs E kaufen. Liegt die Aktie nicht an der Spitze, aber immer noch in der oberen Hälfte des Feldes, so erhält er die Option auf $N/2$ Aktien. Bei unterdurchschnittlicher Performance erhält er nur noch $N/4$ Aktien zum Kurs E .

Diese Position läßt sich durch Einlagerung einer entsprechenden Anzahl von Aktien absichern, was aber zu einem extremen Kapitalaufwand führen würde und dem Markt die Aktien entziehen würde. Insbesondere darf man nicht davon ausgehen, daß wirklich N Aktien benötigt werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Glattstellung der Position durch Kauf einer entsprechenden Option. Aber auch dieses Vorgehen ist relativ teuer und auch hier wird eine Option auf N Aktien benötigt. Bei unterdurchschnittlicher Performance würde aber die Kaufoption auf $N/4$ Aktien ausreichen.

Das optimale Instrument ist an dieser Stelle eine tailored Option. Hiermit kann sich das Unternehmen preiswert absichern, da die Option genau dieses Szenario berücksichtigt. Die Payoff-Funktion hängt nicht nur vom absoluten Wert der Option ab, sondern auch von der Performance (also der Wertentwicklung) der Aktie im Vergleich zur Performance von Mitbewerbern.

7.2.1 Payoff-Funktion

Der Wert der Payoff-Funktion hängt konkret vom Performance-Rang R der Aktie ab. Hat die Aktie über den Zeitraum die beste Performance, so ist $R = 1$, liegt sie auf Platz 2, so gilt $R = 2$ und die schlechteste Platzierung entspricht $R = n$.

Die Payoff-Funktion lautet dann:

$$V = \begin{cases} \max(S_T - E, 0) & : R = 1 \\ A \max(S_T - E, 0) & : 2 \leq R \leq m \\ B \max(S_T - E, 0) & : R > m \end{cases}$$

Die Parameter einer performance-orientierten Option sind also neben dem bekannten Strike-Price E , $m \in 2, 3, \dots, n$ das eine Abstufung innerhalb der Rangliste zuläßt und $0 \leq B \leq A \leq 1$, die eben gerade die Bruchteile der zu erwerbenden Aktien gegenüber dem Top-Ranking wiedergeben.

In obigem Beispiel wären diese Parameter also $m = n/2$, $A = 1/2$ und $B = 1/4$.

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Optionen ist die Payoff-Funktion nicht mehr stetig. Es tritt nun neben dem schon bekannten Knick auch eine Unstetigkeit auf einer $n - 1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit auf. Diese wird durch die Fallunterscheidung bei unterschiedlichem Ranking R erzeugt.

7.2.2 Erwartungswert

Die Payoff-Funktion weist aber auch hier die Eigenschaft auf, daß sie zumindest in achsenparalleler Richtung der letzten Dimension (also der x_n -Achse) monoton steigt. Somit läßt sich auch hier das Verfahren aus dem letzten Kapitel anwenden.

Die auf $(0; 1)$ transformierten Payoff-Funktionen von 2-dimensionalen performance-orientierten Optionen sind in Bild 7.1 dargestellt. Man sieht deutlich den Einfluß des Parameters A auf die Sprungstelle. B und m sind leider im 2-dimensionalen Fall nicht relevant sondern spielen erst in höheren Dimensionen eine Rolle.

Wir beschränken uns an dieser Stelle auf Tailored Options mit $A = B = 0$, d.h. an der Sprungstelle springt die Payoff-Funktion auf den Wert 0. Wählt man $A > 0$ oder $B > 0$, so existiert i.d.R. in Richtung der letzten Dimension eine Knickstelle (durch die Maximumsbildung) und ein Sprung. Der Algorithmus muß dann so angepaßt werden, daß er die letzte Dimension in 3 Teilintervalle zerlegt (statt in 2) und über die beiden letzten (auf denen die Funktion nicht verschwindet) integriert.

Uns stehen somit die gleichen Verfahren zur Verfügung wie bei den Asiatischen Optionen. Um die Dimension in den Griff zu bekommen, wird wieder das Dünngitter-Verfahren eingesetzt und die Sprungstelle wird wieder durch eine Transformation beseitigt. Der einzige Unterschied ist, daß man hier auf ein Bisektionsverfahren zur Bestimmung der Sprungstelle in der letzten Dimension zurückgreifen muß, da es sich ja nicht mehr um eine Nullstelle handelt.

In Bild 7.2 - 7.5 sind die verschiedenen Gitter der Quadratur-Verfahren auf Basis der Clenshaw-Curtis-Stützstellen dargestellt.

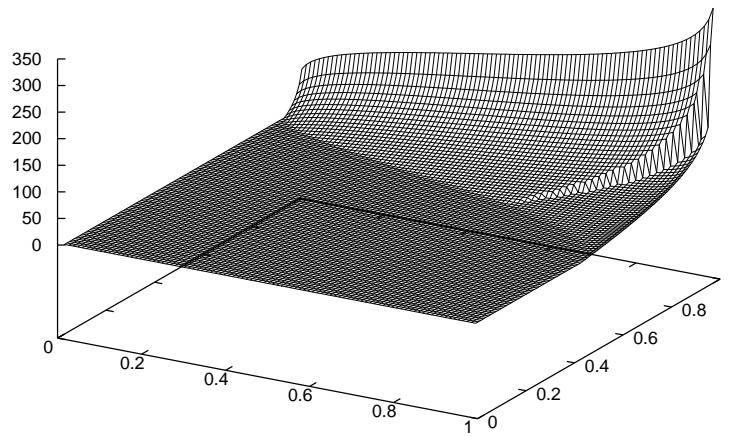
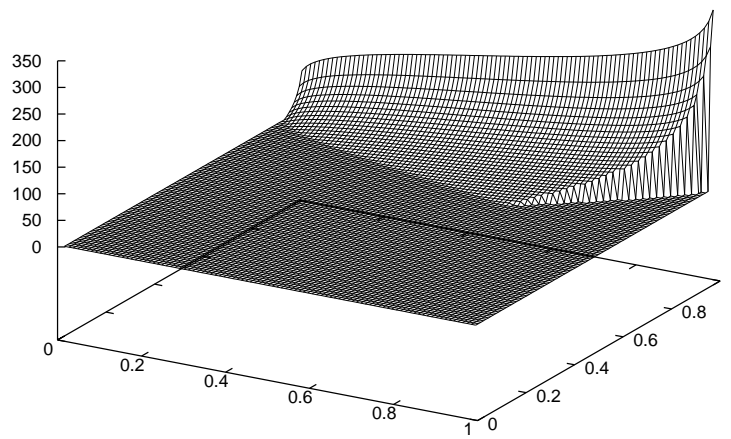
(a) $A=0.5$ (b) $A=0$

Bild 7.1: Integrand des Erwartungswertansatzes

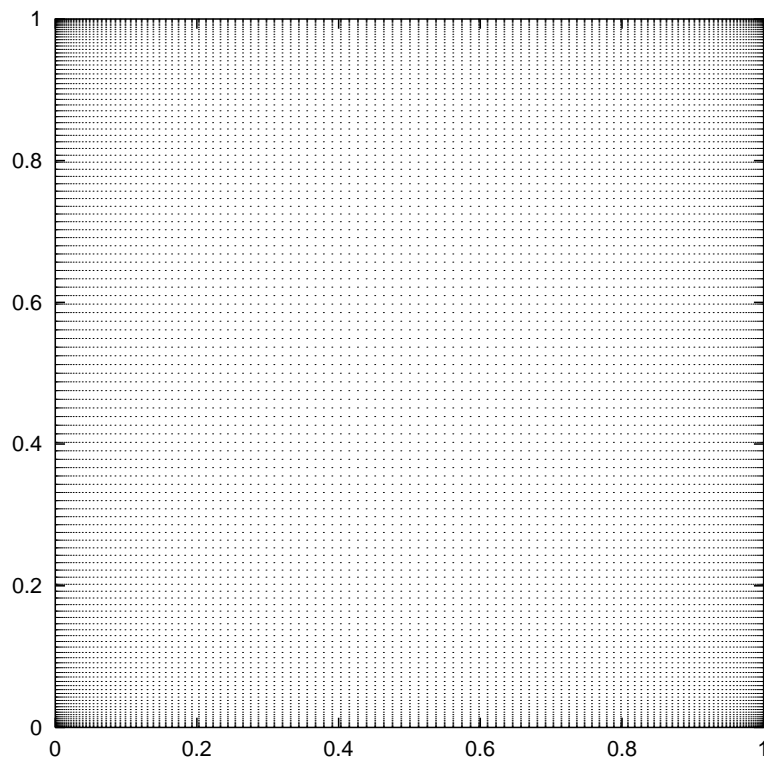
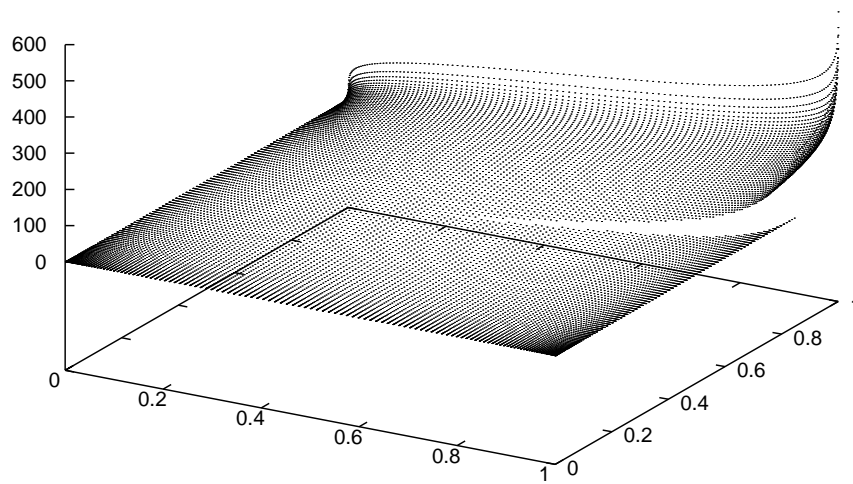


Bild 7.2: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Vollgitter ohne Transformation

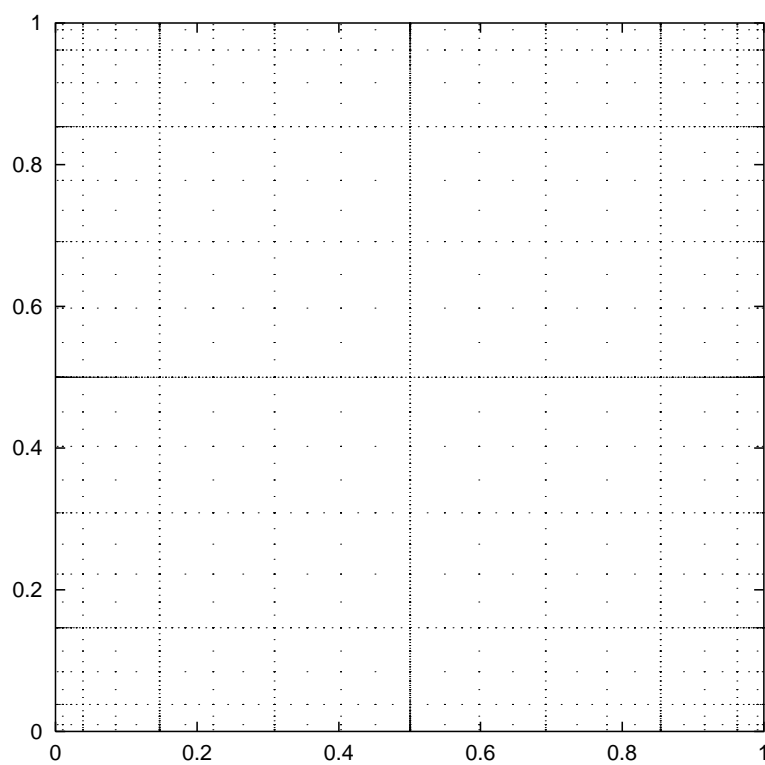
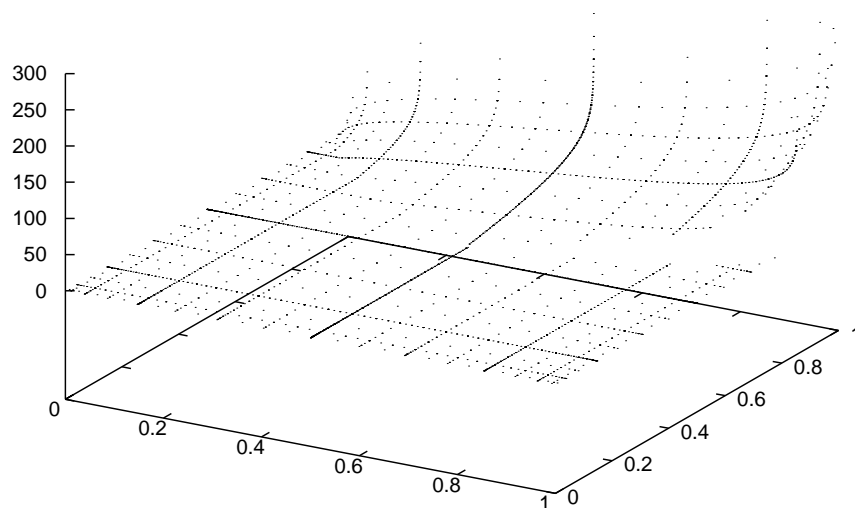


Bild 7.3: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Dünngitter ohne Transformation

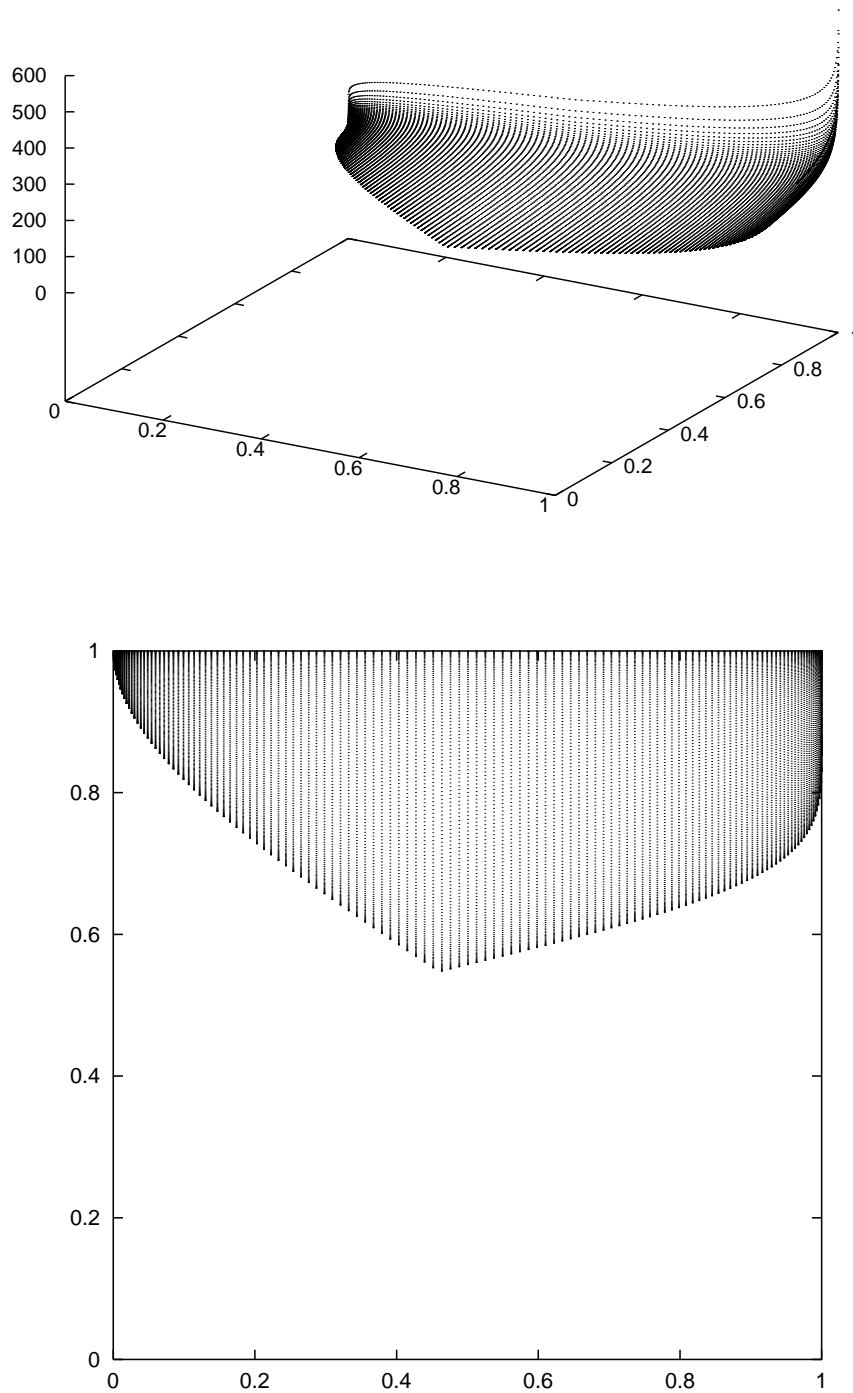


Bild 7.4: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Vollgitter mit Transformation

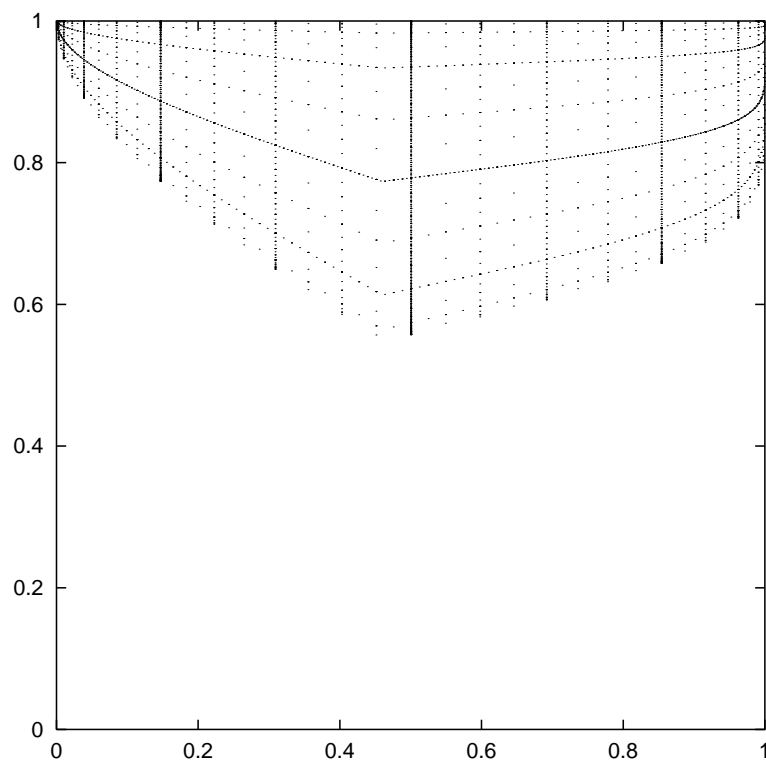
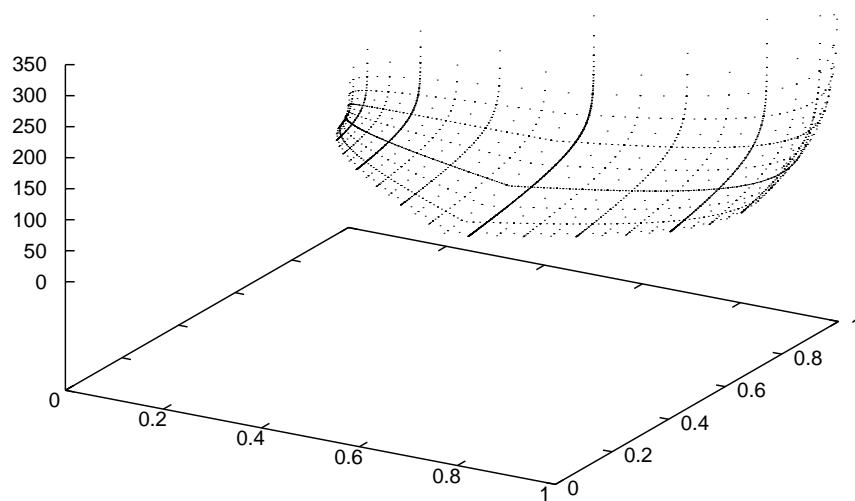


Bild 7.5: Clenshaw-Curtis-Stützstellen
Dünngitter mit Transformation

7.2.3 Black-Scholes

Auch für die performance-orientierten Optionen gibt es einen Ansatz nach Black-Scholes (siehe [25]). Im Gegensatz zu den Black-Scholes-Ansätzen für europäische und asiatische Optionen, die mit nur zwei Berechnungen einer eindimensionalen Normalverteilung auskamen, ist hier aber die Berechnung von mehreren n -dimensionalen Normalverteilungen nötig:

$$\begin{aligned}
p^B = & b \left[S_1 \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_1}{K}) + rT + \tilde{\sigma}_1}{\sqrt{2\tilde{\sigma}_1}} \right) - K e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_1}{K}) + rT - \tilde{\sigma}_1}{\sqrt{2\tilde{\sigma}_1}} \right) \right] \\
& + (a - b) \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{2 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n \\ \{i_1, \dots, i_{n-1}\} = \{2, \dots, n\}}} \left\{ S_1 \Phi^{(n, i_1, \dots, i_l)} \left(\ln \left(\frac{S_1}{K} \right) + rT + \tilde{\sigma}_1, -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma_{i_1 j} - \sigma_{1j})^2 T, \dots, \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma_{i_l j} - \sigma_{1j})^2 T, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma_{i_{l+1} j} - \sigma_{1j})^2 T, \dots, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma_{i_{n-1} j} - \sigma_{1j})^2 T) \\
& \left. \left. - K e^{-rT} \Phi^{(n, i_1, \dots, i_l)} \left(\ln \left(\frac{S_1}{K} \right) + rT - \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_{i_1}, \dots, \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_{i_l}, \tilde{\sigma}_{l+1} - \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1} - \tilde{\sigma}_1 \right) \right\} \right. \\
& + (1 - b) \left[S_1 \Phi^{(n, l)} \left(\ln \left(\frac{S_1}{K} \right) + rT + \tilde{\sigma}_1, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma_{2j} - \sigma_{1j})^2 T, \dots, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma_{2j} - \sigma_{1j})^2 T \right) \right. \\
& \left. - K e^{-rT} \Phi^{(n, l)} \left(\ln \left(\frac{S_1}{K} \right) + rT - \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_1 \right) \right]
\end{aligned}$$

Dabei ist ϕ die Standard Normalverteilung, $\phi^{(n,1)}$ das Integral der Normalverteilung der Zufallsvariablen $(-X_1, Z_2, \dots, Z_{i_{n-1}})$ und $\Phi^{(n, i_1, \dots, i_l)}$ das Integral der Normalverteilung des Zufallsvektors $(-X_1, -Z_{i_1}, \dots, -Z_{i_l}, Z_{i_{l+1}}, \dots, Z_{i_{n-1}})$, $l = 1, \dots, m-1$, mit

$$\begin{aligned}
(-X_1, Z_2, \dots, Z_{i_{n-1}}) & \sim N(\underline{0}, A\sigma(A\sigma)^T T), \\
\sigma = (\sigma_{ij}), \underline{0} = (0, \dots, 0)^T, \tilde{\sigma}_i & := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 T, \text{ und } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Obwohl sich die Dimension des Problems hierdurch nicht reduziert, bietet es Vorteile, da schließlich mit dem Algorithmus von A. Genz[15] ein schnelles und vor allem stabiles numerisches Verfahren zur Berechnung von mehrdimensionalen Normalverteilungen zur Verfügung steht. Der Performance-Vorteil ist allerdings deutlich geringer als bei den asiatischen Optionen, deren Black-Scholes-Ansatz ja die Dimension des Problems reduziert hat.

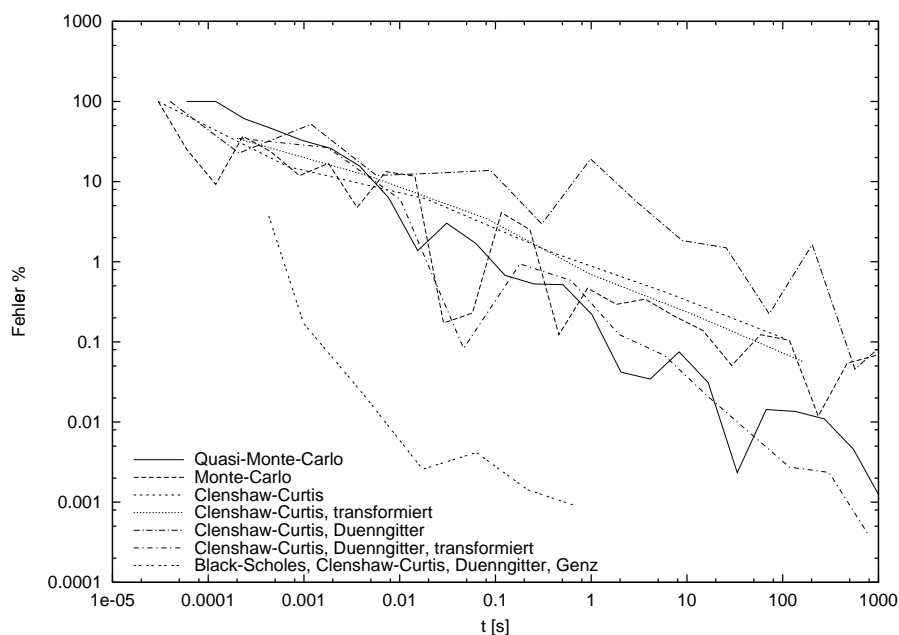


Bild 7.6: Performance Tailored Call 4D

7.3 Numerische Ergebnisse

Die unterschiedlichen Verfahren wurden jeweils zur Berechnung eines Tailored Calls eingesetzt. Die Tabellen sind wieder im Anhang zusammengefaßt.

In Bild 7.6 ist die Performance bei der Berechnung eines 4-dimensionalen Calls dargestellt. Man sieht sofort, daß die einzelnen Verfahren bei dieser Art von Option keine so gute Performance liefern wie bei einem asiatischen Call. Die Kombination von Clenshaw-Curtis-Dünngitter-Verfahren mit Transformation der Nullstelle bringt aber immernoch einen Vorteil gegenüber der Anwendung der Transformation auf das Vollgitter oder dem reinen Dünngitter-Verfahren ohne Transformation. Letzteres weist aufgrund der Sprungstelle sogar eine schlechtere Konvergenz auf als das Vollgitter-Clenshaw-Curtis-Verfahren.

Klarer Sieger dieser Messung ist der Black-Scholes-Ansatz nach Korn, deren Normalverteilungen mit dem Genz-Algorithmus aus Kapitel 3 berechnet wurden.

In Bild 7.7 wird derselbe Test bei 8 Dimensionen dargestellt. Es wird schnell deutlich daß bereits bei 8 Dimensionen die meisten Verfahren nicht mehr sinnvoll einsetzbar sind. Nur noch der Black-Scholes-Ansatz kann mit dem Quasi-Monte-Carlo-Verfahren konkurrieren. Alle andern Verfahren weisen eine sehr schlechte bis gar keine Konvergenz mehr auf und sind somit wertlos.

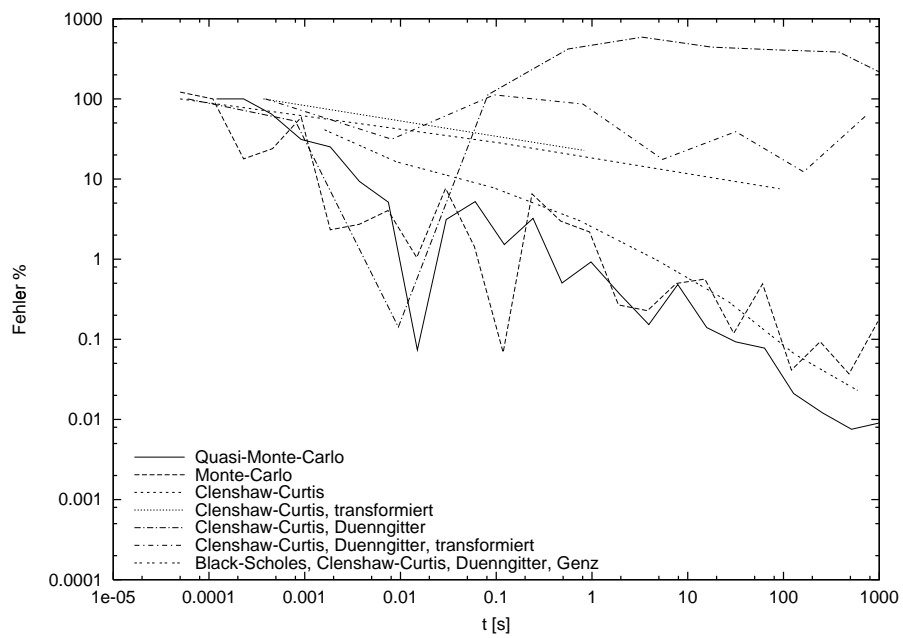


Bild 7.7: Performance Tailored Call 8D

Kapitel 8

Zusammenfassung/Ergebnisse

8.1 Normalverteilung

Die Untersuchung der existierenden Verfahren zur Berechnung der 1-dimensionalen Normalverteilung ergab, daß es in den meisten Fällen sinnvoll ist auf eines der Approximationsverfahren von Moro oder Cody zurückzugreifen. Allenfalls die Integration mittels des Clenshaw-Curtis-Verfahrens ist hier noch eine Alternative und bietet den Vorteil, daß sie skalierbar ist.

Im mehrdimensionalen Fall zeigten sich, daß der klassische Produktansatz nicht geeignet ist die Normalverteilung zu integrieren. Als sehr interessanter Ansatz für dieses Problem stellte sich aber die Transformation von Genz heraus. Schon mit dem von Genz vorgeschlagenen Monte-Carlo-Verfahren ist sie meist besser für die Berechnung geeignet als die direkte Integration. Der neue Ansatz die transformierte Funktion mittels eines Dünngitter-Verfahrens zu integrieren bringt aber zumindest bei Dimensionen $D \leq 12$ einen weiteren Performance-Gewinn.

Ob dieser Ansatz aber wirklich eine Alternative zu Genz/Monte-Carlo ist sollte Gegenstand weiterer Forschungen sein. Insbesondere müßte der Einfluß der Korrelationsmatrix und der Gebietsgrenzen auf das Konvergenzverhalten der Verfahren näher untersucht werden. Auch wäre es wünschenswert, das Verhalten in hohen Dimensionen weiter zu verbessern.

8.2 Optionsbewertung

Die Untersuchung der existierenden Verfahren zeigte, daß es in jedem Fall sinnvoll ist auf eine Black-Scholes-Formel zurückzugreifen, sofern eine solche für die entsprechende Option existiert. Die Performance dieses Verfahrens liegt, je nach Optionstyp, teilweise um Größenordnungen über dem einfachen Integrationsansatz.

Wenn diese Möglichkeit nicht gegeben ist stellt das neu entwickelte Verfahren der Gebietstransformation mit anschließender Dünngitter-Integration bei niedrigen und mittleren Dimensionen $D \leq 8$ eine gute Alternative zu anderen Verfahren da. Allerdings kann es die Erwartungen bezüglich der Flexibilität nicht ganz erfüllen. Die Grenze von 8 Dimensionen liegt deutlich niedriger als erwartet und das Konvergenzverhalten bei performance-orientierten Optionen ist bereits ab 4 Dimensionen nicht mehr befriedigend.

Es bleibt unklar ob hier wirklich ein grundsätzlicher Fehler im Verfahren liegt oder ob nur weitere Detail-Optimierungen erforderlich sind. Das schlechte Verhalten bei performance-orientierten Optionen könnte zum Beispiel durch den hier nicht differenzierbaren Rand des zu transformierenden Gebietes ausgelöst sein. Dies bietet aber durchaus einen interessanten Angriffspunkt für weitere Forschungen.

Vielversprechender als die einfache Gebietstransformation in der letzten Dimension erscheint bei den performance-orientierten Optionen aber der Ansatz von Korn[25]. Es zeigte sich, daß er in 4D das beste Verfahren darstellte und auch in 8 Dimensionen zumindest genauso gut ist wie das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren. In Verbindung mit der schnellen Berechnung der mehrdimensionalen Normalverteilung könnte sich hier eine Alternative zu Monte-Carlo- und Quasi-Monte-Carlo-Verfahren aufzeigen. Allerdings sind auch an dieser Stelle noch weitere Forschungen nötig, da die aktuelle Implementierung noch nicht die zu erwartende Performance liefert.

Anhang A

Numerische Ergebnisse

A.1 1-dimensionale Normalverteilung

A.1.1 Kumulative Normalverteilung $\Phi(1)$

Trapez-Regel

Zeit [ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00849828	0.8362609146122938	0.0050838314562490	6.0425051034e-01
0.01023825	0.8410295157407097	0.0003152303278331	3.7467427492e-02
0.01711639	0.8413250537995227	0.0000196922690201	2.3405700420e-03
0.04504699	0.8413435153392907	0.0000012307292521	1.4628116315e-04
0.15578699	0.8413446691481117	0.0000000769204311	9.1425552105e-06
0.60302822	0.8413447412610163	0.0000000048075265	5.7140964622e-07
2.37904858	0.8413447457680712	0.0000000003004716	3.5713250517e-08
9.48394046	0.8413447460497656	0.0000000000187772	2.2318076432e-09
37.95193276	0.8413447460673703	0.000000000011725	1.3936096801e-10
151.57122271	0.8413447460684707	0.0000000000000722	8.5772776448e-12
607.11574554	0.8413447460685468	0.0000000000000040	4.7504922340e-13

Simpson-Verfahren

Zeit [ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00902354	0.8413554878566492	0.0000107417881063	1.2767399945e-03
0.01026226	0.8413454061390930	0.0000006600705502	7.8454207277e-05
0.01698108	0.8413447486334515	0.0000000025649087	3.0485814141e-07
0.04396301	0.8413447460785587	0.0000000000100159	1.1904601580e-09
0.15233748	0.8413447460685821	0.0000000000000393	4.6713173635e-12
0.58729381	0.8413447460685426	0.0000000000000002	2.6391623522e-14

Clenshaw-Curtis-Verfahren

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00929697	0.8415290519962957	0.0001843059277529	2.1906106027e-02
0.00979833	0.8413450811724632	0.0000003351039204	3.9829549161e-05
0.01113211	0.8413447460684247	0.0000000000001181	1.4040343714e-11
0.01393320	0.8413447460685430	0.0000000000000002	2.6391623522e-14

Approximation nach Moro

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.03397465	0.8413447442224204	0.0000000018461224	2.1942513072e-07

Approximation nach Abramovitz/Stegun

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.03194809	0.8413447326427189	0.0000000134258239	1.5957572574e-06

Approximation nach Cody

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.04494190	0.8413447460685429	0.0000000000000001	1.3195811761e-14

A.2 n-dimensionale Normalverteilung

A.2.1 4D-Normalverteilung, $A = E$

DG-CC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00006	0.061828	0.000000	0

QMC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00012	0.072132	0.010305	1.666661e+01
0.00036	0.063889	0.002061	3.333339e+00
0.00137	0.062318	0.000491	7.936511e-01
0.00544	0.061949	0.000121	1.960785e-01
0.02193	0.061858	0.000030	4.887591e-02
0.08903	0.061835	0.000008	1.221001e-02
0.36139	0.061830	0.000002	3.051944e-03
1.46997	0.061828	0.000000	7.629513e-04
5.95469	0.061828	0.000000	1.907346e-04
24.24750	0.061828	0.000000	4.768615e-05
98.14110	0.061828	0.000000	1.192425e-05

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00008	0.054482	0.007346	1.188113e+01
0.00028	0.056010	0.005817	9.408988e+00
0.00106	0.065171	0.003343	5.406549e+00
0.00429	0.061144	0.000684	1.106012e+00
0.01740	0.061637	0.000190	3.081106e-01
0.07085	0.061855	0.000027	4.404475e-02
0.28884	0.061836	0.000008	1.269741e-02
1.17468	0.061827	0.000000	6.387644e-04
4.79561	0.061830	0.000002	3.801931e-03
19.52740	0.061828	0.000000	1.238360e-07

A.2.2 4D-Normalverteilung,

$$A = CC^t \quad C_{ij} = \max(0, 4 - \|i - j\|)/4$$

DG-CC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00006	0.007862	0.000062	7.777992e-01
0.00018	0.007898	0.000026	3.285288e-01
0.00076	0.007925	0.000001	1.405204e-02
0.00300	0.007924	0.000000	2.131696e-03
0.01089	0.007924	0.000000	5.792162e-04
0.03594	0.007924	0.000000	1.788220e-04
0.11119	0.007924	0.000000	8.294608e-06
0.32743	0.007924	0.000000	5.670527e-07
0.93144	0.007924	0.000000	8.762508e-08

QMC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00013	0.010775	0.002852	3.598816e+01
0.00039	0.008333	0.000410	5.170848e+00
0.00147	0.008054	0.000131	1.648601e+00
0.00586	0.007964	0.000040	5.026181e-01
0.02360	0.007942	0.000019	2.344022e-01
0.09566	0.007929	0.000005	6.481917e-02
0.38800	0.007925	0.000002	2.080798e-02
1.57469	0.007924	0.000000	5.899373e-03
6.37689	0.007924	0.000000	1.649623e-03
12.83040	0.007924	0.000000	8.248404e-04

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00009	0.001124	0.006799	8.581116e+01
0.00029	0.002229	0.005695	7.187346e+01
0.00110	0.005408	0.002516	3.174897e+01
0.00440	0.005891	0.002033	2.565812e+01
0.01787	0.007817	0.000106	1.343553e+00
0.07273	0.007865	0.000058	7.381864e-01
0.29687	0.007919	0.000004	5.483670e-02
2.44104	0.007922	0.000001	1.778856e-02
9.92836	0.007924	0.000000	2.002161e-03
40.40820	0.007924	0.000000	1.396584e-03

A.2.3 12D-Normalverteilung, $A = E$

DG-CC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00026	0.000236	0.000000	0

QMC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00033	0.000355	0.000118	5.000021e+01
0.00074	0.000253	0.000017	7.142887e+00
0.00241	0.000240	0.000004	1.612908e+00
0.00913	0.000237	0.000001	3.937016e-01
0.03628	0.000237	0.000000	9.784766e-02
0.14530	0.000236	0.000000	2.442603e-02
0.58099	0.000236	0.000000	6.104287e-03
2.33253	0.000236	0.000000	1.525930e-03
9.37893	0.000236	0.000000	3.814738e-04
37.70140	0.000236	0.000000	9.536529e-05
151.55000	0.000236	0.000000	2.383720e-05

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00022	0.341425	0.341188	1.443589e+05
0.00047	0.085943	0.085707	3.626325e+04
0.00147	0.021494	0.021257	8.994106e+03
0.00550	0.005615	0.005379	2.275849e+03
0.02175	0.001602	0.001366	5.779003e+02
0.08733	0.000508	0.000272	1.150334e+02
0.35208	0.000305	0.000069	2.915006e+01
1.41921	0.000260	0.000023	9.860840e+00
5.71011	0.000240	0.000004	1.607848e+00
23.03280	0.000235	0.000001	6.125358e-01
92.98260	0.000235	0.000001	3.985242e-01

A.2.4 12D-Normalverteilung,

$$A = CC^t \quad C_{ij} = \max(0, 4 - \|i - j\|)/4$$

DG-CC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00028	8.999590e-08	1.111250e-08	1.408727e+01
0.00270	7.353340e-08	5.349940e-09	6.782095e+00
0.10500	7.826690e-08	6.164570e-10	7.814797e-01
2.20563	7.872320e-08	1.601070e-10	2.029669e-01
25.90480	7.884820e-08	3.510580e-11	4.450346e-02

QMC-Verfahren mit Genz-Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00081	2.317280e-06	2.238390e-06	2.837597e+03
0.00270	5.489150e-07	4.700320e-07	5.958574e+02
0.01021	2.053040e-07	1.264210e-07	1.602633e+02
0.04029	1.168720e-07	3.798910e-08	4.815861e+01
0.16278	8.602770e-08	7.144350e-09	9.056860e+00
0.65659	8.132010e-08	2.436790e-09	3.089108e+00
2.67266	8.005540e-08	1.172030e-09	1.485777e+00
11.17770	7.915790e-08	2.745900e-10	3.480965e-01
42.20290	7.889340e-08	1.006040e-11	1.275352e-02
172.84100	7.886430e-08	1.905000e-11	2.414960e-02

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00032	1.704410e-03	1.704330e-03	2.160571e+06
0.00084	4.261020e-04	4.260240e-04	5.400687e+05
0.00297	1.065260e-04	1.064470e-04	1.349424e+05
0.01136	2.663140e-05	2.655250e-05	3.366048e+04
0.04488	6.657920e-06	6.579040e-06	8.340219e+03
0.17987	1.664550e-06	1.585670e-06	2.010147e+03
0.72724	4.253170e-07	3.464340e-07	4.391728e+02
2.94773	1.899200e-07	1.110360e-07	1.407598e+02
11.85240	7.854130e-08	3.420640e-10	4.336330e-01
47.73090	9.906280e-08	2.017950e-08	2.558146e+01
194.32800	5.397020e-08	2.491310e-08	3.158222e+01

A.3 Europäische Optionen

A.3.1 Black-Scholes-Formel

Clenshaw-Curtis-Verfahren

Zeit [ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00001	28.85740	0.11700	4.03815e-01
0.00002	28.97180	0.00257	8.85278e-03
0.00002	28.97440	0.00000	3.80633e-07
0.00004	28.97440	0.00000	2.45231e-14

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit [ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00015	31.74910	2.77475	9.57656e+00
0.00021	29.73290	0.75849	2.61778e+00
0.00044	29.16560	0.19128	6.60166e-01
0.00138	29.02230	0.04789	1.65267e-01
0.00528	28.98630	0.01197	4.13289e-02
0.02146	28.97740	0.00299	1.03329e-02
0.08820	28.97510	0.00075	2.58328e-03
0.36221	28.97460	0.00019	6.45822e-04
1.48967	28.97440	0.00005	1.61456e-04
6.11052	28.97440	0.00001	4.03639e-05
25.10270	28.97440	0.00000	1.00910e-05
103.09500	28.97440	0.00000	2.52275e-06

Approximation nach Moro

Zeit [ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00001	28.97437	0.00000	1.29825e-06

A.3.2 Intergrand gewichtet, Integration von $(-10; 10)$

Clenshaw-Curtis-Verfahren

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00000	7.70471	2.74588	9.47692e+00
0.00001	4.30243	6.14816	2.12193e+01
0.00002	8.15327	2.29732	7.92879e+00
0.00004	10.31360	0.13695	4.72662e-01
0.00009	10.49130	0.04076	1.40689e-01
0.00016	10.46680	0.01625	5.60933e-02
0.00031	10.45080	0.00026	8.84229e-04
0.00062	10.45170	0.00113	3.91125e-03
0.00123	10.45030	0.00024	8.33184e-04
0.00248	10.45060	0.00001	1.76352e-05
0.00495	10.45060	0.00002	6.09597e-05

Clenshaw-Curtis-Verfahren mit Transformation

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00000	0.00366	10.44690	3.60556e+01
0.00000	18.19960	7.74899	2.67443e+01
0.00001	10.20920	0.24136	8.33004e-01
0.00002	10.44720	0.00335	1.15630e-02
0.00003	10.45060	0.00000	2.50182e-08
0.00007	10.45060	0.00000	6.13079e-15

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00003	5.77980	4.67078	1.61204e+01
0.00005	9.96880	0.48178	1.66278e+00
0.00012	10.48110	0.03054	1.05399e-01
0.00041	10.44850	0.00212	7.32778e-03
0.00158	10.45070	0.00007	2.52263e-04
0.00646	10.45060	0.00000	1.07975e-05
0.02646	10.45060	0.00000	1.17832e-06
0.10849	10.45060	0.00000	1.00029e-07
0.44418	10.45060	0.00000	7.01757e-09
1.81858	10.45060	0.00000	2.32982e-10
7.44247	10.45060	0.00000	1.91158e-11

A.3.3 Integrand transformiert nach (0;1)**Clenshaw-Curtis-Verfahren**

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00001	26.67770	2.29671	7.92669e+00
0.00002	28.12880	0.84554	2.91825e+00
0.00015	28.93480	0.03960	1.36659e-01
0.00160	28.97150	0.00285	9.83506e-03
0.02243	28.97410	0.00026	8.98711e-04
0.34664	28.97440	0.00001	4.77321e-05
5.51236	28.97440	0.00000	2.02955e-06
88.40430	28.97440	0.00000	1.93495e-07

Clenshaw-Curtis-Verfahren mit Transformation

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00001	26.49240	2.48199	8.56615e+00
0.00002	28.23340	0.74098	2.55735e+00
0.00015	28.92620	0.04817	1.66241e-01
0.00159	28.97150	0.00290	9.99682e-03
0.02238	28.97420	0.00018	6.17435e-04
0.34641	28.97440	0.00001	3.86924e-05
5.53700	28.97440	0.00000	2.44548e-06
88.47440	28.97440	0.00000	1.55300e-07

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[ms]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00009	24.26740	4.70692	1.62451e+01
0.00016	27.52600	1.44840	4.99890e+00
0.00048	28.55200	0.42235	1.45766e+00
0.00175	28.85430	0.12007	4.14390e-01
0.00698	28.94080	0.03357	1.15855e-01
0.02847	28.96510	0.00927	3.19846e-02
0.11631	28.97180	0.00253	8.74658e-03
0.47522	28.97370	0.00069	2.37379e-03
1.94002	28.97420	0.00019	6.40272e-04
7.91794	28.97430	0.00005	1.71815e-04
32.30130	28.97440	0.00001	4.59060e-05
131.73800	28.97440	0.00000	1.22197e-05

A.4 Asiatische Optionen

A.4.1 4D-Asiacall, geometrisch

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00009	0.000000	6.733490	1.000000e+02
0.00034	2.031880	4.701600	6.982412e+01
0.00136	5.165280	1.568210	2.328971e+01
0.00548	6.229250	0.504241	7.488553e+00
0.02206	6.569410	0.164075	2.436701e+00
0.08889	6.676510	0.056978	8.461897e-01
0.35779	6.716950	0.016538	2.456096e-01
1.44249	6.728400	0.005084	7.550334e-02
5.81282	6.731830	0.001656	2.458606e-02
23.43000	6.733050	0.000438	6.502720e-03
94.38360	6.733350	0.000133	1.972900e-03
381.43800	6.733450	0.000041	6.103239e-04
1535.89000	6.733480	0.000011	1.594121e-04

DG-CC-Verfahren mit Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00007	4.250130	2.483360	3.688073e+01
0.00032	6.361710	0.371782	5.521386e+00
0.00178	6.636450	0.097042	1.441184e+00
0.00855	6.711560	0.021927	3.256424e-01
0.03564	6.728020	0.005466	8.117410e-02
0.13318	6.732100	0.001387	2.059289e-02
0.45717	6.733180	0.000307	4.559864e-03
1.47261	6.733380	0.000106	1.570033e-03
4.50305	6.733470	0.000022	3.270132e-04
13.23000	6.733480	0.000012	1.813918e-04
37.66750	6.733480	0.000005	6.964887e-05

A.4.2 8D-Asiacall, geometrisch

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00030	0.000000	6.137650	1.000000e+02
0.00124	1.864100	4.273550	6.962844e+01
0.00504	3.801180	2.336480	3.806799e+01
0.02036	5.545020	0.592631	9.655666e+00
0.08177	5.932780	0.204873	3.337971e+00
0.32841	6.078590	0.059060	9.622494e-01
1.31887	6.116170	0.021478	3.499352e-01
5.29813	6.134690	0.002958	4.820070e-02
21.29660	6.136080	0.001575	2.566618e-02
85.45520	6.137010	0.000640	1.043147e-02
343.34300	6.137520	0.000133	2.159801e-03
1382.02000	6.137620	0.000034	5.465317e-04

DG-CC-Verfahren mit Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00009	3.168650	2.969000	4.837356e+01
0.00109	6.121090	0.016563	2.698525e-01
0.01293	5.896630	0.241019	3.926894e+00
0.11254	6.162390	0.024738	4.030533e-01
0.78553	6.124880	0.012767	2.080161e-01
4.69391	6.135130	0.002525	4.114376e-02
24.93280	6.136140	0.001514	2.467133e-02
120.45100	6.138070	0.000415	6.763207e-03

A.4.3 12D-Asiacall, geometrisch

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00023	0.000000	5.940200	1.000000e+02
0.00089	0.153360	5.786840	9.741827e+01
0.00370	2.229400	3.710810	6.246945e+01
0.01517	4.007770	1.932430	3.253140e+01
0.05953	5.386450	0.553754	9.322144e+00
0.23906	5.774850	0.165354	2.783644e+00
0.95845	5.902650	0.037551	6.321572e-01
3.84427	5.926310	0.013891	2.338423e-01
15.42460	5.936680	0.003521	5.928083e-02
61.83700	5.938930	0.001265	2.130332e-02
248.32800	5.939920	0.000277	4.662755e-03
996.22100	5.940170	0.000034	5.735834e-04

DG-CC-Verfahren mit Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00011	2.712750	3.227450	5.433235e+01
0.00353	6.318020	0.377824	6.360459e+00
0.14511	5.259550	0.680653	1.145842e+01
2.95851	6.341130	0.400934	6.749503e+00
33.46140	5.691290	0.248910	4.190263e+00
252.26400	6.032110	0.091907	1.547204e+00

A.4.4 4D-Asiacall, arithmetisch

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00026	0.157776	2.412400	9.386113e+01
0.00096	1.483120	1.087060	4.229509e+01
0.00381	2.205100	0.365079	1.420441e+01
0.01534	2.440420	0.129762	5.048751e+00
0.06170	2.537650	0.032535	1.265865e+00
0.25019	2.556520	0.013658	5.313869e-01
1.01186	2.567190	0.002988	1.162724e-01
4.08293	2.569370	0.000807	3.138130e-02
16.52560	2.569920	0.000264	1.028169e-02
66.78920	2.570110	0.000070	2.740730e-03
273.07100	2.570160	0.000022	8.672194e-04
1100.50000	2.570180	0.000004	1.736341e-04

DG-CC-Verfahren mit Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00022	1.199380	1.370800	5.333479e+01
0.00146	2.618080	0.047904	1.863823e+00
0.00867	2.409920	0.160263	6.235478e+00
0.04087	2.610160	0.039976	1.555389e+00
0.16516	2.551490	0.018691	7.272214e-01
0.58979	2.572440	0.002262	8.799656e-02
1.93379	2.570030	0.000154	6.007634e-03
5.93631	2.570230	0.000050	1.958275e-03
17.23650	2.570150	0.000032	1.259799e-03
48.13320	2.570120	0.000060	2.330794e-03
130.29500	2.570180	0.000000	6.943833e-07
345.51200	2.570180	0.000003	1.030360e-04
901.19100	2.570180	0.000001	3.245314e-05

A.5 Performance-Orientierte Optionen

A.5.1 4D-Tailored Call

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00006	0.000000	15.834200	1.000000e+02
0.00024	6.209950	9.624250	6.078141e+01
0.00095	10.648800	5.185440	3.274835e+01
0.00382	13.359900	2.474250	1.562599e+01
0.01544	15.616500	0.217691	1.374815e+00
0.06246	15.566200	0.268019	1.692659e+00
0.25169	15.750400	0.083794	5.291950e-01
1.01919	15.799500	0.034657	2.188743e-01
4.12483	15.828800	0.005445	3.438936e-02
16.65310	15.829300	0.004921	3.108114e-02
67.28480	15.831900	0.002268	1.432336e-02
271.95900	15.832500	0.001734	1.095224e-02
1099.74000	15.834400	0.000162	1.020007e-03

DG-CC-Verfahren mit Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00021	10.353700	5.480550	3.461211e+01
0.01019	14.895100	0.939110	5.930896e+00
0.17985	15.983200	0.149025	9.411590e-01
1.94687	15.814600	0.019616	1.238844e-01
16.31390	15.830900	0.003346	2.112895e-02
117.52600	15.833800	0.000434	2.739722e-03
772.18000	15.834100	0.000064	4.041972e-04

Korn-Verfahren mit Genz/DG-CC

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00043	16.424200	0.589973	3.725941e+00
0.00099	15.807200	0.027007	1.705606e-01
0.00425	15.830800	0.003410	2.153661e-02
0.01737	15.834600	0.000407	2.570411e-03
0.06308	15.834900	0.000660	4.165496e-03
0.21581	15.834400	0.000226	1.429652e-03
0.64015	15.834300	0.000147	9.279092e-04

A.5.2 8D-Tailored Call

Quasi-Monte-Carlo-Verfahren

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00023	0.000000	16.200000	1.000000e+02
0.00092	11.148900	5.051110	3.117969e+01
0.00372	14.687700	1.512350	9.335494e+00
0.01499	16.211900	0.011921	7.358827e-02
0.06028	15.352000	0.847980	5.234444e+00
0.24242	16.724300	0.524334	3.236630e+00
0.97572	16.349800	0.149835	9.249074e-01
3.92571	16.175200	0.024782	1.529765e-01
15.79580	16.177300	0.022659	1.398673e-01
63.49010	16.187400	0.012570	7.759136e-02
255.47500	16.198000	0.001958	1.208790e-02
1027.89000	16.201500	0.001474	9.098704e-03

DG-CC-Verfahren mit Transformation

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00039	0.000000	16.200000	1.000000e+02
0.00808	21.286600	5.086580	3.139864e+01
0.09495	-2.013910	18.213900	1.124315e+02
0.80305	30.161300	13.961300	8.618086e+01
5.47746	13.351900	2.848110	1.758093e+01
31.69310	9.875030	6.324970	3.904302e+01
162.46000	14.205400	1.994630	1.231253e+01
754.53400	26.616600	10.416600	6.430000e+01

Korn-Verfahren mit Genz/DG-CC

Zeit[s]	V_{num}	Fehler	Fehler %
0.00161	22.880600	6.680630	4.123846e+01
0.00905	13.538800	2.661190	1.642710e+01
0.09346	17.463500	1.263460	7.799136e+00
0.74517	15.711800	0.488203	3.013599e+00
4.79858	16.356800	0.156787	9.678210e-01
26.54170	16.152000	0.048046	2.965833e-01
131.33000	16.210500	0.010529	6.499630e-02
594.61300	16.203700	0.003732	2.303463e-02

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramovitz, I.A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, N.Y., 1965
- [2] M. Beckers, A. Haegemans: *Comparison of Numerical Integration Techniques for Multivariate Normal Integrals*, Computer Science Department preprint, Catholic University of Leuven, Belgium, 1992
- [3] R. Bellmann: *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*, Princetown Univ. Press, Princetown, NJ, USA, 1961
- [4] F.Black, M.Scholes: *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Po. Econ., 81, S.637-659, 1973
- [5] T. Bonk: *A new algorithm for multi-dimensional adaptive numerical quadrature*, in *Adaptive Methods – Algorithm, Theory and Applications*, W. Hackbush, G.Wittum (Hersg.), S.54-68, Vieweg, Braunschweig, 1994
- [6] C.W. Clenshaw, A.R. Curtis: *A method for numerical integration on an automatic computer*, Numerische Mathematik 2, 197-205, 1960
- [7] W.D. Cody, *ALGORITHM 715: SPECFUN - A Portabel FORTRAN Package of Special Function Routines and Test Drivers*, ACM Transactions on Mathematical Software 19, 1993
- [8] D.R. Cox, N. Wermuth: *A simple approximation for bivariarte and trivariate normal integrals*, International Statistical Review 59, S.263-269, 1991
- [9] J. Cox, M. Rubinstein: *Options Markets*, Prentice-Hall, New York, 1985
- [10] I. Deák: *Three Digit Accurate Multiple Normal Probabilities*, Numer. Math. 35, S.369-380, 1980
- [11] I. Deák: *Computing Probabilities of Rectangles in Case of Multinormal Distributions*, Journal of Statistical Computation and Simulation 26, S.101-114, 1986

- [12] F.-J. Delvos, W. Schempp: *Boolean methods in interpolation and approximation*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 230, Longman, Essex, 1989
- [13] T.G. Donnelly: *Algorithm 462: Bivariate Normal Distribution*, Communications of the ACM 16, S.638, 1973
- [14] Z. Drezner, G.O. Wesolowsky: *On the computation of the bivariate normal integral*, Journal of Statistical Computation and Simulation 35, S.101-107, 1990
- [15] A. Genz: *Numerical Computation of Multivariate Normal Probabilities*, J. Comp. Graph Stat. 1, 1992
- [16] A. Genz: *Comparison of Methods for the Computation of Multivariate Normal Probabilities*, Computing Science and Statistics 25, 1993
- [17] T. Gerstner, M. Griebel: *Numerical Integration using Sparse Grids*, Numer. Algorithms, 18, S.209-232, 1998
- [18] W.J.Gordon: *Blending function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation*, SIAM J. Num. Anal. 8, S.158-177, 1971
- [19] J.H. Halton: *On the Efficiency of Certain Quasi-random Sequences of Points in Evaluating Multi-dimensional Integrals*, Numerische Mathematik 2, S.84-90, 1960
- [20] J.Hull: *Options, Futures and other derivative securities*, Prentice-Hall, 1993
- [21] J.M. Hammersley, D.C. Handscomb: *Monte Carlo Methods*, Methuen, London, 1964
- [22] R.A. Jarrow, A. Rudd: *Option Pricing*, Irwin, 1983
- [23] R.J. Jarrow, S. Turnbull: *Derivative Securities*, South Western, Cincinnati, 1996
- [24] Kennedy, Gentle, *Statistical Computing*, Marcel Dekker, NY, 1980
- [25] R. Korn: *Valuation of tailored options in a Black-Scholes Framework*, working paper, 1996
- [26] A.G. Malliaris: *Ito Calculus in Financial Decision Making*, SIAM Review 25, S.481-496, 1983
- [27] N. Meade, G.R. Salkin: *Index Funds-Construction and Performance Measurement* Journal of the Operational Research Society 40(10), 871-879
- [28] B. Moro, *The Full Monte*, RISK, 1995.
- [29] S.N. Neftci: *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, 1996

- [30] H. Niederreiter: *Random Number Generation and Quasi-Monte-Carlo Methods*, SIAM, Philadelphia, 1992
- [31] H. Niederreiter: *Proceedings in Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1996*, H. Niederreiter et al. (Hersg.), Springer, 1996
- [32] E. Novak, K. Ritter: *Simple cubature formulas for d -dimensional integrals with high polynomial exactness and small error*, Report, Institut für Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, 1997
- [33] E. Novak, K. Ritter: *High dimensional integration of smooth functions over cubes*, Numer. Math., 75, 79-98, 1996
- [34] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vettering, B.P. Flannery *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1992
- [35] R. Schaback, H. Werner: *Numerische Mathematik*, Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 1993
- [36] M. Schervish: *Multivariate Normal Probabilities with Error Bound*, Applied Statistics 33, S.81-87, 1984
- [37] S.A. Smolyak: *Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR4, 240-243, 1963
- [38] J. Stoer: *Numerische Mathematik I*, Springer-Berlin, 1989
- [39] Y.L. Tong: *The Multivariate Normal Distribution*, Springer-Verlag, New York, 1990
- [40] J. Traub, S. Paskov: *Faster evaluation of financial derivatives*, Journal of Portfolio Management 22, 1, S.113-120, 1995
- [41] J.F. Traub, G.W. Wasilowski, H. Wozniakowski: *Information-Based Complexity*, Academic Press, New York, 1988
- [42] G.W. Wasilkowski, H. Woźniakowski: *Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems*, J. Complexity 11, S.1-56, 1995
- [43] P. Wilmott, J.N. Dewynne & S.D. Howison: *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, 1995
- [44] P. Wilmott, J.N. Dewynne, S.D. Howison: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press, 1993
- [45] C. Zenger: *Sparse Grid*, in W. Hackbush (ed.): *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations*, Notes on Numerical Fluid Mechanics 31, Vieweg, Braunschweig, 1991

- [46] *Einführung in Termingeschäfte*, Guthmann & Roth, Internetangebot unter <http://www.guthmann-roth.de/boersenhandel>
- [47] *Informationen zu Finanzderivaten*, Deutsche Bank, Internetangebot unter <http://www.deutsche-bank.de>
- [48] *Warrantstour*, Citi Bank, Internetangebot unter <http://warrants.citibank.com>