

DIPLOMARBEIT

Numerische Verfahren für stochastische Kontrollprobleme mit Anwendungen in der Ökonomie

angefertigt am

Institut für Numerische Simulation

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

im November 2006

von

Allan Zulficar

aus

Düsseldorf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das stochastische Kontrollproblem	9
2.1	Diskrete Version des Kontrollproblems	13
2.2	Kontinuierliche Version des Kontrollproblems	16
2.3	Einbettung der diskreten in die kontinuierliche Version	18
3	Lösungsansätze	21
3.1	Monte-Carlo-Methoden	22
3.2	Deterministische Simulation	25
3.3	MARKOV-Ketten	27
3.4	HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-Gleichung	28
3.4.1	Herleitung	28
3.4.2	Herleitung mit Diskontierung	32
3.4.3	Existenz und Eindeutigkeit	33
3.4.4	Diskretisierung mit finiten Differenzen auf anisotropen Gittern	34
3.5	Dünngitterdiskretisierung mit der Kombinationstechnik	46
3.5.1	Nodale Räume und ihre Überschüsse: Hierarchische Räume	47
3.5.2	Die Kombinationstechnik	48
4	Anwendung auf optimale Portfolios	53
4.1	Diskretes Modell	53
4.1.1	Markt	53
4.1.2	Investitionen und Konsum: Vermögen	58
4.1.3	Alternative Formulierungen	60
4.2	Kontinuierliches Modell	61
4.2.1	Märkte	61
4.2.2	Investitionen und Konsum	63
4.2.3	Mehrdimensionales Vermögen mit Transfer	65
4.2.4	Nutzenmaximierungsproblem	69
4.3	Diskretisierung der HJB-Gleichung	76

5	Numerische Ergebnisse	81
5.1	Die analytische Referenzlösung	81
5.2	Maximierungsroutinen	83
5.3	Fehlermessung	86
5.4	Die CRRA-Nutzenfunktion: Mertons Beispiel	87
5.4.1	Gebietswahl	88
5.4.2	Konvergenzverhalten	90
5.4.3	Sensitivitätsanalyse	91
5.4.4	Fehlerstruktur	95
5.4.5	Mehrere Aktien	98
5.4.6	Die Rolle der Nachiteration	100
5.5	Die CARA-Nutzenfunktion	102
5.6	Zweidimensionale Berechnungen	106
6	Schlussbemerkungen und Ausblick	117
	Symbolverzeichnis	119
	Literaturverzeichnis	121
	Index	127

Kapitel 1

Einleitung

Komplexe Vorgänge in der Volkswirtschaft erfordern eine genaue Modellierung, die ein ökonomisches Phänomen möglichst realitätsgetreu in eine mathematisch zu fassende, analysierbare Struktur überführt. Dabei ist nicht immer gesichert, dass für ein die Realität abbildendes Modell eine analytische Lösung gefunden werden kann. Daher ist der Einsatz numerischer Verfahren unverzichtbar. Mit geeigneten Approximationen lassen sich hinreichend gute, diskrete Näherungen der nicht bekannten kontinuierlichen Lösung des Modells finden. Während die Numerik in den Naturwissenschaften seit langem eine wichtige Rolle bei der Simulation realer Vorgänge spielt und die Finanzwirtschaft ebenfalls von numerischen Simulationsverfahren Gebrauch macht, werden solche Verfahren zunehmend auch in der Volkswirtschaftslehre verwendet.

Die Betrachtung dynamischer Ökonomien führt in natürlicher Weise auf Modelle, die den Einfluss unterschiedlicher Faktoren auf Teile der Wirtschaft oder auch auf den gesamten Wirtschaftsraum über die Zeit beschreiben. Solche Faktoren können exogen auf die Ökonomie einwirken und ihre Veränderung hervorrufen, oder sie können sich endogen, also als Teil des Wirtschaftsgeschehens, in Reaktion auf ihre eigenen Umstände einstellen. Diese dynamischen Modelle sind von verstärktem Interesse, um Entscheidungsfindungen abzubilden und qualitative Voraussagen über die Entwicklung einer Volkswirtschaft zuzulassen.

Problemstellung

Eine wichtige Klasse von dynamischen Problemen in der Ökonomie lässt sich mathematisch als stochastisches Kontrollproblem modellieren. Innerhalb eines stochastischen Systems kann die Entwicklung eines Prozesses durch eigene Einwirkung mit bestimmt werden, und eine Handlungsstrategie soll so gewählt werden, dass über einen vorher festgelegten Zeitraum optimaler Nutzen erreicht wird. Die Entscheidung etwa, einen Teil des vorhandenen Vermögens im Kapitalmarkt anzulegen und den Rest für alltäglichen Konsum bereitzuhalten, ist eine solche Strategie. Das Vermögen ist dann der im stochastischen Umfeld des Markts gesteuerte Prozess. Nutzen beschreibt die individuellen Präferenzstrukturen über Zustände des Systems oder die Höhe einzelner gewählter Parameter. Diese Präferenzordnungen werden von Nutzenfunktionen in Zahlen abgebildet, die feste ökonomische Strukturen berücksichtigen.

Nutzen kann gewöhnlich nicht aus dem gelenkten stochastischen Prozess selbst gezogen werden, sondern aus einem davon abhängigen Teil der Strategie. So bringt Geld beispielsweise erst dann Nutzen, wenn es für Konsum aufgewendet wird. Diese Konsumententscheidung, ebenso wie eine Investitionsentscheidung, die zukünftigen Konsum ermöglicht, ist Teil der Strategie. In einem Kontrollproblem stellt sich eine intertemporale Nutzenfunktion als Zielfunktional dar, das es zu maximieren gilt, und Kontrollvariablen sind Investitions-, Spar- und Konsumententscheidungen. Die Kontrolle wird selbst zu einer Funktion über Zeit und Raum, die für jeden möglichen Zustand des Systems eine Handlung vorgibt. Sie liegt in einem geeigneten Funktionenraum und geht sowohl in das zu maximierende Zielfunktional ein, das ihren Wert misst, als auch in eine Nebenbedingung, die ihre Zulässigkeit überprüft. Die Nebenbedingung ist eine stochastische Differentialgleichung, die die zeitliche Entwicklung des Prozesses in seiner zufallsbehafteten Umgebung und den Einfluss beschreibt, den die Kontrolle auf ihn nimmt.

So geartete stochastische Modelle finden sich in der allgemeinen Gleichgewichtstheorie (Kübler, Schmedders [38], Judd [30, 31], Harris und Laibson [24]), bei der endogenen Preisbestimmung in Märkten (Lucas [41], Merton [46], Liu [40]), bei Wohlfahrtsanalysen (Winschel [64]) und der Rolle des Sozialplaners (Camacho, Zou und Briani [9]) oder bei Maximum-Likelihood-Schätzungen (Heiss und Winschel [25]). Einen Überblick stellen Marimon und Scott [43] sowie Taylor und Uhlig [61] bereit. Neben diesen eher makroökonomischen Anwendungen sind auch in der mikroökonomischen Theorie zahlreiche Kontrollprobleme wie die individuelle Gewinnmaximierung (Merz und Yashiv [47], Korn [35], Karatzas und Shreve [33]), die Wahl eines optimalen Portfolios (Platen [55], Palacios-Huerta [54], Korn [35]) und neuerdings auch die Suche nach einer optimalen Strategie zur Ausübung von Swing-Optionen (Barrera-Esteve et al. [3], Lari-Lavassani, Simchi und Ware [39] oder Wegner, Dorr und Werner [63]) von Interesse. Diese stochastisch-ökonomischen Kontrollprobleme weisen gegenüber anderen Anwendungen einige Besonderheiten auf. Einerseits ist das die nicht offensichtliche Beschränktheit und Konkavität des Zielfunktional und andererseits die direkte Abhängigkeit desselben von der Kontrolle und nur mittelbar von dem durch die Kontrolle gesteuerten Prozess. Dieser Prozess bestimmt dagegen die Zulässigkeit der Kontrolle und geht somit indirekt in das Zielfunktional ein. So wird üblicherweise bei einer Konsum-/Sparentscheidung Nutzen nicht aus dem zu einem Zeitpunkt zur Verfügung stehenden Vermögen gezogen, sondern entsteht aus Konsum. Die vorhandenen Ressourcen bestimmen aber die Grenzen, in denen eine Entscheidung über Konsum und Sparen getroffen werden kann.

Die Wahl optimaler Portfolios bietet dabei einen grundlegenden, plausiblen und motivierenden Zugang zu den ökonomischen Kontrollproblemen. Den Rahmen bildet ein vollständiges Marktmodell mit als geometrische BROWNSche Bewegungen getriebenen Aktienprozessen, einer festverzinslichen Anlagemöglichkeit und einem Konsumgut, wie es in Kwok [37], Glasserman [19] sowie Karatzas und Shreve [33]

beschrieben wird. Das stochastische System wird von den Aktien und der festverzinslichen Anleihe gebildet und von den Marktparametern Zins, Driften und Volatilitäten genau beschrieben. Das Vermögen, das ein Agent in diesem Marktmodell besitzt, kann ausschließlich gespart oder für Konsum ausgegeben werden. Neben der Bestimmung der Konsumhöhe ist eine Entscheidung über die Zusammensetzung der Investition zu treffen, die sich stochastisch entwickelt. Eine solche Strategie ist zulässig, wenn sie nicht zum Bankrott führt. Das Ziel ist es nun, eine optimale Abwägung zwischen Konsum und Sparen zu finden, die maximalen Nutzen bringt und gleichzeitig genug Vermögen für zukünftigen Konsum übrig lässt. Dieses ist entsprechend der Risikoeinstellung des Agenten am Markt anzulegen.

Lösungsansätze

Üblicherweise wird ein zeitdiskreter Ansatz für das Zielfunktional gewählt, das sich als Summe einperiodischer Nutzensausschüttungen über äquidistante Zeitpunkte im relevanten Zeitraum schreibt. Bedingt durch die periodenhafte Betrachtung der Entwicklungsdynamik des stochastischen Prozesses muss bei diesem Vorgehen allerdings der Erwartungswert dieses dynamischen Prozesses für den jeweils folgenden Zeitpunkt berechnet werden. Das erfolgt durch ein Dichteintegral, und diese Kopplung der Zustände über die Zeit führt auf ein System nichtlinearer EULER-Gleichungen. Eine Diskretisierung der Strategie erfolgt dann mit Projektions- und Kollokationsmethoden.

Ein dagegen von vornherein kontinuierlich formulierter Ansatz beschreibt die Entwicklung des Prozesses mit einer stochastischen Differentialgleichung. Die Betrachtung der instantanen Veränderung des Systems und damit der unmittelbaren Richtung, die es einschlägt, erübrigt die Erwartungswertbestimmung und deren numerische Quadratur. Eine ganzheitliche Betrachtung der Optimierung des Zielfunktional ermöglicht dann die Definition einer Wertfunktion, die den maximal erreichbaren Funktionalwert angibt. Die Wertfunktion enthält dann für jeden Zustand des stochastischen Systems den maximalen Nutzen, den man unter Einsatz einer optimalen Strategie aus diesem Zustand ziehen kann. Verfolgt man das Konzept der stochastischen Differentialgleichung weiter, so stellt sich diese Wertfunktion als von der Zeit und eben dem stochastischen Prozess abhängig heraus. Über das Lemma von ITÔ, die DYNKIN-Formel und den Weg der dynamischen Programmierung erhält man sie als Lösung einer nichtlinearen parabolischen Reaktions-Konvektions-Diffusions-Gleichung vom HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-Typ (HJB-Gleichung), deren klassische Lösung für die prominentesten Anwendungen eindeutig gesichert ist. Somit sind die bewährten numerischen Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen anwendbar.

Eine wichtige Rolle bei der Behandlung ökonomischer Probleme spielt die Nutzenfunktion als Darstellung der Präferenzordnung und der Risikoaversion, die in einem Modell angenommen werden. Je nach Anwendung werden in der Literatur

unterschiedliche Nutzenfunktionen verwendet, so dass eine Formulierung und numerische Behandlung der Problemstellung unabhängig von der konkreten Form der Nutzenfunktion erstrebenswert ist. Darin liegt eine weitere Stärke des kontinuierlichen Ansatzes. Die Lösungstechniken für die diskrete Formulierung stellen Bedingungen erster Ordnung und EULER-Gleichungen auf, die Ableitungen der Nutzenfunktionen und deren Umkehrungen enthalten. Somit ist bereits die Aufgabenstellung stark nutzenstrukturabhängig und für jede Nutzenfunktion neu zu bestimmen. Dies steht einer allgemeinen Behandlung im Weg. In der HJB-Gleichung spielen Nutzenfunktionen die Rolle der Anfangsbedingung und bestimmen damit die Struktur der Lösung. Da sie zusätzlich in das Zielfunktional eingehen, wird die Struktur auch im weiteren zeitlichen Verlauf aufrecht erhalten.

Viele Arbeiten beschäftigen sich mit einem unendlichen Zeithorizont, der die HJB-Gleichung zu einer nicht mehr zeitabhängigen, elliptischen Form vereinfacht. Dagegen bietet die allgemeinere Betrachtung eines endlichen Zeitraums und somit die parabolische Form der HJB-Gleichung hohe Flexibilität bezüglich der Problemstellung und kann einfach auf die stationäre Formulierung, also den unendlichen Zeithorizont, übertragen werden. Auch gegenüber der dynamischen Entwicklung des stochastischen Prozesses erfolgt nur die Einschränkung, dass er sich als stochastische Differentialgleichung mit einem WIENER-Prozess schreiben lässt, so dass ITÔs Lemma und die Techniken der dynamischen Programmierung angewendet werden können. Somit wird eine sehr allgemein formulierte Klasse stochastischer Kontrollprobleme numerischen Methoden zugänglich gemacht.

Fleming und Soner [15] und ähnlich auch Munk [48] diskretisieren die HJB-Gleichung für die Wertfunktion auf anisotropen Gittern mit finiten Differenzen. Durch Degenerierung der Koeffizienten der Gleichung verursachte Instabilitäten berücksichtigen sie durch einseitige Downwind-Differenzensterne. Explizite und implizite EULER-Verfahren werden zur Zeitdiskretisierung eingesetzt. Kontraktive Nachiterationen im Wert- und im Strategieraum (Fleming und Soner [15]) werden dann verwendet, um die qualitative Formerhaltung der Lösung (Judd [30]) zu sichern. Munk [48] nutzt die bei der Diskretisierung entstandenen Koeffizienten als Übergangswahrscheinlichkeiten in einer konsistenten MARKOV-Kette, die eine analoge, normierte Möglichkeit zur Approximation der Wertfunktion darstellt.

Eigene Beiträge

Da die zu Grunde liegende Fragestellung bei zeitdiskretem und zeitkontinuierlichem Ansatz ähnlich ist, liegt es nahe, die Modellierung zu vereinheitlichen und sich auf die Lösung eines allgemeinen Ansatzes zu konzentrieren. Diese Arbeit stellt den diskreten und den kontinuierlichen Ansatz vor und bettet den diskreten ohne Einschränkung in den kontinuierlichen ein. Damit ist gezeigt, dass die Lösung der allgemeinen Formulierung in stetiger Zeit die Lösung der üblichen diskreten Modellform als Spezialfall enthält.

Das Problem der optimalen Konsum-/Sparentscheidung in einer isolierten Ökonomie ist in der Form der optimalen Portfoliowahl in einer Dimension bekannt. Obwohl hierbei jeder einzelne Handelsplatz bereits durch vielfache Aktienprozesse eine mehrdimensionale Umgebung beschreibt, sind Vermögens- und Konsumprozess weiterhin nur einmal in jeder Ökonomie vorhanden und die HJB-Gleichung, wie in Mertons fundamentalem Beispiel für bestimmte CRRA-Nutzenfunktionen [45], eindimensional im Ort. Internationale Handelsbeziehungen erfordern aber nun eine mehrdimensionale Erweiterung dieser homogenisierten Betrachtung. Auf vielen verschiedenen, internationalen Märkten agierende Unternehmen und Organisationen ebenso wie durch Staatenbünde und -verträge geschaffene Verwaltungseinheiten müssen unterschiedlich ausgeprägte, aber ähnlich strukturierte, gar korrelierte Ökonomien in ihr Handeln einbeziehen, ohne durch beliebigen Transfer ihre Betrachtung auf einen Heimatmarkt reduzieren zu können. Ein mehrdimensionales, zeitkontinuierliches Marktmodell mit Transferbeschränkungen ist notwendig, das in dieser Arbeit entwickelt wird. Dabei wird es im Rahmen der stochastischen Kontrolltheorie als HJB-Gleichung so generell formuliert, dass auch nicht von der Fragestellung nach optimalen Portfolios herrührende Probleme, wie die der ökonomieübergreifenden Wohlfahrtsanalyse in Winschel [64], behandelt werden können. Diese allgemeine Betrachtungsweise bietet sich an, da in den zur Wohlfahrtsanalyse genutzten Gleichgewichtsmodellen logarithmisch-normalverteilte Produktionsniveaus angenommen werden, die gerade den Aktienkursen in Form geometrischer BROWNScher Bewegungen bei der Wahl optimaler Portfolios entsprechen.

Die HJB-Differentialgleichung wird allgemein und speziell für exponentielle Diskontierung aufgestellt. Stochastische Simulationsverfahren sowie deterministische Lösungsansätze werden vorgestellt und ihre Vor- und Nachteile diskutiert. Neben der Aufstellung eines monotonen Downwind-Schemas in beliebiger Dimension für die HAMILTONSche Funktion wird ein θ -Zeitschrittverfahren angewendet (Grossmann und Roos [21]), das explizite und implizite EULER-Verfahren integriert und mit $\theta = \frac{1}{2}$ als CRANK-NICOLSON-Verfahren zur zusätzlichen Stabilisierung beiträgt.

Mehrdimensional formulierte Probleme erfordern aber ebenso eine Diskretisierung anhand mehrdimensionaler Gitter. Um eine gegebene Genauigkeit in der Berechnung zu erreichen, ist eine gewisse Mindestauflösung des Gitters in jeder Dimension notwendig, und selbst anisotrope Gitter enthalten schon bald eine nicht mehr handhabbare Menge von Punkten. Um die Komplexität zu verringern, werden dünne Gitter eingesetzt, die Bungartz [6] beschreibt. Eine Lösung des gestellten Problems wird durch eine SMOLYAK-Kombination anisotroper Gitter mit moderaten Levels erzeugt, wie sie Griebel, Schneider und Zenger [20], Bungartz et al. [7] und Garcke [16] vorstellen. Die Genauigkeit des Verfahrens wird durch die Kombinationstechnik nur geringfügig beeinträchtigt, während die Anzahl der Punkte im Gitter sowie die benötigte Rechenzeit erheblich sinken.

Die Beiträge dieser Arbeit lassen sich in den folgenden kurzen Stichpunkten zu-

sammenfassen:

- allgemeine Modellierung einer mehrdimensionalen Marktstruktur mit Transfer im Rahmen optimaler Portfolios,
- Einbettung des üblichen diskreten Ansatzes in den allgemeineren kontinuierlichen Ansatz, so dass die Problemstellung den numerischen Methoden für partielle Differentialgleichungen zugänglich wird,
- Implementierung einer HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-Diskretisierung auf anisotropen Gittern in beliebigen Dimensionen für beliebige Nutzenfunktionen und allgemeine stochastische Differentialgleichungen,
- Dünngitterdiskretisierung der HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-Gleichung in 2 Dimensionen mit der Kombinationstechnik,
- Analyse der Konvergenzeigenschaften des Verfahrens anhand einer Sensitivitätsanalyse,
- Modellrechnungen für Anwendungsprobleme mit CARA-Nutzenfunktionen und CRRA-Nutzenfunktionen in 2 Dimensionen.

Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in sechs Kapitel, die kurz einzeln vorgestellt werden sollen.

Kapitel 2 schildert das aus ökonomischen Anwendungen erwachsende stochastische Kontrollproblem in diskreter und kontinuierlicher Formulierung. Anschließend zeigt es eine Einbettung des diskreten in den kontinuierlichen Ansatz auf.

Kapitel 3 beschreibt numerische Lösungsansätze für das kontinuierlich formulierte Problem. Eine Monte-Carlo-Simulation wird veranschaulicht und die HJB-Differentialgleichung allgemein und mit Diskontierung aufgestellt. Eine Downwind-Diskretisierung wird für anisotrope Gitter in beliebigen Dimensionen durchgeführt, ein CRANK-NICOLSON-Zeitschrittverfahren präsentiert und ein Nachiterationsalgorithmus erläutert. Die Kombinationstechnik für dünne Gitter wird dargestellt.

Kapitel 4 leitet ein mehrdimensionales Marktmodell mit Transfermöglichkeiten im Rahmen der Aufgabenstellung optimaler Portfolios her und diskretisiert dieses. Im eindimensionalen Fall wird die Aufstellung einer analytischen Lösung für CRRA-Nutzenfunktionen nachvollzogen. Außerdem wird auf die Formerhaltung des verwendeten Verfahrens eingegangen.

Kapitel 5 stellt Ergebnisse aus numerischen Experimenten vor. Es werden Vergleiche mit der analytischen Lösung vorgenommen, eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, sowie Resultate für CARA-Nutzenfunktionen und für zweidimensionale Modelle präsentiert.

Kapitel 6 fasst die Ergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen der Resultate der vorliegenden Arbeit.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt allen Personen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere danke ich Prof. Dr. Michael Griebel für die Überlassung des Themas und die gute Betreuung. Bei Dr. Thomas Gerstner bedanke ich mich für Anregungen und Unterstützung. Ich danke Prof. Dr. Rolf Krause für die Übernahme des Zweitgutachtens. Des Weiteren sei Melanie Reiferscheid und Claudia Braun für das Korrekturlesen sowie Thomas Mertens für hilfreiche Kommentare gedankt.

Kapitel 2

Das stochastische Kontrollproblem

Wir stellen in diesem Kapitel das allgemeine, stochastische Kontrollproblem mit seinen Voraussetzungen und Annahmen in zwei Formulierungen vor. Beide Formulierungen sind üblich und Gegenstand aktueller Forschung, führen aber zu unterschiedlichen numerischen Verfahren in ihrer Behandlung. Am Ende dieses Kapitels stellen wir heraus, dass es sich bei der ersten Formulierung lediglich um eine von vornherein zeitdiskrete Version der zweiten, kontinuierlichen Formulierung handelt und daher eine Betrachtung dieser zweiten Version vollkommen ausreicht. Sie gewährt dem Anwender eine größere Flexibilität bezüglich einer selbst gewählten Diskretisierung und ermöglicht in erster Linie die Anwendung des Lemmas von ITÔ (siehe Lemma 3.1) und die Aufstellung einer nichtlinearen parabolischen Reaktions-Konvektions-Diffusions-Differentialgleichung, die ohne Erwartungswertberechnung und damit ohne numerische Quadratur auskommt. Die Nichtlinearität in Form eines Maximierungsproblems ist in beiden Fällen zu behandeln.

Zunächst werden einige grundlegende und beiden Formulierungen gemeinsame Konzepte eingeführt. In Abschnitt 2.1 wird dann die diskrete Version der Problembeschreibung vorgestellt, die in den Arbeiten von Judd [28, 29], Kübler und Schmedders [31, 32] und Winschel [64] behandelt wird. Abschnitt 2.2 beschreibt die kontinuierliche Version, wie sie sich in Munk [48, Abschnitt 2] oder in Munos [52] findet. In Abschnitt 2.3 wird die Einbettung der diskreten in die kontinuierliche Formulierung genauer erläutert.

Zu den Grundlagen eines jeden ökonomischen oder finanzmathematischen Modells zählt die Diskontierung. Sie stellt allgemein eine Art umgekehrter „Verzinsung“ dar, und aus finanzmathematischer Sicht entspricht sie exakt der marktüblichen Verzinsung. Aus ökonomischer Sicht muss sie sich aber nicht auf Geld beschränken.

Definition 2.1 (Diskontfunktion). Eine *Diskontfunktion* $\beta : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ beschreibt den heutigen Wert einer zukünftigen Leistung \mathbf{x} mit Zeithorizont t .

Wir beschränken uns hier auf Diskontfunktionen, die zusätzliche Bedingungen erfüllen. Gefordert wird keine Diskontierung für instantane Leistungen $\beta(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ und die Irrelevanz zwischenzeitlicher Diskontierung $\beta(t, \beta(t^* - t, \mathbf{x})) = \beta(t^*, \mathbf{x})$ für $t^* > t$ sowie Linearität in \mathbf{x} . Die letztere, also die räumliche Forderung führt uns

direkt auf die *multiplikative* Form

$$\beta(t, \mathbf{x}) = \beta(t)\mathbf{x}$$

mit $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ und $\beta(0) = \text{Id}$. Die vorangehenden beiden zeitlichen Forderungen führen zu der Identität $\beta(t_1)\beta(t_2) = \beta(t_1 + t_2)$ und daher auf die *exponentielle* Form

$$\beta(t, \mathbf{x}) = (e^{-r_n t} x_n)_n = \text{diag}(e^{-r_n t})\mathbf{x}.$$

Dies steht im Kontext der Diskontierung von Geldmengen in Einklang mit Lemma 4.4, wenn $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{N-1})$ die entsprechenden Zinsen bezeichnet. Die Rolle von \mathbf{r} wird in anderen Zusammenhängen von einer allgemeineren Konstanten $\beta \in (0, 1)^N$ übernommen, dem so genannten *Diskontfaktor*.

Einige Autoren untersuchen Diskontfunktionen, die den oben genannten Anforderungen nicht mehr exakt entsprechen. Harris und Laibson [24] betrachten hyperbolische Diskontierung, die durch einen Sprung im Diskontfaktor bedingt ist. In diesen Fällen kann die hier vorgestellte Theorie nicht mehr einwandfrei angewendet werden.

Ein weiteres zentrales Element der ökonomischen Modellierung stochastischer Kontrollprobleme bilden die so genannten einperiodischen Nutzenfunktionen, die die Struktur der Konsumpräferenzen eines Individuums in Zahlen ausdrücken. Diese Nutzenfunktionen können sehr individuelle Formen annehmen, abhängig von den persönlichen Vorlieben eines Konsumenten („Die Schokolade von . . . ist einfach genial!“), von der Verfügbarkeit bestimmter Konsumgüter („Was nützt einem alles Geld der Welt, wenn man davon nur Gabeln und Suppe kaufen kann, aber keine Löffel verfügbar sind?“) oder abhängig von der bereits konsumierten Menge („Schon wieder Kaviar?!“). Allen Nutzenfunktionen gemeinsam sollten jedoch die folgenden Eigenschaften sein, wie sie sich bei Mas-Colell, Whinston und Green [44] oder Riedel [58] nachlesen lassen.

Definition 2.2 (Nutzenfunktion). Eine *Nutzenfunktion* $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ ist stetig, strikt monoton in jedem Argument, strikt konkav und erfüllt das *erste GOSSENSche Gesetz* (auch *Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen*)

$$\lim_{c_n \nearrow \infty} \frac{\partial}{\partial c_n} u(\mathbf{c}) = 0$$

sowie die *INADA-Bedingung*

$$\lim_{c_n \searrow 0} \frac{\partial}{\partial c_n} u(\mathbf{c}) = \infty.$$

Nutzenfunktionen beschreiben lediglich die Struktur persönlicher Präferenzen, ihre absolute Größe ist weniger von Belang. Daher sollten sie auch bloß bis auf eine affine lineare Transformation eindeutig sein. Eine solch eingegrenzte Nutzenstruktur wird *VON-NEUMANN-MORGENSTERN-Nutzenfunktion* genannt.

Die Konkavität der Nutzenfunktion eines Nutznießers bestimmt seine Abneigung gegenüber Risiko. Dies wird deutlich, wenn die übliche Definition von Konkavität abweichend als Erwartungswert interpretiert wird. Eine strikt konkave Funktion u erfüllt für alle $\delta \in [0, 1]$ und zwei beliebige c_1, c_2 die Ungleichung

$$u(\delta c_1 + (1 - \delta)c_2) > \delta u(c_1) + (1 - \delta)u(c_2). \quad (2.1)$$

Betrachtet man δ nun als die Wahrscheinlichkeit, bei einer fiktiven Lotterie den Konsumbetrag c_1 zugeteilt zu bekommen, und entsprechend $(1 - \delta)$ als die Gegenwahrscheinlichkeit, c_2 zu erhalten, so besagt obige Ungleichung (2.1), dass der Nutzen aus dem erwarteten Gewinnbetrag größer ist als der erwartete Nutzen aus den beiden einzelnen Gewinnen. Der Nutznießer zieht also die Auszahlung eines Mittelbetrags dem Risiko, nur einen von beiden Beträgen zu erhalten, deutlich vor. Diese Interpretation der Konkavität ist unter dem Begriff der *Risikoaversion* bekannt. Sie ist unter anderem mit den nach Kenneth Arrow und John W. Pratt benannten Risikoaversionsmaßen messbar. Zwei Formen des Maßes sind üblich: Das ARROW-PRATT-Maß der *absoluten* Risikoaversion

$$ARA(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

und das ARROW-PRATT-Maß der *relativen* Risikoaversion

$$RRA(c) = c ARA(c) = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}.$$

Beide Maße implizieren, dass der Nutznießer risikoavers ist, also dem Risiko abgeneigt, wenn sie positiv ausfallen. Da sowohl einzelne Menschen als auch Institutionen oder Staaten in Fallstudien das Risiko scheuen, gehen wir im weiteren Verlauf der Arbeit von positiven Risikoaversionsmaßen – und daher konkaven Nutzenfunktionen – aus.

Oft betrachtete Nutzenfunktionen sind solche mit einem konstanten Risikoaversionsmaß. Dafür kommen beide Messverfahren in Frage, so dass zwischen CRRA- (*constant relative risk aversion*), CARA- (*constant absolute risk aversion*) oder HARA-Funktionen (*hyperbolic absolute risk aversion*) unterschieden wird. Zu den CRRA-Funktionen zählt

$$u(t, c) := e^{-\beta t} \frac{c^\eta}{\eta}$$

mit einem ARROW-PRATT-Maß der *relativen* Risikoaversion $1 - \eta$. Sie wird zur analytischen Lösung des Kontrollproblems eingesetzt und taucht daher in unserer eindimensionalen Anwendung auf. Der Risikoaversionsparameter η sollte zwischen 0 und 1 gewählt werden, um sowohl empirisch als auch mathematisch sinnvoll zu sein. Den CARA-Funktionen zugeordnet ist

$$u(t, c) := e^{-\beta t} (1 - e^{-(1-\eta)c}),$$

auch mit ARROW-PRATT-Maß $1 - \eta$, diesmal allerdings der *absoluten* Risikoaversion. Diese Funktion verletzt zwar die INADA-Bedingung, bietet aber numerisch bessere Handhabbarkeit, da sie NEUMANN-Randbedingungen von $1 - \eta < \infty$ vorschreibbar macht. Da es sich um ein absolutes Maß handelt, braucht es nicht mehr durch 1 beschränkt zu werden, so dass auch $\eta < 0$ zugelassen ist.

Wir fordern in diesem Zusammenhang für jede mehrdimensionale Nutzenfunktion

$$|u(t, \mathbf{c})| \leq C(1 + \|\mathbf{c}\|^k)$$

mit geeigneten Konstanten C, k , beziehungsweise im Fall einer weiteren Ortsabhängigkeit

$$|u(t, \mathbf{x}, \mathbf{c})| \leq C(1 + \|\mathbf{x}\|^k + \|\mathbf{c}\|^k).$$

Die mehrdimensionale Version lautet jeweils

$$u(t, \mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{N-1} u(t, c_k).$$

Ein stochastisches Kontrollproblem enthält schon dem Namen nach eine Kontrolle, die zu finden eine der Aufgaben beim Lösen des Problems darstellt. Diese Kontrolle ist der einzig beeinflussbare Faktor seitens des vor ein Optimierungsproblem gestellten Agenten. Ihre Festlegung setzt einen Mechanismus in Gang, der zu einem Optimum führt oder eben nicht. Kommt eine *optimale Kontrolle* zum Einsatz, wird ein Optimum erreicht; umgekehrt kann ein Optimum nur von einer optimalen Kontrolle erlangt werden. Der Weg zum Glück ist allerdings nicht immer eindeutig, es kann mehrere optimale Kontrollen geben.

Eine Kontrolle ist dabei analog zu einer Strategie in der Spieltheorie eine Lenkungsmöglichkeit für das von ihr gesteuerte System. Sie ist eine Abbildung, die jeder möglichen, erreichbaren Situation eine Handlungsweise vorschreibt, die wiederum Einfluss auf die Entwicklung des Systems nimmt. So stellt eine Kontrolle gewissermaßen einen Regelkatalog auf, der zu jedem, auch noch so unwahrscheinlichen Satz von Zustandsvariablen angibt, was zu tun ist. Es spielt keine Rolle, ob ein solcher möglicherweise endogener und daher lenkbarer Zustand bei Anwendung dieser Kontrolle gar nicht erreicht werden kann. Die Kontrolle ist daher sehr umfassend. Nehmen wir einmal an, ein Zustand sei durch Zeit t und Ort \mathbf{x} vollständig beschrieben und t sei durch ein (eventuell diskretes) Intervall I und \mathbf{x} durch ein Gebiet Ω exogen beschränkt. Dann folgt eine Kontrolle \mathbf{a} der folgenden Definition.

Definition 2.3 (Kontrolle/Strategie). Eine *Kontrolle* $\mathbf{a} : I \times \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ legt für jeden Zeitpunkt t und jeden Ort \mathbf{x} eine Handlung aus der Menge der in diesem Zustand zulässigen Handlungen $\mathcal{A}(t, \mathbf{x})$ fest.

Eine ortsabhängige Kontrolle heißt *Kontrolle in Feedback-Form*. Sie reagiert auf die von ihr geschaffenen Zustände, z.B. in Form von $\mathbf{a}(t, \mathbf{x}_a(t))$, wenn sie den Parameter \mathbf{x} steuert. Eine speziellere, ortsunabhängige Kontrolle achtet nicht auf den Zustand des Systems, da sie ohnehin jeweils dieselbe Handlung vorgeben würde. Solch spezielle Kontrollen sind in stochastischen Umgebungen kaum zu erwarten, da sie implizit die Allgemeinheit einbüßen, für Zustände Vorgaben zu machen, die ohnehin nicht erreicht werden. Sie haben gewissermaßen intrinsisch Information über die von ihnen vorgegebene Entwicklung des Systems gespeichert und brauchen daher nicht mehr „nachzuschauen“, ob dieser Zustand auch tatsächlich eingetreten ist. In stochastischen Situationen kann sich dagegen niemand sicher sein.

2.1 Diskrete Version des Kontrollproblems

Wir betrachten nun die bereits 1978 von Robert E. Lucas jr. in [41] eingeführte Formulierung des später nach ihm benannten Lucas Asset Pricing Modells. Wir bezeichnen sie auch als die *klassische* Formulierung. Sie wird von Judd [28, Kapitel 5] eingesetzt und besteht aus dem hier etwas verallgemeinerten Funktional

$$J(n, \mathbf{x}; a) := \mathbb{E} \left[\sum_{i=n}^{n_{\max}} \beta(i - n, u_1(i, \mathbf{X}_i, a(i, \mathbf{X}_i))) + \beta(n_{\max} - n, u_2(\mathbf{X}_{n_{\max}})) \mid \mathbf{X}_n = \mathbf{x} \right] \quad (2.2)$$

sowie einer Dynamik

$$\mathbf{X}_{i+1} = F(\mathbf{X}_i, a(i, \mathbf{X}_i)) \quad i = 0, \dots, n_{\max} - 1. \quad (2.3)$$

Dabei ist $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Diskontfunktion und $u_1(i, \cdot, \cdot)$, u_2 sind Nutzenfunktionen. Die Dynamik beschreibt eine intertemporäre, stochastische Bewegung der Variablen \mathbf{X} von Periode zu Periode und ist damit eine Zufallsvariable.

Die Aufgabe ist es nun, eine das Funktional maximierende und alle den momentanen Zustand des Systems beschreibenden Variablen berücksichtigende *Kontrolle* $a^* : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^D$ zu finden, d. h.

$$a^* \in \arg \max_{a \in \mathcal{A}} J(n, \mathbf{x}; a).$$

An a werden zusätzliche Anforderungen gestellt, die in \mathcal{A} formuliert sind. Dies ist meistens die Maßgabe, dass die Entwicklung von \mathbf{X} gewissen Restriktionen (z. B. $\mathbf{X} \geq 0$) unterliegt.

Wertfunktion und Bellman-Prinzip

Nehmen wir nun an, dass es sich bei der Dynamik tatsächlich um einen MARKOV-Prozess handelt, in \mathbf{X}_i also sämtliche Informationen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von \mathbf{X}_{i+1} bereits enthalten sind. Wir können dann eine *Wertfunktion* definieren, die den maximal erreichbaren Wert bei einem Startwert von \mathbf{x} zum Zeitpunkt n beschreibt,

$$\begin{aligned}
 v(n, \mathbf{x}) &:= \max_{a \in \mathcal{A}} J(n, \mathbf{x}; a) \\
 &= \max_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=n}^{n_{\max}} \beta(i-n, u_1(i, \mathbf{X}_i, a(i, \mathbf{X}_i))) \right. \\
 &\quad \left. + \beta(n_{\max} - n, u_2(\mathbf{X}_{n_{\max}})) \mid \mathbf{X}_n = \mathbf{x} \right] \\
 &= \max_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[u_1(n, \mathbf{X}_n, a(n, \mathbf{X}_n)) + \sum_{i=n+1}^{n_{\max}} \beta(i-n, u_1(i, \mathbf{X}_i, a(i, \mathbf{X}_i))) \right. \\
 &\quad \left. + \beta(n_{\max} - n, u_2(\mathbf{X}_{n_{\max}})) \mid \mathbf{X}_n = \mathbf{x} \right] \\
 &= \max_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[u_1(n, \mathbf{X}_n, a(n, \mathbf{X}_n)) + \sum_{i=n+1}^{n_{\max}} \beta(1, \beta(i-n+1, u_1(i, \mathbf{X}_i, a(i, \mathbf{X}_i)))) \right. \\
 &\quad \left. + \beta(1, \beta(n_{\max} - n + 1, u_2(\mathbf{X}_{n_{\max}}))) \mid \mathbf{X}_n = \mathbf{x} \right] \\
 &= \max_{a \in \mathcal{A}} \left(u_1(n, \mathbf{x}, a(n, \mathbf{x})) + \beta(1, \mathbb{E}[v(n+1, \mathbf{X}_{n+1}) \mid \mathbf{X}_n = \mathbf{x}]) \right). \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die im Anschluss an Definition 2.1 geforderten Eigenschaften der Diskontfunktion benutzt. Lucas nimmt diese als $\beta(i, \mathbf{y}) = \beta^i \mathbf{y}$ mit einem konstanten Diskontfaktor $\beta \in (0, 1)$ an und erfüllt damit natürlich diese Anforderung. Die Rückführung der Wertfunktion als Funktional mit Zeithorizont $n_{\max} - n$ auf sich selbst zu einem Horizont allein von 1 ist integraler Bestandteil des *dynamischen Programmierens*, geht auf Richard Bellman zurück und ist nach ihm als BELLMAN-Prinzip benannt.

Es gilt die Endbedingung

$$v(n_{\max}, \mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}).$$

Die Wertfunktion v ist offensichtlich ein Fixpunkt der obigen Gleichung und kann iterativ bestimmt werden. Diesen Ansatz verfolgt Lucas in seiner Arbeit.

Euler-Gleichung

Eine grundsätzlich andere Herangehensweise finden wir bei Judd [28, 30]. Dort wird die Bedingung 1. Ordnung für die Maximierung des Funktionals J aufgestellt und

so eine EULER-Gleichung hergeleitet.

Diese Methode ist allerdings eng verbunden mit einer bestimmten Form der Dynamik. Judd nimmt sie als

$$x_{i+1} = F_i(x_i, c_i) = \theta_i f(x_i) - c_i$$

mit einem stochastischen Parameter θ an. Wir fordern Differenzierbarkeit von F (und damit auch von f) sowie Umkehrbarkeit in c mittels einer Funktion $G(x, F(x, c)) = c$ und betrachten die Dynamik zum Zeitpunkt i , zu dem die Realisierung von F_i bekannt ist. Dann können wir

$$c_{i+1} = G(x_{i+2}, F_i(x_i, c_i))$$

schreiben, wobei es sich um eine weitere Zufallsvariable handelt. Der Wert x_{i+2} hängt von der Realisierung von F_{i+1} ab.

Da sich jeder Erwartungswert als Integral schreiben lässt, greift der Differenzierbarkeitssatz und wir dürfen die Differentiation innerhalb des Erwartungswerts durchführen. Die partielle Ableitung des Funktionals (2.2) nach c_i zum Zeitpunkt i erhält nur die beiden Summanden, die durch obige Schreibweise c_i beinhalten und ergibt

$$\begin{aligned} 0 = & \beta_x(t_i, u(c_i))u'(c_i) \\ & + \mathbb{E} \left[\beta_x(t_{i+1}, u(G(F_i(x_i, c_i), x_{i+2})))u'(G(F_i(x_i, c_i), x_{i+2})) \right. \\ & \left. G_x(F_i(x_i, c_i), x_{i+2})F_c(x_i, c_i) \mid x_{i+1} \right]. \end{aligned}$$

Wenn wir nun davon ausgehen, dass sowohl c_i als auch c_{i+1} mit derselben Regel abhängig von der Realisierung von F und vom Vermögen x gewählt werden, so können wir in dieser Gleichung x_{i+2} umschreiben und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = & \beta_x(t_i, u(c(x_i, F_i)))u'(c(x_i, F_i)) \\ & + \mathbb{E} \left[\beta_x(t_{i+1}, u(G(F_i(x_i, c(x_i, F_i)), F_{i+1}(x_{i+1}, c(x_{i+1}, F_{i+1})))) \right. \\ & \quad u'(G(F_i(x_i, c(x_i, F_i)), F_{i+1}(x_{i+1}, c(x_{i+1}, F_{i+1})))) \\ & \left. G_x(F_i(x_i, c(x_i, F_i)), F_{i+1}(x_{i+1}, c(x_{i+1}, F_{i+1})))F_c(x_i, c(x_i, F_i)) \mid x_{i+1} \right]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss nun nach der Funktion $c(x, F)$ gelöst werden, wobei einige numerische Methoden wie Projektions- oder Kollokationsverfahren (siehe Judd [30]) zum Einsatz kommen. Meist wird das Funktional (2.2) mit $n_{\max} = \infty$ betrachtet, so dass $u_2 = 0$ ist. Dann wird (siehe Baxter, Crucini und Rouwenhorst [5]) zur Approximation $n_{\max} < \infty$ und die Endbedingung $c(x_{n_{\max}-1}, F_{n_{\max}-1}) = 0$ benutzt. Durch Erhöhung von n_{\max} wird dann Konvergenz erreicht.

Eine nicht unbeträchtliche Hürde beim Einsatz dieser EULER-Gleichungs-Methode ist die Berechnung des Erwartungswerts $E[\cdot]$. Die erwartete Funktion ist nicht mehr von einfacher Struktur, und die Dynamik ist oft logarithmisch-normalverteilt, so dass der Erwartungswert als Integration gegen die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet werden muss. Da dies unter Umständen nicht analytisch möglich ist, müssen Quadraturverfahren eingesetzt werden, die eine zusätzliche Approximation darstellen und gelegentlich an ihre Grenzen stoßen (siehe Winschel [64]).

Besonders zu beachten an der hier vorgestellten Form der Dynamik ist auch, dass die Variable c_i erst zum Einsatz kommt, nachdem die Realisierung der Zufallsvariablen F stattgefunden hat. Das bedeutet, dass bei der Wahl von c_i zum Zeitpunkt i diese Information bereits berücksichtigt werden kann. Es bedeutet aber auch, dass die Dynamik bereits zum Zeitpunkt i durchgeführt wird und c_i als Reaktion darauf zum selben Zeitpunkt bestimmt wird. Das ist nicht sonderlich realistisch, da Dynamiken sich gewöhnlich zwischen den einzelnen Zeitpunkten entwickeln und c_i gewählt werden muss, ohne das Ergebnis der Dynamik zu kennen. Diese Tatsache wird bei unseren Modellen eine wichtige Rolle spielen (Aktien), so dass die Technik der EULER-Gleichung selbst bei entsprechender Zeitdiskretisierung für unsere Zwecke ausscheidet.

2.2 Kontinuierliche Version des Kontrollproblems

Wir stellen jetzt eine kontinuierliche Version des Kontrollproblems vor, wie sie z. B. in Munk [48] zu finden ist. Auch Kushner und Dupuis [36] betrachten diese Version. Sie lässt auf Grund des Fehlens diskreter Zeitpunkte keine Lösung mittels EULER-Gleichung zu, dafür öffnet sie anderen Methoden den Weg. Wir werden im Anschluss auch aufzeigen, dass die hier beschriebene Version des Kontrollproblems lediglich eine kontinuierliche Fassung des oben vorgestellten Problems ist und unsere Methoden auch das von Judd gestellte Problem erfassen. Wie in späteren Kapiteln deutlich wird, ist weder die Berechnung eines Erwartungswerts noch die Kenntnis der Ableitung der Nutzenfunktion oder der Umkehrung der Dynamik für diesen Ansatz notwendig. Vielmehr ermöglicht die Anwendung von ITÔs Lemma die Betrachtung einer *instantanen* Entwicklung und die Aufstellung einer deterministischen, partiellen Differentialgleichung für die Wertfunktion.

Um zuerst eine kontinuierliche Version einer Dynamik ähnlich (2.3) einführen zu können, brauchen wir ein sauberes Konzept eines *filtrierten Wahrscheinlichkeitsraums*. Wir verweisen auch auf die Bücher von Karatzas und Shreve [33], Fleming und Soner [14] sowie auf einführende Literatur von Bauer [4]. Es sei ein Wahrscheinlichkeitssystem $(\Omega, \mathcal{S}, P, \mathcal{F})$, bestehend aus einer Menge Ω samt σ -Algebra \mathcal{S} , einem Wahrscheinlichkeitsmaß P auf \mathcal{S} und einer nicht-abfallenden, rechtsstetigen Filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t) \mid t \in I\}$, gegeben. Diese Filtration erfülle $\mathcal{F}(T) = \mathcal{S}$, falls $T < \infty$, und

sei die kleinste von $(\mathcal{F}(t))_t$ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{S} = \bigvee_t \mathcal{F}(t)$ sonst. Des Weiteren sei $\mathbf{X}(t)$ ein an \mathcal{F} adaptierter, stochastischer Prozess und $\mathbf{a} : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^D$ eine progressiv messbare Kontrolle. Die Koeffizientenfunktionen $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $G : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^{N \times M}$ seien stetig, für feste dritte Argumente \mathbf{a} differenzierbar in ihren beiden ersten Argumenten und gehorchen den Beschränkungen

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f} \right\| + \|\nabla \mathbf{f}\| &\leq C \\ \left\| \frac{\partial}{\partial t} G \right\| + \|\nabla G\| &\leq C \\ \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})\| &\leq C(1 + \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{a}\|) \\ \|G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})\| &\leq C(1 + \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{a}\|) \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante C . Der Prozess \mathbf{X} folge der stochastischen Entwicklung

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))) dt + G(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))) d\mathbf{W}(t) \quad (2.5)$$

mit Startwert \mathbf{x} . Das Rauschen \mathbf{W} ist dabei ein weiterer, nicht beeinflussbarer, stochastischer Prozess, meist ein WIENER-Prozess nach Definition 4.1.

Sind $\mathcal{R}_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^D$ und $\mathcal{R}_{\mathbf{X}} \subset \mathbb{R}^N$ beschränkte, offene Mengen, so wird die Zulässigkeit der Kontrolle \mathbf{a} über

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, \mathbf{x}) := \{ \mathbf{a} : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^D \mid &\mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s)) \in \mathcal{R}_{\mathbf{a}}, \\ &\mathbf{X}(s) \in \mathcal{R}_{\mathbf{X}} \text{ für alle } s \in [t, T] \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

definiert.

Folgerung. An Formulierung (2.5) kann man bereits erkennen, dass der Rand von $\mathcal{R}_{\mathbf{X}}$ besondere Aufmerksamkeit erfordert. Trifft \mathbf{X} nämlich auf diesen Rand, so gebietet die obige Definition von \mathcal{A} , dass der weitere Verlauf für \mathbf{X} nicht stochastisch sein darf. Sobald Volatilität in (2.5) auftaucht, d. h. $G \neq 0$ ist, kann geradezu ausgeschlossen werden, dass $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathbf{X}}$ fast sicher bleibt. Für einen Punkt $(t, \mathbf{x}) \in \partial \mathcal{R}_{\mathbf{X}}$ führt die Bedingung (2.6) also sofort auf

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{x}) \in \{ \mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x}) \mid G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 \}.$$

Diese Folgerung wird bei den Diskretisierungen in Kapitel 3 die Festlegung auf Randwerte ermöglichen. Im ganz allgemeinen Fall können natürlich auch sehr unterschiedliche Definitionen von $\mathcal{A}(t, \mathbf{x})$ gewählt werden.

Dann führen wir das Funktional J ,

$$\begin{aligned} J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}) := \mathbb{E} \left[\int_t^T \beta(s-t, u_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s)))) ds \right. \\ \left. + \beta(T-t, u_2(\mathbf{X}(T), \mathbf{a}(T, \mathbf{X}(T)))) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

ein und definieren die zugehörige Wertfunktion über

$$v(t, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x})} J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}). \quad (2.8)$$

Unter den oben gemachten Voraussetzungen an \mathbf{f} , G und $u_{1/2}$ zeigen Karatzas und Shreve [33], dass die Wertfunktion v auf diese Weise wohldefiniert ist.

Bellman-Prinzip

Eine zu (2.4) analoge Berechnung erlaubt uns jetzt für $t^* \geq t$ die Aufstellung des kontinuierlichen BELLMAN-Prinzips, das uns den Zugang zu ITÔs Lemma und darüber zu einer partiellen Differentialgleichung zur Lösung des stochastischen Kontrollproblems ebnet. Wir führen den Wert von $v(t, \mathbf{x})$ auf eine kurzfristige Maximierung und den erwarteten Funktionswert zum Zeitpunkt t^* zurück,

$$v(t, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^{t^*} \beta(s - t, u_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s)))) ds + \beta(t^* - t, v(t^*, \mathbf{X}(t^*))) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right]. \quad (2.9)$$

Dieses BELLMAN-Prinzip bietet den entscheidenden Vorteil, nur noch eine kurzfristig optimale Strategie finden zu müssen; die Wahl der ab t^* optimalen Strategie ist in die Wertfunktion $v(t^*, \cdot)$ eingegangen. Auf diese Weise kann die Lösung des kontinuierlichen, stochastischen Kontrollproblems Stück für Stück rückwärts in der Zeit erfolgen, indem bereits gewonnene Ergebnisse für t^* in die Berechnung einfließen. Das Zustandsgebiet, für das eine Kontrolle bestimmt werden muss, wird erheblich eingeschränkt.

Mit diesen Werkzeugen sind wir nun bereit für verschiedene Lösungsansätze für das Problem (2.8), die im nächsten Kapitel vorgestellt werden. Wir möchten uns hier noch darauf konzentrieren, die diskrete Version des Kontrollproblems in unseren kontinuierlichen Rahmen einzubetten.

2.3 Einbettung der diskreten in die kontinuierliche Version

Das Funktional (2.2) wird sehr häufig mit $n_{\max} = \infty$ betrachtet. In diesem Fall verschwindet natürlich der zweite Term im Erwartungswert, da es kein Ende der Periode gibt. Durch diese Sichtweise wird aber eine wichtige Komponente vernachlässigt: Erhöhen wir in der hiesigen Formulierung n_{\max} , so braucht das nicht unweigerlich als Ausdehnung des zeitlichen Horizonts gewertet zu werden. Es kann sich genauso gut um eine höhere, dichtere Diskretisierung eines betrachteten Zeitintervalls $I := [0, T]$ handeln. Diese Möglichkeit besteht auch im Fall von $n_{\max} = \infty$, wird aber übersehen. Betrachten wir also das Intervall I als in Perioden entsprechend einer Partition

$0 = t_0 < \dots < t_{n_{\max}} < \dots$ mit zugehöriger Periodenlänge $h_i := t_{i+1} - t_i$ und Feinheit $h := \max_j h_j$ aufgeteilt und nehmen eine uniforme Periodenlänge von $h_j = 1$ für jedes j an, so können wir (2.2) und (2.3) als Diskretisierung von (2.7) und (2.5) auf dem Intervall I auffassen:

$$J(n, \mathbf{x}; a) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=n}^{n_{\max}} \beta(t_i - t_n, u_1(t_i, \mathbf{X}(t_i), a(t_i, \mathbf{X}(t_i)))) h_i \right. \\ \left. + \beta(t_{n_{\max}} - t_n, u_2(\mathbf{X}(t_{n_{\max}}))) \mid \mathbf{X}(t_n) = \mathbf{x} \right], \quad (2.10)$$

$$\mathbf{X}(t_{i+1}) = F(\mathbf{X}(t_i), a(t_i, \mathbf{X}(t_i))) \quad i = 0, \dots, n_{\max} - 1.$$

Verringern wir nun die Feinheit h der Diskretisierung, so erhöht sich automatisch n_{\max} (im Fall $n_{\max} = \infty$ passiert natürlich nichts), und wir erkennen im ersten Term von (2.10) eine RIEMANNsche Approximationssumme von (2.7).

Wir können also durchaus die kontinuierliche Version der Problemstellung weiterverfolgen, ohne an Allgemeinheit zu verlieren. Eine zeitliche Diskretisierung ist jederzeit möglich, darf aber im Vergleich zu (2.2) sehr viel umfassender und weitläufiger anwendbar ausfallen.

Kapitel 3

Lösungsansätze

Das im vorangegangenen Kapitel beschriebene, stochastische Kontrollproblem stellt im Unterschied zu seinem deterministischen Pendant den Analytiker vor sehr viel größere Probleme. So sind für deterministische Kontrollprobleme wie das Mondlandungsproblem (siehe Fleming, Rishel [13]) häufig analytische Lösungen bekannt; auch sind Kontrollprobleme mit quadratischem Funktional (siehe Burstedde [8] oder Dahmen, Kunoth [11]) und Nebenbedingungen in Form einer deterministischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung wie beim „Car-on-the-Hill“-Problem (siehe Munos [53]) gut verstanden, und es liegen vielfältige Lösungsmethoden vor. So kommen sowohl finite Differenzen in verschiedenen Formen als auch finite Elemente (z. B. adaptive Wavelets) zum Einsatz.

Das hier vorgestellte, stochastische Kontrollproblem bietet in seiner kontinuierlichen Version allerdings einige Hürden. Das Funktional (2.7) ist nicht offensichtlich konkav, so dass sich zuerst die Frage nach der Existenz des gesuchten globalen Maximums in (2.8) stellt. Nachdem wir diese positiv beantwortet haben, können wir uns auf die Suche nach analytischen Lösungen machen. Ein prominentes Beispiel ist in diesem Zusammenhang die von Merton [45] gefundene Lösung des eindimensionalen Problems der optimalen Portfoliowahl (auch unter dem Namen *Mertons Problem* bekannt, siehe Munk [49]), wobei er sich der dynamischen Programmierung und der in Abschnitt 3.4 vorgestellten HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-Differentialgleichung (auch kurz HJB-Gleichung) bediente. Dieses Beispiel behandeln wir im eindimensionalen Fall unserer numerischen Anwendungen. Analoge Lösungen für anders gewählte Nutzenfunktionen oder gar mehrdimensionale Probleme sind nicht bekannt.

Die numerische Behandlung des stochastischen Kontrollproblems ist daher unerlässlich, um brauchbare Wertfunktionen und Strategien selbst für Standardsituationen zu erhalten. Es bieten sich verschiedene numerische Verfahren zur Lösung des Problems an, die in den folgenden Abschnitten mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen einzeln vorgestellt werden. Alle Verfahren basieren auf dem BELLMAN-Prinzip (2.9), das die für die numerische Betrachtung wichtige Einteilung der zeitlichen Entwicklung in einzelne Zeitschritte ermöglicht, indem der Endpunkt der Entwicklung vom nächsten Zeitpunkt auf bereits ermittelte Berechnungen zurückgeführt

werden kann. So kann aus der Kenntnis der Wertfunktion zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ umfassende Kenntnis über die Wertfunktion zum Zeitpunkt t erlangt werden, ohne zusätzliche Information aus der Zukunft der zeitlichen Entwicklung über $t + \Delta t$ hinaus zu benötigen.

Grundsätzlich betrachten wir ein Zeit-Raum-Gitter, das das Definitionsgebiet der Wertfunktion, und damit auch der Kontrollen, abdeckt. Dieses Gitter hat eine feste Zeitschrittweite Δt , sinnvollerweise mit $\frac{T-t}{\Delta t} \in \mathbb{N}$, und feste Ortsschrittweiten in jeder Dimension $d\mathbf{x} = (dx_k)_k$. Wir fußen das zeitliche Gitter in t und können jeden weiteren Zeitpunkt als $t + i\Delta t$ schreiben, weshalb wir ihn auch einfach durch seinen Index i identifizieren können. Räumlich fußen wir das Gitter in $\mathbf{0} = (0)_k$ und erkennen jeden Gitterpunkt an seinem Multiindex $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^N$ per $\mathbf{x}_{\mathbf{j}} = (j_0 dx_0, \dots, j_{N-1} dx_{N-1})$. Auf diesen Gitterpunkten bekannte Funktionswerte kürzen wir gelegentlich auch mit dieser Indexierung ab, wenngleich die nächsten Abschnitte insofern allgemein gehalten sind, als vorgestellte Diskretisierungsverfahren für beliebige Punkte (t, \mathbf{x}) gelten und sich weder auf das Gebiet $[t, T] \times \Omega$ noch auf die Gitterpunkte darin beschränken.

3.1 Monte-Carlo-Methoden

Die intuitivste und realitätsnächste Methode ist auf Grund der stochastischen Struktur des Problems sicherlich eine Monte-Carlo-Simulation der vorgefundenen Situation. Dabei wird über oftmaliges Ziehen einer entsprechend verteilten Zufallszahl und entsprechender Umwandlung dieser in eine Bewegung des betrachteten, stochastischen Prozesses die Entwicklung desselben und die zugehörige Wertentwicklung für eine beliebig gewählte Strategie einfach simuliert. Der Erwartungswert wird dann aus einer Mittelung gewonnen. Da hierfür allerdings sehr viele Zufallszahlen gezogen werden müssen (die Konvergenzrate in Bezug auf die Anzahl von simulierten Realisationen beträgt gerade einmal $\frac{1}{2}$ und gestaltet sich außerdem recht sprunghaft), ist das Verfahren sehr aufwändig und benötigt enorme Rechenzeit. Insbesondere müssen bei dem hier betrachteten Problem sehr viel mehr Punkte simuliert werden als ohnehin schon im Diskretisierungsgitter vorhanden sind, weshalb sich eine Monte-Carlo-Simulation, eventuell beschleunigt durch Quasi-Zufallszahlen, nur in Fällen anbietet, in denen alternative Lösungsmechanismen scheitern.

Um stochastische Simulationen durchführen zu können, wählen wir eine Strategie \mathbf{a}_h als diskrete Funktion auf einem zu Grunde liegenden Zeit-Raum-Gitter zunächst fest und betrachten sie als $Dn_t n_{\mathbf{x}}$ -dimensionalen Parameter zu unserem Problem. Dabei sind also die Funktionswerte $(\mathbf{a}_{ij})_{i,j}$ an den Gitterpunkten $(t_i, \mathbf{x}_{\mathbf{j}})$ fest gewählt, für Nicht-Gitterpunkte wird in geeigneter Weise zwischen den umgebenden Gitterpunkten interpoliert. Damit ist die Funktion für jedes $(t, \mathbf{x}) \in [t, T] \times \Omega$ auswertbar vorhanden, \mathbf{a}_h kann aber über den endlich-dimensionalen Parameter $(\mathbf{a}_{ij})_{i,j}$ als Funktion auf dem gesamten Gebiet gesteuert werden. Das Subskript h deutet hier

die Diskretisierung an. Damit ist im Sinne von Definition 2.3 für jeden Punkt (t, \mathbf{x}) eine Handlungsweise $\mathbf{a}_h(t, \mathbf{x})$ festgelegt. Mit dieser Strategie wird nun mehrfach eine Simulation des stochastischen Prozesses \mathbf{X} durchgeführt, der Wert des so erhaltenen Pfades bestimmt und der Erwartungswert in Form des Mittelwerts berechnet. So kann der Wert einer Strategie und damit des Funktionals (2.7) ermittelt werden. Passen wir nun $(\mathbf{a}_{ij})_{i,j}$ geschickt an, so erhalten wir aus diesem Vorgehen eine Maximierungsroutine, die als Funktionsauswertung jeweils eine solche Simulationssequenz inklusive Erwartungswertberechnung enthält.

Um diese Vorgehensweise genauer zu erläutern, betrachten wir das ursprünglich gestellte Problem (2.5)–(2.8). Nehmen wir an, $v(t + \Delta t, \mathbf{x})$ und damit auch $\mathbf{a}_h|_{[t + \Delta t, T]}$ seien bereits für alle \mathbf{x} auswertbar vorhanden. Dann können wir von \mathbf{a}_h allein den Bereich $\mathbf{a}_h|_{[t, t + \Delta t]}$ bestimmen und meinen im Folgenden mit der Bezeichnung \mathbf{a}_h auch diesen Teil der Strategie. Wir lösen rückwärts in der Zeit, wofür sich mit $\Delta t > 0$ klein genug eine halbdiskretisierte Version des BELLMAN-Prinzips (2.9) anbietet,

$$J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}_h) = \mathbb{E} \left[\int_t^{t + \Delta t} \beta(s - t) u_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}_h(s, \mathbf{X}(s))) ds + \beta(\Delta t) v(t + \Delta t, \mathbf{X}(t + \Delta t)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right], \quad (3.1)$$

$$v(t, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{a}_h \in \mathcal{A}_h} J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}_h). \quad (3.2)$$

Nun konzentrieren wir uns auf die Simulation des stochastischen Prozesses \mathbf{X} mit Hilfe der Dynamik (2.5). Dazu benutzen wir eine EULER-Diskretisierung (siehe Hingham [26]) der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t^*) &= \mathbf{X}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}_h(t, \mathbf{X}(t)))(t^* - t) \\ &\quad + G(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}_h(t, \mathbf{X}(t))) \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{t^* - t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit $t^* - t > 0$ und einer $N(\mathbf{0}, \text{Id})$ -verteilten Zufallsvariablen $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Auf diese Weise sind n Simulationswerte $\mathbf{X}(t_i)$ für eine geeignet gewählte Partition des Intervalls $[t, t + \Delta t]$ berechenbar, so dass wir das Integral in Gleichung (3.1) mit einer Quadraturformel auswerten können, welche Auswertungen des Integranden zu genau diesen Zeitpunkten $\beta(t_i - t) u_1(t_i, \mathbf{X}(t_i), \mathbf{a}_h(t_i, \mathbf{X}(t_i)))$, $i = 0, \dots, n$ benutzt. Das auf diese Weise ermittelte Ergebnis der Terme innerhalb der eckigen Klammer in (3.1) wird als eine Realisation für die Strategie \mathbf{a}_h betrachtet.

Wird diese stochastische Simulation mit derselben Strategie \mathbf{a}_h oft genug ausgeführt, so können wir nach dem Gesetz der großen Zahlen den Mittelwert der einzelnen Realisationen als Approximation des Erwartungswerts annehmen und diesen dann als Auswertung des vollständigen Funktionals (3.1) nutzen.

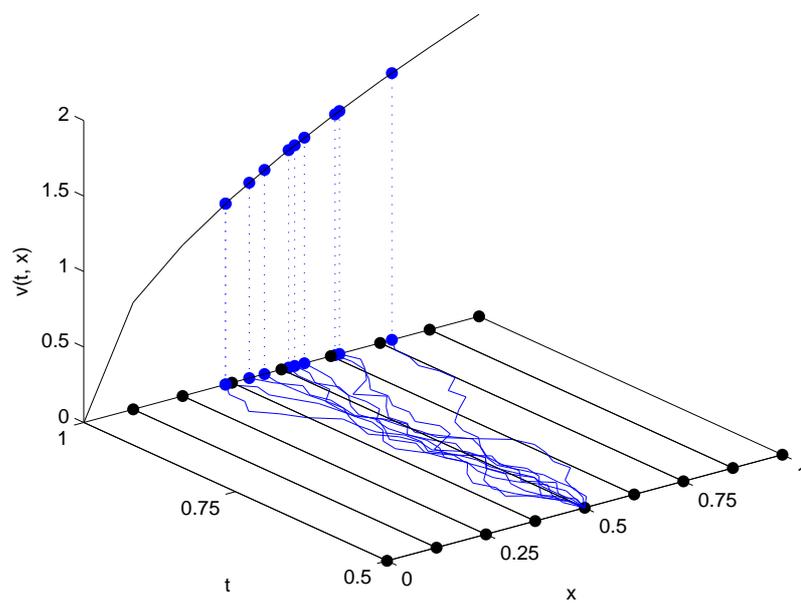


Abbildung 3.1: Einige Pfade von $\mathbf{X}(s)$ auf $[t, t + \Delta t]$ mit Startwert $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}$ und die zugehörigen Werte $v(t + \Delta t, \mathbf{X}(t + \Delta t))$

Folglich brauchen wir „nur“ noch einen hochdimensionalen Maximierungsalgorithmus auf das Funktional $J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}_h)$ im Argument \mathbf{a}_h (und damit in $(\mathbf{a}_{ij})_{i,j}$) anzuwenden, um die endgültige Wertfunktion $v(t, \mathbf{x})$ aus (3.2) zu erhalten.

Die Simulation der Zwischenwerte zu den Zeitpunkten $t_i \in [t, t + \Delta t]$ ist nicht nur der Genauigkeit zuträglich, ihre Berechnung ist unerlässlich, um fatale Folgen einiger Strategien überhaupt erst sichtbar zu machen. Würde zum Beispiel keine neuerliche Auswertung des Integranden zwischen t und $t + \Delta t$ erfolgen, wäre der Integrand also konstant über die Zeit, so würde allein der Wert $u_1(t_i, \mathbf{X}(t_i), \mathbf{a}_h(t_i, \mathbf{X}(t_i)))$ für den Integralteil des Funktionals (3.1) eine Rolle spielen. Dieser ließe sich aber mit einer längst nicht mehr zulässigen Strategie beliebig in seiner Größe bestimmen, und man könnte so einen unendlichen Wert erreichen. Das würde eine nicht mehr mit der Realität übereinstimmende Diskretisierung darstellen. Aus demselben Grund ist auch eine Berechnung des Erwartungswerts auf analytischem Weg nicht möglich, wie dem folgenden Abschnitt über deterministische Simulation 3.2 entnommen werden kann.

Da für das Funktional (3.1) auf Grund seiner MARKOVschen Struktur sämtliche Werte $\mathbf{a}_h(t_*)$ mit $t_* < t$ unerheblich sind und auch die Werte für $t^* > t + \Delta t$ nicht mehr betrachtet werden müssen (sie sind bereits in $v(t + \Delta t, \cdot)$ eingegangen), kann je nach Konstruktion von \mathbf{a}_h die Dimension des Maximierungsproblems erheblich reduziert werden. Die relativ naive, dafür aber einfach zu handhabende konstante Zeitextrapolation $\mathbf{a}_h(t^*, \mathbf{x}) = \mathbf{a}_h(t, \mathbf{x})$ für $t^* \in [t, t + \Delta t)$ benötigt beispielsweise nur die zur Konstruktion *einer* Zeitscheibe notwendigen Koeffizienten $(\mathbf{a}_{ij})_{i,j}$. Wir verwenden bei unseren Simulationen eine in Zeit und Ort multilineare, genauere Version, die $\mathbf{a}_h(t^*, \mathbf{x})$ als linear interpolierten Wert zwischen ihren räumlichen Nachbarn zum Zeitpunkt t und zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnet.

3.2 Deterministische Simulation

Betrachtet man die Strategie \mathbf{a}_h als konstante Extrapolation aus den Werten zum Zeitpunkt t , wie im letzten Absatz des vorangegangenen Abschnitts bereits beschrieben, und kommt noch eine *zeit- und ortsunabhängige* Nutzenfunktion hinzu, so könnte man versucht sein, die stochastische Monte-Carlo-Simulation durch eine deterministische Berechnung des Erwartungswerts zu ersetzen. Nutzenfunktionen, die lediglich aus der Strategie, nicht aber aus Zeit oder Ort Nutzen ziehen, sind dabei keine Seltenheit. Zudem kann diese Unabhängigkeit auch durch zusätzliche Approximation künstlich herbeigeführt werden. Auch wenn diese Möglichkeit verlockend erscheint, da sie statt einer sehr oft wiederholten Ziehung von Zufallszahlen nur noch die numerische Quadratur einer Funktion und eines Dichtekerns mit sehr viel weniger Punkten enthält, wird sie doch gerade durch die dafür notwendige Vereinfachung disqualifiziert. Die Methode wird kurz beschrieben, bevor wir auf die

Gründe eingehen, aus denen sie nicht angewendet werden sollte.

Ist im Funktional (3.1) weder die Nutzenfunktion noch die Strategie \mathbf{a}_h in der Zeit variabel, da sie für den untersuchten Zeitpunkt t und den untersuchten Ortspunkt \mathbf{x} durch $\mathbf{a}_h(t, \mathbf{x}) = \mathbf{a}_{ij}$ für das passende i, j gegeben ist, so braucht auch der Pfad des stochastischen Prozesses nicht mehr simuliert zu werden. Der Erwartungswert erstreckt sich in der Folge nicht mehr über das Integral, da es nicht mehr stochastisch ist, und das Funktional vereinfacht sich zu

$$J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}_{ij}) = u_1(\mathbf{a}_{ij}) \int_t^{t+\Delta t} \beta(s-t) ds + \beta(\Delta t) \mathbb{E} \left[v(t+\Delta t, \mathbf{X}(t+\Delta t)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right]. \quad (3.4)$$

Dieser reduzierte Erwartungswert kann nun aber deterministisch berechnet werden, da die Verteilung von $\mathbf{X}(t+\Delta t)$ bekannt ist. Es handelt sich schlicht um eine Normalverteilung,

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) \sim N \left(\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\Delta t, G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\sqrt{\Delta t} \right). \quad (3.5)$$

Diese ist durch ihre GAUSSsche Dichtefunktion gekennzeichnet, so dass wir den obigen Erwartungswert durch Integration gegen diesen Dichtekern erhalten,

$$\mathbb{E} \left[v(t+\Delta t, \mathbf{X}(t+\Delta t)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right] = \frac{\int_{\tilde{\Omega}} e^{-\frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{y} - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\Delta t)^T (G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\Delta t)} v(t+\Delta t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}{\sqrt{(2\pi)^N \Delta t \det (G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})^T)}},$$

wobei $\tilde{\Omega}$ ein geeignet beschränktes Gebiet ist, z. B.

$$\tilde{\Omega} := \left[\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\Delta t - \alpha G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\sqrt{\Delta t}, \right. \\ \left. \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\Delta t + \alpha G(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})\sqrt{\Delta t} \right].$$

Auf diese Weise wird das Dichteintegral an Rändern abgeschnitten, die eine akzeptabel genaue Approximation desselben zulassen. Nach einer mehrdimensionalen Version des Satzes von TSCHEBYSCHOW liefert ein Wert von $\alpha = (5, \dots, 5)$ bereits 99% des korrekten Wertes.

An Formulierung (3.4) stellen wir aber auch schon den entscheidenden Nachteil dieser Simulationsmethode fest. Die gewählte Strategie geht nun fast ausschließlich in die Berechnung des Integralwerts ein. Ist die Nutzenfunktion u_1 unbeschränkt, so kann der Wert dieses Teils des Funktionals ins Unendliche gesteigert werden. Als einziger Ausgleich könnte der Erwartungswert des so beeinflussten Prozesses \mathbf{X} dienen. Es könnte sich bei dem diskretisierten Prozess aber durchaus um eine geometrische

BROWNSche Bewegung handeln, wie es auch in der von uns betrachteten Anwendung der optimalen Portfolios der Fall ist (siehe 4.1, Definition 4.3), wodurch dieser Erwartungswert eine untere Schranke erhält. Wo uns im Monte-Carlo-Fall noch durch eine zwischenzeitliche Anpassung der Strategie an den Pfad des Prozesses, eine Art „Kurskorrektur“ zwischen t und $t + \Delta t$, eine frühzeitig Erkennung einer solch fatal übersteigerten Strategie ermöglicht wird, indem der Integralwert und damit der Wert des gesamten Funktionals drastisch sinkt und die Strategie so als offensichtlich nicht maximierend verworfen wird, sind uns hier die Hände gebunden. Das Integral kann nicht auf den ungünstig beeinflussten Prozesspfad reagieren, und ein Maximum wird nicht gefunden, da das Integral jetzt keine obere Schranke mehr besitzt. Eine Lösung des ursprünglichen Problems mit dieser Methode ist nicht mehr möglich.

Ein weiterer Nachteil der beiden Simulationsmethoden in diesem und dem vorausgehenden Abschnitt liegt in einer häufigen Formulierung der Menge zulässiger Strategien begründet. Oft wird diese Menge dadurch kategorisiert, dass sie alle Strategien ausschließt, die den stochastischen Prozess nicht fast sicher innerhalb eines festgelegten Gebietes halten. Alle Strategien, die eine einzige Realisation von \mathbf{X} außerhalb des vorgesehenen Gebietes zulassen, müssten ausgeschlossen werden. Da eine solche Realisation aber für fast alle Strategien weder in der Formulierung (3.3) noch in (3.5) allgemein ausgeschlossen werden kann, eignet sich dieses Ausschlusskriterium nicht. Ein sinnvolleres Kriterium ist in diesem Fall, alle Strategien auszuschließen, die einen Erwartungswert außerhalb des vorgesehenen Gebietes erzeugen, d. h. für die

$$\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij})(t^* - t) \notin \Omega \quad (3.6)$$

gilt.

3.3 Markov-Ketten

Eine der Monte-Carlo-Methode überlegene und der im nächsten Abschnitt vorgestellten Differentialgleichungsmethode sehr ähnliche Lösungsstrategie findet sich bei Munk [48]. Dort kommen MARKOV-Ketten zum Einsatz, die eine Bewegung beschreiben, welche auf einem Zeit-Raum-Gitter nur diskrete Zustände annehmen kann. Aus den im Differentialgleichungsansatz aufgestellten, strategieabhängigen Koeffizienten werden Übergangswahrscheinlichkeiten für die Bewegung von einem Gitterpunkt (t, \mathbf{x}) zu seinen zeit-räumlichen Nachbarn berechnet, die eine mit der Dynamik (2.5) konsistente MARKOV-Kette erzeugen. Dann wird eine entsprechend dieser Übergangswahrscheinlichkeiten gewichtete Summe über die Werte an diesen Gitternachbarn $v(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ oder $v(t + \Delta t, \mathbf{y})$ als exakter Erwartungswert interpretiert und so das Funktional (2.7) ausgewertet. Die im Monte-Carlo-Verfahren notwendige Simulation entfällt.

Als konsistente Übergangswahrscheinlichkeiten werden wenig modifizierte Versionen der durch den Differentialgleichungsansatz erhaltenen Koeffizienten verwendet, und die Summierung als Erwartungswert entspricht genau unserem Ansatz über finite Differenzen. Da die Unterschiede zwischen dem MARKOV-Ketten-Ansatz und der Lösung der HJB-Gleichung fast ausschließlich wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur und daher für numerische Zwecke kaum signifikant sind, beschränken wir uns in dieser Arbeit auf die Behandlung der Differentialgleichung und gehen an dieser Stelle nicht näher auf die Bestimmung der Koeffizienten ein.

Die Verwendung von MARKOV-Ketten erfordert hauptsächlich die Einführung einer weiteren, rein synthetischen Zeitvariablen $\Delta\tau$, die die Zeitschrittweite zwischen den einzelnen Zuständen der MARKOV-Kette bestimmt. Sie geht in einen Skalierungsfaktor $e^{-\dots\tau}$ ein, und es wird eine formale Anpassung, wiederum durch Normierung auf einen der Koeffizienten, auf eine Gesamtwahrscheinlichkeit von 1 für die Übergangswahrscheinlichkeiten vorgenommen. Da sich aber $\Delta\tau$ proportional zu Δt verhält, sind die Grenzwerte der MARKOV-Methode und der Differentialgleichungsmethode gleich, und es genügt die Behandlung von Gleichung (3.21).

3.4 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Die HJB-Gleichung spielt eine wichtige Rolle in der stochastischen Kontrolltheorie. Es handelt sich um eine nichtlineare, parabolische partielle Differentialgleichung, die zentral auf dem BELLMAN-Prinzip und dem ITÔ-Lemma fußt. Sie hat Merton zu einer analytischen Berechnung der Wertfunktion und der zugehörigen Strategie für den Fall einer eindimensionalen CRRA-Nutzenfunktion verholfen, die wir in Kapitel 4 über optimale Portfolios nachvollziehen werden. Des Weiteren ist sie der Lieferant für im MARKOV-Umfeld benutzte, konsistente Wahrscheinlichkeiten. Nicht zuletzt ermöglicht sie den Einsatz effektiver numerischer Methoden zur Lösung des stochastischen Kontrollproblems (2.8).

Zunächst wird die HJB-Gleichung in allgemeinen Zusammenhängen vorgestellt, danach gehen wir auf ihre Diskretisierung mit finiten Differenzen ein, beschreiben notwendige Zusatzverfahren zur Konvergenz der einzelnen Zeitschritte und entwickeln eine speicher- und rechenzeitfreundliche Modifizierung des CRANK-NICOLSON-Zeitschrittverfahrens. Dieses Differentialgleichungsverfahren eignet sich besonders zur schnellen Erzeugung anisotroper Lösungen für die im letzten Abschnitt vorgestellte Kombinationstechnik für dünne Gitter.

3.4.1 Herleitung

Wir folgen in dieser Herleitung der HJB-Gleichung für die Wertfunktion hauptsächlich Korn [35] und benutzen Ergebnisse aus Evans [12]. Eine detaillierte Einführung

in deterministische und stochastische Kontrolltheorie bieten z. B. Fleming und Rishel [13] oder Fleming und Soner [14].

Auf dem Intervall $I = [0, T]$ sei ein N -dimensionaler, kontrollierter, stochastischer Prozess $\mathbf{X}(t)$ mit Zeitentwicklung (2.5) und eine Menge \mathcal{A} zulässiger Kontrollen \mathbf{a} gegeben. Zuerst führen wir hier eine sehr allgemeine Version der Wertfunktion $v : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ein, definiert über

$$v(t, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^T L_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) ds + L_2(\mathbf{X}(T)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right], \quad (3.7)$$

und betrachten erst im nächsten Abschnitt den Spezialfall mit Diskontierung.

Aus [12, Kapitel 4] zitieren wir das wichtige *Lemma von ITÔ*, ein für die Finanzmathematik unerlässliches Instrument zur Beschreibung stochastischer Prozesse, die von BROWNSchen Bewegungen abgeleitet sind.

Lemma 3.1 (von ITÔ). *Sei ein stochastischer Prozess $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^N$ gegeben, der der zeitlichen Entwicklung*

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f} dt + G d\mathbf{W}(t)$$

gehört, mit $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$, $G = (g_{kl})_{k,l} \in \mathbb{R}^{N \times M}$, GG^T positiv definit und einem M -dimensionalen WIENER-Prozess $\mathbf{W}(t)$. Ist die Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und hat stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{x})$, $\frac{\partial}{\partial x_k} u(t, \mathbf{x})$, $\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} u(t, \mathbf{x})$ für $k, l = 0, \dots, N-1$, so gehorcht der stochastische Prozess $u(t, \mathbf{X}(t))$ der zeitlichen Entwicklung

$$\begin{aligned} du(t, \mathbf{X}(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{X}(t)) dt + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_k} u(t, \mathbf{X}(t)) dX_k(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} (GG^T)_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} u(t, \mathbf{X}(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aus Karatzas und Shreve [33, Kapitel 3] wissen wir, dass die Wertfunktion v den Voraussetzungen dieses Satzes entspricht, und wir berechnen mit der ITÔ-

Formel (3.8)

$$\begin{aligned}
 v(t^*, \mathbf{X}(t^*)) &= v(t, \mathbf{X}(t)) + \int_t^{t^*} \frac{\partial}{\partial t} v(s, \mathbf{X}(s)) ds \\
 &\quad + \int_t^{t^*} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_k} v(s, \mathbf{X}(s)) dX_k(s) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m=0}^N \int_t^{t^*} G_{km}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) \\
 &\quad \quad G_{lm}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(s, \mathbf{X}(s)) ds. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Um die Übersichtlichkeit beizubehalten, führen wir die Matrix $(\bar{G}_{kl})_{k,l}$ mit

$$\bar{G}_{kl} = \sum_m G_{km} G_{lm},$$

also $\bar{G} = G G^T$, ein. Das BELLMAN-Prinzip (2.9) schreibt sich nun als

$$\begin{aligned}
 0 &= \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^{t^*} \left(L_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) + \frac{\partial}{\partial t} v(s, \mathbf{X}(s)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \bar{G}_{kl}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(s, \mathbf{X}(s)) \right) ds \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{N-1} \int_t^{t^*} \frac{\partial}{\partial x_k} v(s, \mathbf{X}(s)) dX_k(s) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right] \\
 &= \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \left(\mathbb{E} \left[\int_t^{t^*} \left(L_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) + \frac{\partial}{\partial t} v(s, \mathbf{X}(s)) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) \frac{\partial}{\partial x_k} v(s, \mathbf{X}(s)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \bar{G}_{kl}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(s, \mathbf{X}(s)) \right) ds \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right] \\
 &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\int_t^{t^*} \sum_{k,m=0}^{N-1} G_{km}(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) \frac{\partial}{\partial x_k} v(s, \mathbf{X}(s)) dW_m(s) \mid \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Wie wir in Evans [12, Kapitel 4] sehen, verschwindet der letzte Summand. Wenn wir jetzt durch $t^* - t$ teilen und den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden, erhalten wir ein $\xi \in [t, t^*]$ mit

$$0 = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[L_1(\xi, \mathbf{X}(\xi), \mathbf{a}(\xi, \mathbf{X}(\xi))) + \frac{\partial}{\partial t} v(\xi, \mathbf{X}(\xi)) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(\xi, \mathbf{X}(\xi), \mathbf{a}(\xi, \mathbf{X}(\xi))) \frac{\partial}{\partial x_k} v(\xi, \mathbf{X}(\xi)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \bar{G}_{kl}(\xi, \mathbf{X}(\xi), \mathbf{a}(\xi, \mathbf{X}(\xi))) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(\xi, \mathbf{X}(\xi)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right].$$

Für $t^* \rightarrow t$ gilt dann

$$0 = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[L_1(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{X}(t)) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))) \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{X}(t)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \bar{G}_{kl}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(t, \mathbf{X}(t)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right].$$

Da aber zum Zeitpunkt t alles bekannt ist, fällt der Erwartungswertoperator $\mathbb{E}[\cdot]$ weg, und wir erhalten die HJB-Gleichung (manchmal auch als *partielle Differentialgleichung des dynamischen Programmierens* bezeichnet)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) + \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \left(L_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right), \quad (3.10)$$

zusammen mit der Endbedingung

$$v(T, \mathbf{x}) = L_2(\mathbf{x}).$$

Diese Gleichung kann jetzt zuerst als Maximierungsproblem nach $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ in Abhängigkeit von \mathbf{x} , $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\bar{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x})$ und den Ableitungen von $v(t, \mathbf{x})$ und danach mit den erhaltenen \mathbf{a} -Werten als partielle Differentialgleichung nach v gelöst werden.

Damit sich dieses Vorgehen auch in der Notation niederschlägt sowie diese nicht unnötig verkompliziert wird, führen wir eine HAMILTONsche Funktion ein, die die Aufgabe des Maximierungsteils in Gleichung (3.10) übernimmt,

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, Y) := \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \left(L_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x}))^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\bar{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x}))Y) \right). \quad (3.11)$$

Der *Spuroperator* für eine Matrix $A := (a_{kl})_{k,l}$ ist dabei vermöge

$$\operatorname{tr} A := \sum_k a_{kk}$$

definiert und lautet ausgeschrieben im obigen Fall

$$\operatorname{tr}(\bar{G}Y) := \sum_{k,l} \bar{G}_{kl} Y_{lk}.$$

In unserem Fall ist das letzte Argument der HAMILTONschen Funktion die HESSE-Matrix der Wertfunktion v (notiert als $\mathcal{H}v$) und damit symmetrisch. Gleichung (3.10) lautet also in der nun verkürzten und daher übersichtlicheren Form

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) + H(t, \mathbf{x}, \nabla v(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}v(t, \mathbf{x})). \quad (3.12)$$

3.4.2 Herleitung mit Diskontierung

Eine oft betrachtete Version der HJB-Gleichung beschreibt den Fall diskontierten Nutzens. Dies ist die gebräuchlichste Form der hier betrachteten stochastischen Kontrollprobleme. Sie taucht häufig in der Ökonomie auf und ist prominent in der Problemstellung der optimalen Portfolios in der Finanzmathematik.

Sei eine multiplikative Diskontfunktion $\beta : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$ gegeben, die in $(0, \alpha)$ mit $\alpha > 0$ differenzierbar ist und deren Ableitung

$$-\infty < \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)} =: \zeta < \infty$$

erfüllt.

Wir definieren dann die spezielle Wertfunktion $v : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ über

$$v(t, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^T \beta(s-t) u_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) ds + \beta(T-t) u_2(\mathbf{X}(T)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right] \quad (3.13)$$

und erhalten daraus für $t \leq t^* \leq T$ das BELLMAN-Prinzip

$$v(t, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^{t^*} \beta(s-t) u_1(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))) ds + \beta(t^* - t) v(t^*, \mathbf{X}(t^*)) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right]. \quad (3.14)$$

Der Zeitpunkt t^* wird nun hinreichend nah an t gewählt, $t^* - t < \alpha$, und die gleichen Berechnungen wie im vorangegangenen Abschnitt werden durchgeführt. Dabei muss die ITÔ-Formel auf $\beta(t^* - t)v(t^*, \mathbf{X}(t^*))$ angewendet werden, so dass die Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t} v(s, \mathbf{X}(s))$ durch $\beta'(s-t)v(s, \mathbf{X}(s)) + \beta(s-t)\frac{\partial}{\partial t} v(s, \mathbf{X}(s))$ ersetzt wird. Alle anderen Terme in (3.8) erhalten lediglich den zusätzlichen Faktor $\beta(s-t)$. Da dieser auch in der Formulierung von $L_1(\cdot)$ auftaucht, können wir ihn herausteilen und erhalten so in der endgültigen Version der HJB-Gleichung einen Reaktionsterm, der den Faktor ζ aufweist,

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta v(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) + \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \left(u_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \right. \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right) \\ &= \zeta v(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) + H(t, \mathbf{x}, \nabla v(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}v(t, \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (3.15)$$

zusammen mit der Endbedingung

$$v(T, \mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}).$$

Dies ist die Formulierung der HJB-Gleichung, die wir in unserer Anwendung der Wahl optimaler Portfolios in Kapitel 4 gebrauchen werden und in den folgenden Abschnitten weiter verfolgen.

3.4.3 Existenz und Eindeutigkeit

Wir zitieren zwei Sätze aus Fleming und Soner [15], die die meisten aus ökonomischen Anwendungen stammenden und so formulierten Beispiele abdecken. Insbesondere erfüllen die Parameter des Problems der optimalen Portfolios die genannten Voraussetzungen.

Satz 3.2. Sei \mathcal{A} kompakt, \mathbf{f} , \bar{G} und u_1 sowie ihre partiellen Ableitungen stetig und beschränkt und $u_2 \in C^3$. Ist \bar{G} gleichmäßig parabolisch,

$$\sum_{k,l=0}^{N-1} \bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \xi_k \xi_l \geq c \|\xi\|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R} \text{ und alle } (t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \text{ und ein } c > 0,$$

dann hat (3.15) eine eindeutige Lösung $v \in C^{1,2}$.

Diese Lösung liefert nun auch tatsächlich die gesuchte Wertfunktion (3.13).

Satz 3.3. Sei $w \in C^{1,2}$ eine Lösung von (3.15) mit polynomielltem Wachstum,

$$|w(t, \mathbf{x})| \leq K(1 + \|\mathbf{x}\|^m) \text{ für Konstanten } K, m.$$

Ist eine maximierende Strategie $\mathbf{a}^* \in \arg \max(\dots)$, wobei die Klammer den Ausdruck aus Gleichung (3.15) enthält, auch zulässig, so ist $w = J(\cdot, \cdot; \mathbf{a}^*) = v$.

Die Voraussetzung der Kompaktheit an die Menge der zulässigen Strategien \mathcal{A} ist dabei nur scheinbar eine Einschränkung. In den meisten Fällen stellt sich auf anderem Weg heraus, dass ein Maximum existiert, das sowohl global ist als auch im Inneren einer großzügig genug gewählten Strategiemenge liegt. Somit ist die Kompaktheit nicht mehr für die Existenz einer optimalen Strategie entscheidend, und die Menge \mathcal{A} kann der Problemstellung angepasst hinreichend groß und kompakt angenommen werden, ohne eine tatsächliche Einschränkung darzustellen.

3.4.4 Diskretisierung mit finiten Differenzen auf anisotropen Gittern

Wir konzentrieren uns nun auf die numerische Behandlung von Gleichung (3.15) mittels finiter Differenzen, da diese Form der HJB-Gleichung den in den Anwendungen benötigten ζ -Reaktionsterm enthält. Wir nutzen einseitige Approximationssterne in Downwind-Richtung für die Ortsdiskretisierung, RUNGE-KUTTA-Verfahren für die Zeitdiskretisierung und Hillclimbing-Maximierungsverfahren für die Auswertung der HAMILTONSchen Funktion.

Ortsdiskretisierung erster Ordnung

Wie z. B. in Hanke-Bourgeois [23, Kapitel XV] gezeigt wird, können wir unter genügenden Glattheitsvoraussetzungen an v , deren Erfüllung Satz 3.2 garantiert, die folgenden Differenzensterne zur Approximation des Konvektionsterms einsetzen. Die Differenzenquotienten

$$D_{x_k}^+ v(t, \mathbf{x}) = \frac{v(t, \mathbf{x} + h_k \mathbf{e}_k) - v(t, \mathbf{x})}{h_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(h_k), \quad (3.16a)$$

$$D_{x_k}^- v(t, \mathbf{x}) = \frac{v(t, \mathbf{x}) - v(t, \mathbf{x} - h_k \mathbf{e}_k)}{h_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(h_k) \quad (3.16b)$$

konvergieren gegen $\frac{\partial}{\partial x_k} v(\mathbf{x})$ mit erster Ordnung, eine geschickte Kombination aus (3.16a) und (3.16b) konvergiert zweiter Ordnung gegen $\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}(\mathbf{x})$,

$$D_{x_k}^2 v(t, \mathbf{x}) = \frac{v(\mathbf{x} + h_k \mathbf{e}_k) - 2v(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x} - h_k \mathbf{e}_k)}{h_k^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}(t, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(h_k^2). \quad (3.16c)$$

Für die Diskretisierung der gemischten Terme in der Diffusion, d. h. der HESSE-Matrix, die als letztes Argument an die HAMILTONSche Funktion übergeben wird, orientieren wir uns an Hackbusch [22, Kapitel 5] und benutzen

$$\begin{aligned} D_{x_l x_k}^{2+} v(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left(D_{x_l}^+ D_{x_k}^+ + D_{x_l}^- D_{x_k}^- \right) v(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{-v(t, \mathbf{x} - h_l \mathbf{e}_l) + 2v(t, \mathbf{x}) - v(t, \mathbf{x} + h_l \mathbf{e}_l)}{2h_l h_k} \\ &\quad + \frac{-v(t, \mathbf{x} - h_k \mathbf{e}_k) - v(t, \mathbf{x} + h_k \mathbf{e}_k)}{2h_l h_k} \\ &\quad + \frac{v(t, \mathbf{x} - h_l \mathbf{e}_l - h_k \mathbf{e}_k) + v(t, \mathbf{x} + h_l \mathbf{e}_l + h_k \mathbf{e}_k)}{2h_l h_k} \end{aligned} \quad (3.16d)$$

und

$$\begin{aligned} D_{x_l x_k}^{2-} v(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left(D_{x_l}^+ D_{x_k}^- + D_{x_l}^- D_{x_k}^+ \right) v(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{v(t, \mathbf{x} - h_l \mathbf{e}_l) - 2v(t, \mathbf{x}) + v(t, \mathbf{x} + h_l \mathbf{e}_l)}{2h_l h_k} \\ &\quad + \frac{v(t, \mathbf{x} - h_k \mathbf{e}_k) + v(t, \mathbf{x} + h_k \mathbf{e}_k)}{2h_l h_k} \\ &\quad + \frac{-v(t, \mathbf{x} - h_l \mathbf{e}_l + h_k \mathbf{e}_k) - v(t, \mathbf{x} + h_l \mathbf{e}_l - h_k \mathbf{e}_k)}{2h_l h_k}. \end{aligned} \quad (3.16e)$$

Wir wählen für unsere Methoden ein so genanntes Downwind-Schema, das den Einsatz von (3.16a)–(3.16e) abhängig vom Vorzeichen der Konvektion bzw. der Diffusion koordiniert. Der Einsatz von zentralen Differenzen ist trotz höherer Ordnung nicht angebracht, da er erhebliche Instabilitäten erzeugt. Die Notation

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad f^- := (-f)^+$$

steht dabei für den positiven, respektive negativen Anteil eines Ausdrucks $f \in \mathbb{R}$. Setzen wir für die Konvektion D^+ bei positivem f und D^- bei negativem f sowie analog D^{2+} , D^{2-} für die Diffusion ein, so erhalten wir auf einem anisotropen, uniformen Gitter mit Maschenweiten h_k , $k = 0, \dots, N-1$, eine Ortsdiskretisierung der

Form

$$\begin{aligned}
 0 &= \zeta v(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) + \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x})} \left(u_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \right. \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left(f_k^+ D_{x_k}^+ - f_k^- D_{x_k}^- \right) v(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{G}_{kk} D_{x_k}^2 v(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \left(\tilde{G}_{kn}^+ D_{x_k x_l}^{2+} - \tilde{G}_{kn}^- D_{x_k x_l}^{2-} \right) v(t, \mathbf{x}) \right) \\
 &= \zeta v(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad + \hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{D}^- v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^+ v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^2 v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^{2-} v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^{2+} v(t, \mathbf{x})). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Es kommt also eine *diskrete* HAMILTONSche Funktion

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{Y}, Y_1, Y_2) &= \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x})} \left(u_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) + \sum_{k=0}^{N-1} \left(f_k^+ y_{2k} - f_k^- y_{1k} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{G}_{kk} Y_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \left(\tilde{G}_{kl}^+ Y_{2kl} - \tilde{G}_{kl}^- Y_{1kl} \right) \right) \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

zum Einsatz, die sich im hiesigen Fall in folgendes Differenzenschema umformen

lässt:

$$\begin{aligned}
 & \hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{D}^-v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^+v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^2v(t, \mathbf{x}), D^{2^-}v(t, \mathbf{x}), D^{2^+}v(t, \mathbf{x})) \\
 &= \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x})} \left(u_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \right. \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^+}{2h_k h_l} v(t, \mathbf{x} - h_k \mathbf{e}_k - h_l \mathbf{e}_l) \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^-}{2h_k h_l} v(t, \mathbf{x} - h_k \mathbf{e}_k + h_l \mathbf{e}_l) \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^-}{h_k} + \frac{\bar{G}_{kk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{2h_k^2} - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{|\bar{G}_{lk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{2h_k h_l} \right) v(t, \mathbf{x} - h_k \mathbf{e}_k) \\
 & \quad + \left(- \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{|f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{h_k} + \frac{\bar{G}_{kk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{h_k^2} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{|\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{h_k h_l} \right) \right) v(t, \mathbf{x}) \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^+}{h_k} + \frac{\bar{G}_{kk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{2h_k^2} - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{|\bar{G}_{lk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{2h_k h_l} \right) v(t, \mathbf{x} + h_k \mathbf{e}_k) \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^-}{2h_k h_l} v(t, \mathbf{x} + h_k \mathbf{e}_k - h_l \mathbf{e}_l) \\
 & \quad \left. + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^+}{2h_k h_l} v(t, \mathbf{x} + h_k \mathbf{e}_k + h_l \mathbf{e}_l) \right). \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Dabei ist im Fall $k = 0$ die Summe $\sum_{l=0}^{-1}$ als 0-wertig anzusehen.

Der so erzeugte und in \hat{H} verwendete räumliche Differenzenstern enthält $1 + 2N^2$ Punkte, da nur Nachbarn ins Gewicht fallen, die über Schritte in höchstens 2 unterschiedlichen Dimensionen erreicht werden können. Dies sind die $4 \binom{N}{2}$ in $D_{x_l x_k}^{2^\pm} v(t, \mathbf{x})$ auftauchenden Punkte $\mathbf{x} \pm h_l \mathbf{e}_l \pm h_k \mathbf{e}_k$ für $k \neq l$, die $2N$ in $D_{x_k}^2 v(t, \mathbf{x})$ auftauchenden Punkte $\mathbf{x} \pm h_k \mathbf{e}_k$ sowie der Fußpunkt \mathbf{x} selbst. Wir bezeichnen die Menge der in diesem Stern enthaltenen Nachbarn von \mathbf{x} , zu denen wir auch \mathbf{x} selbst zählen, im Folgenden mit $\mathcal{S}(\mathbf{x})$. In Abbildung 3.2 ist $\mathcal{S}(\mathbf{x})$ beispielhaft für 3 Dimensionen aufgezeichnet.

Crank-Nicolson-Zeitdiskretisierung

Wir kommen nun zur Zeitdiskretisierung. Zur Vereinheitlichung der Notation schreiben wir $\Delta x := h$ und bezeichnen die Zeitschrittweite mit Δt . Wir benutzen ein

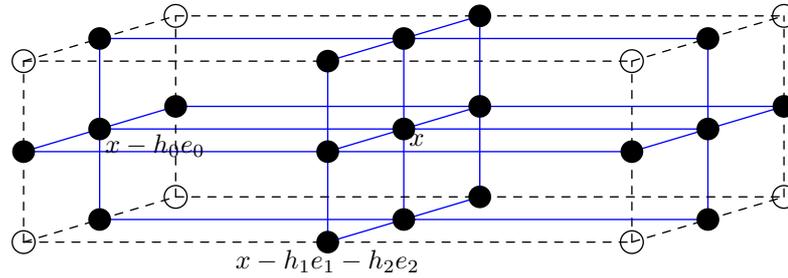


Abbildung 3.2: Die in den Diskretisierungen für die Ableitungen verwendeten Punkte in einem dreidimensionalen Gitter: $\mathcal{S}(\mathbf{x})$

CRANK-NICOLSON-Schema mit Parameter θ wie bei Großmann und Roos [21, Kapitel 6], das eine gewichtete Mittelung aus explizitem und implizitem Ansatz darstellt. Formal ist es ein RUNGE-KUTTA-Verfahren zweiter Ordnung, auch einstufiges GAUSS- oder implizites Mittelpunktsverfahren genannt. Das Schema ergibt sich durch Addition der zeitlich expliziten und impliziten Diskretisierung von Gleichung (3.17) (Vorwärts- bzw. -Rückwärts-EULER-Verfahren), und wir erhalten die endgültig diskrete Version von (3.17) als

$$\begin{aligned}
 0 = & \zeta v(t, \mathbf{x}) + \frac{v(t + \Delta t, \mathbf{x}) - v(t, \mathbf{x})}{\Delta t} \\
 & + (1 - \theta) \hat{H}(t + \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{D}^- v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^+ v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^2 v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \\
 & \quad \mathbf{D}^{2^-} v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^{2^+} v(t + \Delta t, \mathbf{x})) \\
 & + \theta \hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{D}^- v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^+ v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^2 v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^{2^-} v(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^{2^+} v(t, \mathbf{x})).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\theta = 0$ zu einem voll expliziten und $\theta = 1$ zu einem voll impliziten Schema führt. Dieses eventuell unerwartete Verhalten begründet sich in der Lösungsrichtung rückwärts in der Zeit. Im Folgenden werden wir auch die Begriffe *vorheriger* und *nächster* Zeitschritt entsprechend verwenden.

Die Werte für $v(t + \Delta t, \cdot)$ sind bereits berechnet worden und liegen daher vor. Mit ihnen kann die HAMILTONSche Funktion $\hat{H}(t + \Delta t, \dots)$ nun einmal ausgewertet werden, um dann, mit $(1 - \theta)$ gewichtet und um den aus der Zeitdiskretisierung stammenden Wert $\frac{v(t + \Delta t, \mathbf{x})}{\Delta t}$ ergänzt, die rechte Seite eines linearen Gleichungssystems für $v(t, \cdot)$ aufzustellen. Wir können folglich Gleichung (3.20) ausführlich aufschreiben,

$$\begin{aligned}
 -\frac{v(t + \Delta t, \mathbf{x})}{\Delta t} - (1 - \theta) \hat{H}(t + \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{D}^- v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^+ v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \\
 \mathbf{D}^2 v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^{2^-} v(t + \Delta t, \mathbf{x}), \mathbf{D}^{2^+} v(t + \Delta t, \mathbf{x}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x})} \left(\theta u_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \right. \\
 &\quad + \theta \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^+}{2\Delta x_k \Delta x_l} v(t, \mathbf{x} - \Delta x_k \mathbf{e}_k - \Delta x_l \mathbf{e}_l) \\
 &\quad + \theta \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^-}{2\Delta x_k \Delta x_l} v(t, \mathbf{x} - \Delta x_k \mathbf{e}_k + \Delta x_l \mathbf{e}_l) \\
 &\quad + \theta \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^-}{\Delta x_k} + \frac{\bar{G}_{kk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{2\Delta x_k^2} \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{|\bar{G}_{lk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{2\Delta x_k \Delta x_l} \right) v(t, \mathbf{x} - \Delta x_k \mathbf{e}_k) \\
 &\quad + \left(\zeta - \frac{1}{\Delta t} - \theta \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{|f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{\Delta x_k} + \frac{\bar{G}_{kk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{\Delta x_k^2} \right. \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \left. - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{|\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{\Delta x_k \Delta x_l} \right) \right) v(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad + \theta \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^+}{\Delta x_k} + \frac{\bar{G}_{kk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{2\Delta x_k^2} \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{|\bar{G}_{lk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{2\Delta x_k \Delta x_l} \right) v(t, \mathbf{x} + \Delta x_k \mathbf{e}_k) \\
 &\quad + \theta \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^-}{2\Delta x_k \Delta x_l} v(t, \mathbf{x} + \Delta x_k \mathbf{e}_k - \Delta x_l \mathbf{e}_l) \\
 &\quad \left. + \theta \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})^+}{2\Delta x_k \Delta x_l} v(t, \mathbf{x} + \Delta x_k \mathbf{e}_k + \Delta x_l \mathbf{e}_l) \right). \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Dabei sind zwar die Werte der Funktion $v(t + \Delta t, \cdot)$ bekannt, es ist aber davon auszugehen, dass $\hat{H}(t + \Delta t, \dots)$ noch nicht mit diesen Werten ermittelt worden ist. Dies ist nicht nur beim ersten Zeitschritt der Fall, der die HAMILTONSche Funktion für die Startbedingung auswerten muss, sondern auch für jeden folgenden Zeitschritt. Daher ist eine Abspeicherung des Funktionswerts der HAMILTONSchen Funktion oder der in ihr gefundenen Strategien bereits im Zeitschritt $t + 2\Delta t \mapsto t + \Delta t$ und ihre Wiederverwendung im Zeitschritt $t + \Delta t \mapsto t$ nur unter Umständen möglich, und

sie stellt einen weiteren Approximationsfehler dar. Eine neuerliche Auswertung der HAMILTONSchen Funktion mit den aktuellen $v(t + \Delta t, \cdot)$ -Werten ist also unumgänglich. Auf diese Problematik gehen wir im Zuge der Beschreibung der Nachiteration in einem Kurzabschnitt auf Seite 41 näher ein.

Zur Lösung von Gleichung (3.21) sind nun in jedem Zeitschritt mehrere Schritte notwendig, die auf Grund einer vorzunehmenden Nachiteration geschachtelt werden. Diese Schritte werden in den folgenden Kurzabschnitten einzeln erläutert.

Maximierung

Wir wenden uns zuerst der Auswertung der HAMILTONSchen Funktion und damit der Maximierung und der Bestimmung der zugehörigen Kontrolle $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ zu. Dabei ist es essentiell, die $v(t, \mathbf{y})$ -Werte für alle in (3.21) vorkommenden \mathbf{y} zu kennen oder approximativ einzusetzen. Erst mit diesen Werten kann überhaupt eine Maximierung vorgenommen werden.

Nehmen wir an, die Werte $v(t + \Delta t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{a}(t + \Delta t, \mathbf{y})$ seien durch vorherige Berechnungen oder durch Startvorgaben bekannt. Dann können wir als erste Näherung für die Werte $v(t, \mathbf{y})$ einfach diese bekannten Werte übernehmen, also konstant aus dem vorherigen Zeitschritt extrapolieren. Auf diese Weise erhalten wir für alle benötigten Punkte v -Werte und können nun die Maximierung in $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ durchführen.

Wir betrachten dazu \mathbf{a} als D -dimensionalen Parameter an der Stelle (t, \mathbf{x}) und bestimmen ihn mit Hilfe eines Maximierungsalgorithmus mindestens erster Ordnung (siehe Abschnitt 5.2). Dabei sind Vorgaben an \mathbf{a} in Form von $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x})$ vom verwendeten Algorithmus zu beachten.

Der so gefundene Wert der Maximierung auf der rechten Seite von Gleichung (3.21) kann nun, um $-(\zeta - \frac{1}{\Delta t})v(t, \mathbf{x})$ korrigiert, gespeichert und im Zeitschritt $t \mapsto t - \Delta t$ wieder verwendet werden, falls die Näherung an $v(t, \cdot)$ bereits gut genug ist. Die Nachteile einer solchen Speicherung werden im Kurzabschnitt über die Nachiteration ausführlich diskutiert.

Lösung des resultierenden, linearen Gleichungssystems

Mit der im vorangehenden Schritt bestimmten Politik \mathbf{a} , die wir ihrer Lokalisierung nach im Folgenden mit $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ bezeichnen werden, ergibt sich nun aus Gleichung (3.21) sofort die Matrix des zum Zeitschritt $t + \Delta t \mapsto t$ gehörenden, linearen Gleichungssystems und die passende, dem Diskretisierungssstern aus Abbildung 3.2 entsprechende rechte Seite. Jede Zeile der zugehörigen Matrix enthält dabei die zu $v(t, \mathbf{y})$ mit $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{x})$ gehörenden, aus dieser Politik berechneten Koeffizienten. Die bekannten Werte von $v(t + \Delta t, \mathbf{x})$ und $\hat{H}(t + \Delta t, \dots)$ wandern korrekt gewichtet auf die rechte Seite.

Randwerte in DIRICHLET- oder NEUMANN-Form werden genauso durch Änderung der rechten Seite modelliert.

Da $\mathcal{S}(\mathbf{x})$ nur aus unmittelbaren Nachbarn von \mathbf{x} besteht und damit auch nur

```

 $v(T, \cdot) \leftarrow u_2$ 
for  $i \leftarrow n_t$  down to 0 do
   $v(i\Delta t, \cdot) \leftarrow v((i+1)\Delta t, \cdot)$ 
  while  $v(i\Delta t, \cdot)$  has not converged do
    for all  $j$  representing a grid point do
      get  $\mathbf{a}_{ij}$  by maximisation of (3.19)
      make matrix coefficients from  $\mathbf{a}_{ij}$ 
    end for
    solve resulting linear system
  end while
end for
return  $v(0, \cdot)$ 

```

Algorithmus 3.1: Der Algorithmus zur Lösung der HJB-Gleichung

diese Punkte Matrixeinträge erhalten, ist die Matrix dünn besetzt und kann mit einfachen, bekannten Algorithmen, z. B. direkten Verfahren bei einer eindimensionalen Problemstellung oder iterativen Verfahren für mehrdimensionale Aufgaben, gelöst werden.

Nachiteration

Zum Abschluss des Schritts $t + \Delta t \mapsto t$ nehmen wir eine Iteration im *Raum der Strategien* (englisch *policy space*) durch bootstrap-artige, sukzessive Erneuerung von v und \mathbf{a} vor.

Nutzen wir nämlich die gerade berechneten $v(t, \mathbf{y})$ -Werte erneut als Parameter für die HAMILTONsche Funktion und damit die Maximierung in Gleichung (3.21), so kann mit Hilfe dieser eine neue, maximierende Politik \mathbf{a} berechnet werden. Daraus wird wiederum ein neues Gleichungssystem erstellt und ein weiteres Mal gelöst. So ergeben sich immer bessere Werte für $v(t, \cdot)$, denn die das Gleichungssystem bestimmenden Strategien werden jeweils aus der letzten Iterierten gewonnen und passen sich möglichst gut der aktuellen, lokalen Umgebung zum Zeitpunkt t an. Die Konvergenz dieses Verfahrens wird in Kushner und Dupuis [36] sowie in Fleming und Soner [15] ausführlich erläutert. Algorithmus 3.1 stellt die gesamte Vorgehensweise noch einmal schematisch zusammen.

Sind bereits viele dieser Nachiterationen für einen Zeitschritt ausgeführt worden, so kann man davon ausgehen, dass der Abstand der einzelnen Iterierten zueinander sehr gering ist. Dann sind auch die auf der Grundlage der vorigen Iterierten gefundenen Strategien gute Näherungen an diejenigen Strategien, die durch eine neuerliche Auswertung der HAMILTONschen Funktion entstünden. Diese ohnehin berechneten Strategien können nun abgespeichert werden, um sie im nächsten Zeitschritt als Näherung der maximierenden Strategien in der HAMILTONschen Funktion einzusetzen.

Somit braucht die Maximierung nicht mehr ausgeführt zu werden. Eine erhebliche Zeitersparnis ist die Folge.

Dieses Vorgehen stellt allerdings eine zusätzliche Approximation dar. Da das Gleichungssystem immer erst nach der Bestimmung der Strategien gelöst wird, ist es diesen in der Genauigkeit gewissermaßen etwas voraus. Somit wird nur ein Näherungswert des korrekten Funktionswerts der HAMILTONSchen Funktion auf der rechten Seite des Gleichungssystems benutzt. Das ist nur ratsam, wenn durch eine Mindestgenauigkeit für die Nachiterationsschritte sichergestellt ist, dass auch die letzte Iterierte der Wertfunktion $v(t, \cdot)$ bereits den endgültigen Wert gut genug darstellt. Ist dies nicht gesichert, z. B. durch gänzlichen Verzicht auf Nachiterationen oder im expliziten Verfahren, das ohnehin keine Nachiteration vorsieht, ist von der Speicherung der Strategien abzuraten.

Weiterhin zu bedenken ist der immense Speicheraufwand, den die Speicherung der Strategien mit sich bringt. Da Strategien selten skalare Werte sind, sondern sogar pro Raumdimension mehrere Parameter umfassen können, ist für jeden Gitterpunkt die Ablage eines ganzen Datensatzes erforderlich. Zusätzlich zu den beiden grundsätzlich notwendigen Zeitscheiben der Wertfunktion $v(t + \Delta t, \cdot)$ und $v(t, \cdot)$ wird somit schnell noch einmal die doppelte oder dreifache Menge an Daten im Speicher gehalten. Das Problem kann zwar durch die Abspeicherung allein des Werts der HAMILTONSchen Funktion, nicht der Strategien, umgangen werden, dennoch ist der dafür zusätzlich benötigte Platz nicht unerheblich.

Zusammen mit der Ungenauigkeit, die durch die Speicherung nicht ganz aktueller Werte unweigerlich entsteht, spricht also wenig für die Wiederverwendung der im letzten Zeitschritt gefundenen Strategien. Um die erhöhte Rechenzeit zu umgehen, die eine stattdessen notwendige Auswertung der HAMILTONSchen Funktion erfordert, kann das im weiteren Verlauf vorgestellte, modifizierte CRANK-NICOLSON-Verfahren eingesetzt werden.

Ortsdiskretisierung höherer Ordnung

Der Einsatz anderer Differenzensterne ist natürlich ebenso möglich, wie wir sie zur Erhöhung der Konvergenzrate in diesem Unterabschnitt kurz vorstellen möchten.

Benutzen wir statt der einseitigen Differenzensterne erster Ordnung (3.16a) und (3.16b) nun (weiterhin einseitige) Differenzensterne höherer Ordnung, z. B.

$$D_{x_k}^+ v(t, \mathbf{x}) = \frac{-3v(\mathbf{x}) + 4v(\mathbf{x} + \Delta x_k \mathbf{e}_k) - v(\mathbf{x} + 2\Delta x_k \mathbf{e}_k)}{2\Delta x_k} \quad (3.22)$$

$$D_{x_k}^- v(t, \mathbf{x}) = \frac{3v(\mathbf{x} - 2\Delta x_k \mathbf{e}_k) - 4v(\mathbf{x} - \Delta x_k \mathbf{e}_k) + v(\mathbf{x})}{2\Delta x_k}, \quad (3.23)$$

so ergeben sich Gleichungen der Form (3.21) in komplizierterer Ausführung. Die Herangehensweise ist die gleiche, und die oben erläuterten Lösungsschritte können ganz analog ausgeführt werden.

Modifiziertes Crank-Nicolson-Verfahren

Auf einen zweiten Blick lässt sich in der Diskretisierung (3.20) der HJB-Gleichung (3.15) auch die CRANK-NICOLSON-Mittelung zwischen den Zeitpunkten und damit ein Teil der zeitlichen Ableitung in eine einzige HAMILTONSche Funktion integrieren. Dieser obläge dann auch die Ausführung des CRANK-NICOLSON-Schemas innerhalb ihrer Maximierung. Hierzu wird der CRANK-NICOLSON-Parameter θ an die HAMILTONSche Funktion weitergegeben, die dann folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}
 & \hat{H}^\theta(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{y}}_1, \mathbf{y}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2, \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{Y}}, Y_1, \tilde{Y}_1, Y_2, \tilde{Y}_2) \\
 &= \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(t, \mathbf{x})} \left(\theta u_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) + (1 - \theta) u_1(t + dt, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \right. \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left(f_k^+(\theta y_{2k} + (1 - \theta) \tilde{y}_{2k}) - f_k^-(\theta y_{1k} + (1 - \theta) \tilde{y}_{1k}) \right) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{G}_{kk}(\theta Y_k + (1 - \theta) \tilde{Y}_k) \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \left(\bar{G}_{kl}^+(\theta Y_{2kl} + (1 - \theta) \tilde{Y}_{2kl}) - \bar{G}_{kl}^-(\theta Y_{1kl} + (1 - \theta) \tilde{Y}_{1kl}) \right) \right). \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Das Diskretisierungsschema (3.20) nimmt dann die Gestalt an von

$$\begin{aligned}
 0 = -\beta v^t + \frac{v^{t+dt} - v^t}{dt} + \hat{H}^\theta(t, \mathbf{x}, \mathbf{D}^- v^t, \mathbf{D}^- v^{t+dt}, \mathbf{D}^+ v^t, \mathbf{D}^+ v^{t+dt}, \\
 \mathbf{D}^2 v^t, \mathbf{D}^2 v^{t+dt}, \mathbf{D}^{2-} v^t, \mathbf{D}^{2-} v^{t+dt}, \mathbf{D}^{2+} v^t, \mathbf{D}^{2+} v^{t+dt}). \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen bietet einen überlegenen Vorteil. Es wird nur noch *eine*, das aus beiden Zeitpunkten kombinierte Schema maximierende Strategie für den Punkt (t, \mathbf{x}) gesucht, ohne eine Strategie eines anderen Punktes beachten zu müssen. Dadurch erübrigt sich die Abspeicherung der Strategien für den vorherigen Zeitpunkt $\mathbf{a}(t + \Delta t, \cdot)$, die unter Umständen ein Vielfaches der Gitterpunkte für eine Zeitscheibe im Speicherplatz einnehmen kann. Auch eine neuerliche Berechnung dieser Strategiepunkte, wie auf Seite 39 angemerkt, ist nicht mehr erforderlich. Für diese Verfahrensweise stellt sich eine dem gewöhnlichen CRANK-NICOLSON-Vorgehen äquivalente Konvergenz ein, wie in Kapitel 5 zu sehen ist.

Stabilität

Aus Crandall und Lions [10] ist ersichtlich, dass diskrete HAMILTONSche Funktionen nur ein stabiles Ortsdiskretisierungsverfahren darstellen, wenn sie gewissen Konsistenz- und Monotonieeigenschaften unterliegen (siehe auch Barles und Souganidis [2]). Diese betreffen ausschließlich die Anwendung einseitiger Differenzensterne,

zentrale Differenzensterne haben kein Gegenstück und sind daher ohnehin konsistent. Dieselbe Quelle stellt aber auch fest, dass die erreichbare Genauigkeitsrate in der L^∞ -Norm lediglich $\frac{1}{2}$ beträgt. Diese Beobachtung wird von unseren numerischen Resultaten in Kapitel 5 bestätigt.

Zuerst soll sichergestellt werden, dass das diskrete Schema (3.18) mit der kontinuierlichen HAMILTONSchen Funktion (3.11) konsistent ist. Die Forderung lautet

$$\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}, Y, Y) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, Y)$$

mit $\mathbf{Y} := \text{diag } Y$ und ist offensichtlich erfüllt. In das diskrete Schema (3.24) ist ein Teil der Zeitdiskretisierung bereits mit einbezogen worden, so dass die Forderung dort etwas anders lautet: Werden dort jeweils dieselben Werte ebenso für beide Zeitpunkte eingesetzt, so muss die diskrete HAMILTONSche Funktion mit ihrem kontinuierlichen Pendant übereinstimmen. Die Forderung lautet

$$\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}, Y, Y, Y, Y) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, Y),$$

ist aber erst erfüllt, wenn zusätzlich die Nutzenfunktion u_1 jeweils zum selben Zeitpunkt ausgewertet wird. Dies ist aber gerade der Zweck der Konsistenzbedingung, so dass auch (3.24) als konsistent gilt.

Weiter soll die Monotonie der Schemata aufgezeigt werden. Eine *monotone*, diskrete HAMILTONSche Funktion ist monoton fallend in ihren eine linksseitige Approximation darstellenden Argumenten und monoton steigend in den für eine rechtsseitige Approximation stehenden. Dies entspricht in den Formulierungen (3.18) und (3.24) einer jeweiligen Monotonie in den mit 1 beziehungsweise mit 2 indizierten Argumenten. Auch diese Monotonieeigenschaft ist auf Grund der Vorzeichen der positiven beziehungsweise negativen Anteile der Koeffizienten leicht nachprüfbar.

Beide Schemata sind offensichtlich LIPSCHITZ-stetig.

Um diese stabilen Ortsdiskretisierungen in eine ebenfalls stabile Zeitdiskretisierung einzubetten, untersuchen wir für diese ebenso eine Monotonieeigenschaft. Dabei werden weitere Voraussetzungen an die Koeffizienten und die Ortsschrittweiten gestellt, welche je nach Struktur der Diffusionskoeffizientenmatrix Einschränkungen an die Anisotropie des verwendeten Gitters macht. Dies ist besonders bei der Kombinationstechnik zu beachten, die in Abschnitt 3.5 beschrieben wird und sich aus verschiedenen anisotropen Gittern zusammensetzt. Eine diagonale Koeffizientenmatrix, wie sie häufig in Aktienmodellen auftritt, erfüllt die hier geforderte Struktur immer. Die zeitliche Monotonie fordert von dem Gesamtschema, dass es in jedem Punkt $v(t + \Delta t, \mathbf{x}(\pm \Delta x_k \mathbf{e}_k \pm \Delta x_l \mathbf{e}_l))$, als Argument betrachtet, monoton steigend ist. Für die entsprechende Argumentation nehmen wir die ausführliche Version der Gesamtdiskretisierung (3.21) zu Hilfe.

Lemma 3.4 (CFL-Bedingung). *Ist die Matrix $(\frac{\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{\Delta x_k \Delta x_l})_{kl}$ diagonaldominant und unterliegt die Zeitschrittweite Δt der COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Bedingung*

$$\frac{1}{\Delta t} \geq (1 - \theta) \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{|f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{\Delta x_k} + \frac{\bar{G}_{kk}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{\Delta x_k^2} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{|\bar{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})|}{\Delta x_k \Delta x_l} \right),$$

jeweils für alle $(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})$, so stellen beide Schemata (3.20) und (3.25) gültige monotone Schemata dar.

Der Beweis ergibt sich durch einfaches Einsetzen der Kriterien in (3.21).

Randwerte

Für die Gebietsgrenzen, die bei einer Diskretisierung unweigerlich entstehen, sind nun noch sinnvolle Randwerte zu setzen. Dabei können sich Randwerte sehr schnell aus der Folgerung in Abschnitt 2.2 ergeben. Dort hatten wir bereits angemerkt, dass die stochastische Entwicklung des Prozesses $\mathbf{X}(t)$ beim Auftreffen auf einen vom Problem formulierten Rand ihrer Volatilität enthoben werden muss, so dass sichergestellt ist, dass der Prozess fast sicher dieses Gebiet nicht verlässt. Auf einem solchen Randpunkt degeneriert also die Differentialgleichung zu einer hyperbolischen. Diese Einschränkung ist natürlich nur möglich, wenn der Diffusionskoeffizient \bar{G} an diesem Gebietsrand nicht für alle Strategien a ungleich 0 ist, da die Wahl der Strategie aus der Menge $\mathcal{A}(t, \mathbf{x})$ die einzige Möglichkeit der Steuerung dieses Entwicklungsparameters darstellt. An einem solchen Gebietsrandpunkt (t, \mathbf{x}) sind also nur noch Strategien aus

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{x}) = \bar{G}^{-1}(0)$$

zulässig. Diese Strategien haben aber oft offensichtliche Auswirkungen auf den weiteren Verlauf des stochastischen Prozesses und damit direkt auf die Wertfunktion an der Stelle (t, \mathbf{x}) . So verschwindet z. B. im eindimensionalen Problem optimaler Portfolios durch obige Strategiewahl auch der Konvektionsparameter und ein DIRICHLET-Randwert von 0 ist die Folge. Können aber keine Aussagen über den stochastischen Prozess gemacht werden, sobald er einmal durch einen nicht-verschwindenden Konvektionsparameter den Gebietsrand wieder verlassen hat, so sind auch gewöhnlich keine vorberechenbaren Funktionswerte für die Wertfunktion v ersichtlich und DIRICHLET-Randwerte können nicht sinnvoll verwendet werden. Sie können trotzdem willkürlich gesetzt werden, und wir erreichen damit in den numerischen Versuchen auch passable Ergebnisse (vergleiche Kapitel 5).

Für zur Diskretisierung durch Abschneiden des ursprünglichen Problemgebiets entstandene Ränder sind willkürlichere Randvorgaben in Form von NEUMANN-Rändern erforderlich. Diese können oftmals am ursprünglich gestellten Problemfunktional (2.7) abgelesen werden, im hiesigen Fall an der spezielleren Präferenzstrukturform (3.13). Da es sich bei der Wertfunktion tatsächlich um eine Nutzenstruktur

von einem Zeit-Raum-Punkt (t, \mathbf{x}) handelt, wie von Platen [55] ausführlich begründet wird, bietet das GOSSENSche Gesetz einen Anhaltspunkt für NEUMANN-Werte am rechten Gebietsrand, d. h. $X_k \rightarrow \infty$ für ein k . Diese Vorschriften für die erste Ableitung werden nun am rechten Rand des abgeschnittenen, numerischen Gebiets angelegt. Für den linken Rand sind ebenfalls NEUMANN-Randwerte denkbar, z. B. für den Fall von CARA-Nutzenfunktionen aus Kapitel 2.

3.5 Dünngitterdiskretisierung mit der Kombinationstechnik

Die in den vorigen Abschnitten vorgestellten Lösungsverfahren können jeweils eingesetzt werden, um Lösungen auf anisotropen Gittern zu erzeugen. Da die betrachteten Probleme aber meist für jede Dimension dieselbe Aufmerksamkeit und damit dieselbe Gitterauflösung erfordern, können stark anisotrope Gitter nicht als sinnvolle Lösung herangezogen werden. Andererseits erfordert ein fast isotropes Gitter eine enorme Menge an Punkten und daher einen kaum zu bewältigenden Speicheraufwand. Das Phänomen ist auch unter dem Namen *Fluch der Dimension* bekannt (siehe beispielsweise Bungartz [6]). Ein möglicher Ausweg aus diesem Engpass ist ein so genanntes dünnes Gitter, das trotz gleicher Feinstauflösung erheblich weniger Punkte besitzt als ein volles, isotropes Gitter. Dieses ist nicht dimensionsweise anisotrop, sondern gewissermaßen levelweise. Statt aber nun unsere oben entwickelten Verfahren an die Dünngitterstruktur anzupassen und damit schwerwiegende Probleme in Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Punkten zu erzeugen, bedienen wir uns der Kombinationstechnik, die geschickt Lösungen auf verschiedenen anisotropen Gittern miteinander kombiniert und so effizient eine Dünngitterlösung erzeugt. Eine umfassende Erläuterung dieser Kombinationstechnik geben Garcke [16, Kapitel 4] und Griebel, Schneider, Zenger [20].

Ein anisotropes Gitter, wie wir es von nun an betrachten möchten, lässt sich leicht und eindeutig durch seinen Fußpunkt $\boldsymbol{\omega}$, die Maschenweiten $\Delta \mathbf{x}$ und die Anzahl seiner Punkte in jeder Dimension charakterisieren. Da wir bei der Kombinationstechnik nur auf spezielle, anisotrope Gitter zugreifen werden, führen wir sie unter dem Namen „reguläre, anisotrope Gitter“ ein:

$$\begin{aligned} \Omega_I &:= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \exists \mathbf{j} \in I_I \text{ mit } x_k = \omega_k + j_k \Delta x_k \\ &\quad \text{für jede Dimension } k = 0, \dots, N-1 \}, \\ I_I &:= \{ \mathbf{j} \in \mathbb{N}^N \mid j_k \in [0, 2^{l_k}], k = 0, \dots, N-1 \}. \end{aligned}$$

Andere Indexmengen I verallgemeinern diese Gitterdefinition. So würde $I := \mathbb{Z}^N$ den Gesamttraum und $I := \mathbb{N}^N$ den in $\boldsymbol{\omega}$ fußenden, positiven Quadranten „vergittern“. Um unser endliches Gitter an unsere Problemstellung zu adaptieren, legen wir $\Delta \mathbf{x} := (2^{-l_k} \varnothing_k \Omega)_k$ fest, wobei $\varnothing_k \Omega$ die Kantenlänge des N -dimensionalen Quaders Ω in

Dimension k bezeichnet. Diese Skalierungsfestlegung ist allerdings in den folgenden Abschnitten unerheblich.

3.5.1 Nodale Räume und ihre Überschüsse: Hierarchische Räume

Betrachten wir eine durch Funktionswerte auf einem anisotropen Gitter gegebene, multilineare Funktion, wie wir sie z. B. durch die Lösungstechniken in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 erhalten, so entspricht dieser Funktion eine Darstellung per Basiskoeffizienten zu einer geeigneten Basis. Da bei der Diskretisierung mit finiten Differenzen nicht von dem bei finiten Elementen üblichen Einsatz der GREENSchen Formel Gebrauch gemacht wird, liefert auch die Methode der finiten Differenzen eine Lösung als Koeffizientendarstellung zu Basisfunktionen mit bestimmten Trägern. Im Fall der Ortsdiskretisierung erster Ordnung ist diese Basis gerade die in den Gitterpunkten aufgehängte, nodale, stückweise multilineare Tensorprodukt-Hutbasis $\{\phi_{\mathbf{l},j} \mid I_{\mathbf{l}}\}$ mit

$$\phi_{\mathbf{l},j}(\mathbf{x}) = \prod_{k=0}^{N-1} \phi_{l_k,j_k,\omega_k}(x_k),$$

$$\phi_{l,j,\omega}(x) = \begin{cases} 1 - |2^l x - j| & \text{falls } x \in [\omega + (j-1)2^{-l}, \omega + (j+1)2^{-l}] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Koeffizienten sind gerade die Funktionswerte an diesen Gitterpunkten. Ablesen kann man diese Basis an der Herleitung der Methode der finiten Differenzen über Interpolation gegebener Ordnung, wie sie z. B. in Shu [60, Kapitel 2] nachgeschlagen werden kann. Dementsprechend sind bei höherer Approximationsordnung in den finiten Differenzen auch Basen höherer Ordnung möglich.

Die durch eine solche Basis aufgespannten, anisotropen Räume $V_{\mathbf{l}}$ werden aber auch von einer anderen, so genannten *hierarchischen Basis* aufgespannt, die levelweise diese Räume jeweils auf denen mit einem niedrigeren Level aufbaut. Dazu wird die Erkenntnis ausgenutzt, dass die Verfeinerung des Gitters und damit der Basis in eine Dimension jeweils durch einen Überschuss charakterisiert wird, der den Detailgewinn gegenüber dem in jeder Dimension nächstniedrigeren Level beschreibt,

$$W_{\mathbf{l}} := V_{\mathbf{l}} \setminus \bigcup_{k=0}^{N-1} V_{\mathbf{l}-\mathbf{e}_k}.$$

Natürlich ist nun

$$V_{\mathbf{l}} = \bigoplus_{\mathbf{m} \leq \mathbf{l}} W_{\mathbf{m}}, \quad (3.26)$$

wobei die Relation „ \leq “ komponentenweise zu verstehen ist. Wir haben also eine hierarchische Struktur auf dem Raum $V_{\mathbf{l}}$ erzeugt, da seine Basis nun einfach aus der

Vereinigung der Basen von $W_{\mathbf{m}}$ mit $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ besteht und damit alle Basiselemente der anisotropen Räume mit niedrigerem Level enthält, aus denen er durch Hinzunahme der entsprechenden Überschusselemente einfach konstruiert werden kann. Diese Überschussbasen sind wiederum die oben vorgestellten Hutbasen, wenngleich eine geeignete Auswahl derer. Für ein gegebenes Level \mathbf{l} brauchen wir nur die Indexmenge $I_{\mathbf{l}}$ weiter einzuschränken durch

$$\{\mathbf{j} \in I_{\mathbf{l}} \mid j_k \text{ ungerade falls } l_k \neq 0; j_k \in \{0, 1\} \text{ falls } l_k = 0\}.$$

Ein isotropes Gitter entsteht durch die einheitliche Wahl aller Levelkomponenten $\mathbf{l} = (n)_{0, \dots, N-1}$.

Da wir nun auf hierarchisch geordneten Räumen arbeiten können, sind wir nicht mehr an die strikte Levelauswahl gebunden, die zu $V_{\mathbf{l}}$ führt, sondern können sie etwas freier kombinieren. Wir können statt der Relation „ $\leq \mathbf{l}$ “ Beschränkungen an verschiedene Normen dieser Multiindizes einführen, die im Fall der Maximumsnorm $\|\mathbf{l}\|_{\ell_{\infty}} := \max_{k=0}^{N-1} |l_k|$ mit

$$V_n^{(\infty)} := \bigoplus_{\|\mathbf{l}\|_{\ell_{\infty}} \leq n} W_{\mathbf{l}} \quad (3.27)$$

auf den bekannten isotropen Fall führen. Nutzen wir stattdessen die ℓ_1 -Norm $\|\mathbf{l}\|_{\ell_1} := \sum_{k=0}^{N-1} |l_k|$, so erhalten wir ein reguläres, dünnes Gitter. In dieser Arbeit wird ein reguläres, nicht-randdominantes, dünnes Gitter eingesetzt, das sich noch durch eine zusätzliche Einschränkung auszeichnet,

$$V_n^{(1)} := \bigoplus_{\substack{\|\mathbf{l}\|_{\ell_1} \leq n+1 \\ \|\mathbf{l}\|_{\ell_{\infty}} \leq n}} W_{\mathbf{l}}. \quad (3.28)$$

In Abbildung 3.3 ist diese Auswahl an Multiindizes exemplarisch für 2 Dimensionen und das Level $n = 4$ dargestellt.

3.5.2 Die Kombinationstechnik

Um nun unsere anisotropen Lösungen auf diese ausgedünnten Räume zu übertragen und damit deren Effizienz in Bezug auf Speicher und Laufzeit zu nutzen, benötigen wir noch einen entscheidenden Schritt von verschiedenen anisotropen Lösungen auf eine Dünngitterlösung. Wir verwenden die von Griebel, Schneider, Zenger [20] vorgestellte und ebenfalls von Garcke [16] beschriebene Kombinationstechnik, wobei wir die nicht-randdominante Variante einsetzen. Diese ist notwendig für verschiedene Anwendungen, in denen NEUMANN-Randbedingungen an gegenüberliegende Seiten des Gebiets angelegt werden und in einer Dimension nur aus Randpunkten bestehende Gitter zu verzerrten Lösungen oder gar zur Unlösbarkeit führen würden.

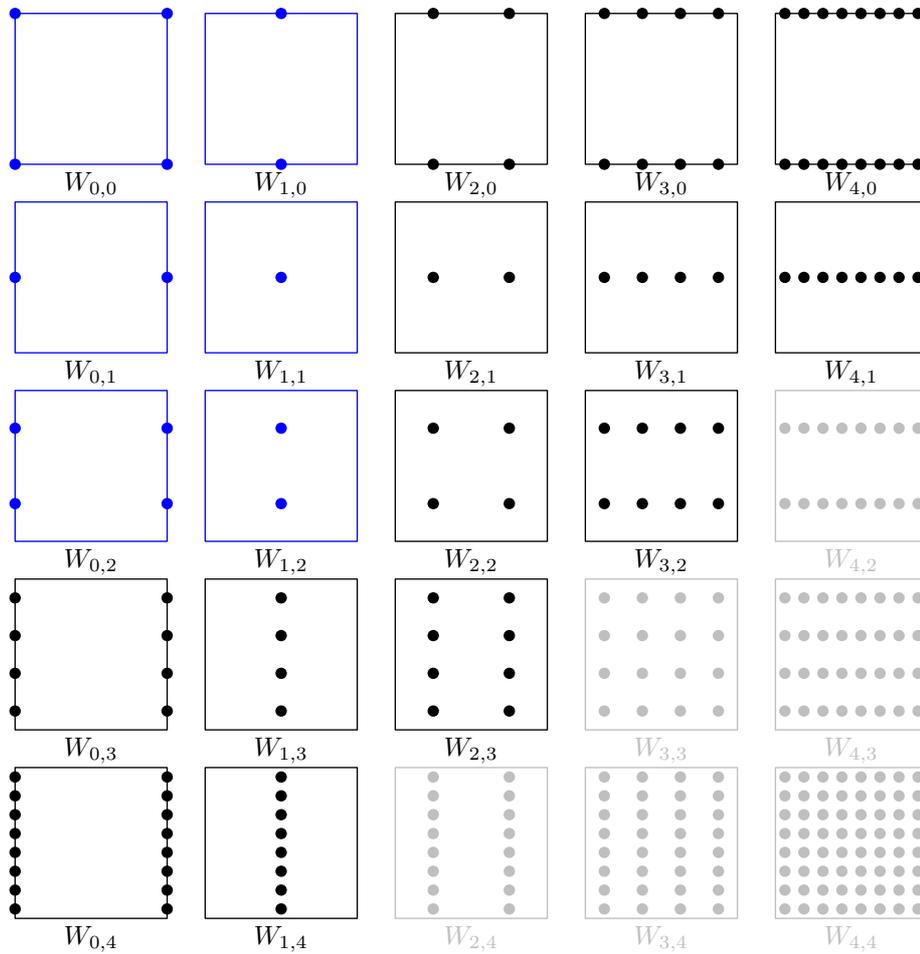


Abbildung 3.3: Die den Dünngitterraum $V_4^{(1)}$ aufspannenden hierarchischen Hutfunktionen sind dunkel dargestellt. Nimmt man die grau gekennzeichneten Räume hinzu, so erhält man den nodalen, isotropen Raum $V_4^{(\infty)}$. Die direkte Summe der blau markierten Räume ist der nodale, anisotrope Raum $V_{1,2}$.

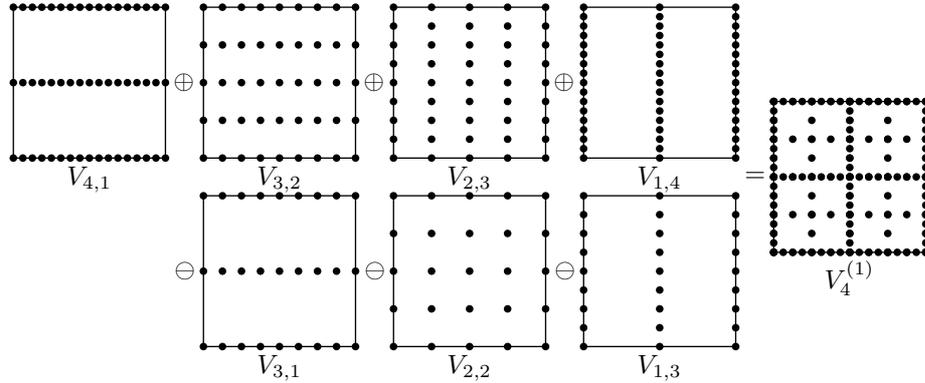


Abbildung 3.4: Die Kombinationsformel in zwei Dimensionen für das Level $n = 4$. Die Addition erfolgt in hierarchischer Darstellung.

Eine zu einem anisotropen Level \mathbf{l} im Raum $V_{\mathbf{l}}$ erzeugte Lösungsfunktion kann nach einer Basistransformation in die hierarchische Basis problemlos zu einer anderen Funktion im Raum $V_{\tilde{\mathbf{l}}}$ addiert werden, wenn man beide Funktionen als in einem höher-hierarchischen und beide Räume enthaltenden Raum betrachtet. Unser Interesse gilt dabei dem Raum $V_{\max\{\|\mathbf{l}\|_{\ell_1}, \|\tilde{\mathbf{l}}\|_{\ell_1}\}}^{(1)}$, der diese beiden Räume umfasst. So ist es nun möglich, über

$$f_n^{(1)}(\mathbf{x}) := \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{N-1}{k} \sum_{\substack{\|\mathbf{l}\|_{\ell_1} = n+N-1-k \\ \min l_k > 0}} f_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}), \quad (3.29)$$

eine Dünngitterfunktion zu definieren, die Verfügbarkeit der notwendigen, anisotropen Funktionen $f_{\mathbf{l}}$ natürlich vorausgesetzt.

Wird mit dieser Kombinationstechnik ein Interpolant einer bekannten Funktion erzeugt, so entspricht er genau dem direkt im Dünngitterraum erzeugten Interpolanten. Dies begründet die Idee der obigen Formel. Die von uns mit der Kombinationstechnik erzeugte Lösung einer partiellen Differentialgleichung entspricht dann zwar nicht mehr genau der tatsächlichen, hierarchischen Dünngitterlösung, ist aber, wie bei Griebel, Schneider, Zenger [20] verdeutlicht wird, von vergleichbarer Genauigkeit.

Diese Kombinationsformel entspricht im zweidimensionalen Raum einer Aufsummierung der anisotropen Räume auf der Subdiagonalen des Tableaus in Abbildung 3.3 und einem Abzug der Diagonalen, jeweils ohne diejenigen Ränder, für die $l_k = 0$ für mindestens ein k gelten würde. Zu beachten ist aber, dass die anisotropen Räume auf der Diagonalen der direkten Summe der Überschussräume mit geringem Multiindex entsprechen und daher keineswegs ohne Randpunkte auskommen.

Es wird lediglich sichergestellt, dass immer mindestens ein innerer Punkt vorhanden ist. Abbildung 3.4 verdeutlicht das Vorgehen noch einmal.

Konvergenzraten

Mit der Kombinationstechnik werden lediglich Lösungen auf gröberen, anisotropen Gittern erzeugt, um sie anschließend über Formel (3.29) in ein feineres, dünnes Gitter zusammensetzen. Dabei wird bei der Berechnung der einzelnen, beteiligten Lösungen eine feine Auflösung in einer Richtung durch sehr grobe Auflösungen in die restlichen Richtungen ausgeglichen. So entsteht zwar ein an vielen Stellen analog zum vollen Gitter aufgelöstes, dünnes Gitter, aber die gleichen Konvergenzraten wie für dieses sind nicht zu erwarten. Für Funktionen aus dem SOBOLEV-Raum mit dominierender, gemischter Glattheit, dessen Norm über

$$\|f\|_{H_{\text{mix}}^2}^2 := \sum_{m \leq 2} \left| \frac{\partial^{\|\mathbf{k}\|_{\ell_1}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{k}}} f \right|^2$$

definiert ist, zeigen Griebel, Schneider und Zenger [20] und Bungartz et al. [7], dass für Interpolations- und Approximationsprobleme, die von elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung herrühren, der Fehler dennoch lediglich durch einen logarithmischen Faktor beeinträchtigt wird. Ist die Approximation auf den anisotropen Gittern von der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ in der ℓ_2 -Norm, so ist die Kombinationstechnik von der Ordnung

$$\mathcal{O}(h^2 \log(h^{-1})^{N-1}). \quad (3.30)$$

Ist der ℓ_∞ -Fehler aber nur von der Ordnung $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$, wie es typischerweise bei Singularitäten der Fall ist, so wird auch der Kombinationsfehler, von dem logarithmischen Term gestört, nur von der Ordnung $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}} \log(h^{-1})^{N-1})$ sein. Eine solche Singularität wird in unseren Anwendungen zum Tragen kommen.

Kapitel 4

Anwendung auf optimale Portfolios

Die Theorie optimaler Portfolios beschäftigt sich mit der Entscheidungsfindung für Anlagestrategien. Ganz allgemein hat ein *Agent*, der auf einem *Markt* agiert, eine vielfältige Auswahl von Möglichkeiten, seinen Besitz zu wahren. Er kann ihn in feste Wertsteigerungsraten erzielende *Bonds* anlegen und damit seinen Besitz deterministisch wahren oder gar vermehren. Er kann sich aber auch dazu entschließen, ein gewisses Risiko einzugehen und volatile, d. h. schwankende Wertsteigerungsraten aufweisende *Assets* für seine Anlage wählen. Es besteht so die Möglichkeit, von überdurchschnittlichen Gewinnchancen zu profitieren, andererseits die Gefahr, herbe Verluste hinnehmen zu müssen. Des Weiteren kann der Agent auch in *Konsum* „investieren“, aus dem er zwar Nutzen zieht, den dafür aufgewendeten Betrag aber unwiderruflich vernichtet hat. Die einzelnen Begriffskonzepte werden in diesem Kapitel ausführlich erläutert.

Obwohl hier exemplarisch *ein* Agent betrachtet wird, der keine Marktmacht besitzt und daher keine Möglichkeit der Beeinflussung des Marktes hat, wird dieselbe Theorie auch in der Makroökonomie verwendet, um effiziente Allokation von Ressourcen, meist Geld, Produktionskapital oder Arbeitskraft, zu ermitteln. Dabei wird die gesamte Volkswirtschaft als uniform agierend und daher pauschal als ein Agent betrachtet, der auch manchmal der *repräsentative* Agent genannt wird.

4.1 Diskretes Modell

Im Folgenden wird zuerst ein diskretes Modell *eines einzigen* Marktes betrachtet. Die Entwicklung der Wertpapiere über diskrete Zeitpunkte sowie geeignete Approximationen werden vorgestellt, und die Konsum- und Investitionsentscheidungen des Agenten in diesem periodenhaften Umfeld werden erläutert. Der mehrdimensionale, kontinuierliche Fall ist dann die kanonische Erweiterung dieses Modells.

4.1.1 Markt

Ein Markt ist ein (nicht notwendigerweise physikalischer) Ort, an dem Waren und Geld getauscht werden können. Dabei kann sowohl ein Tausch von Gut gegen Geld

(Kauf) als auch von Gut gegen Gut (Tausch) stattfinden. Als Beispiel kann ein Börsenstandort (englisch *stock exchange* oder *stock market*) dienen, an dem nicht die eigentlichen Güter, sondern die Eigentumsrechte daran getauscht werden. Auch das für ein Gut zu zahlende Geld wechselt selten den Besitzer, gewöhnlich finden Ausgleichszahlungen in weitaus geringerem Umfang statt. Dadurch entsteht fast ein virtueller Markt.

In unserem vorliegenden Modell vereinfachen wir den realen Markt (z. B. die tatsächlich am Börsenplatz Frankfurt am Main abgeschlossenen Geschäfte) erheblich, um ihn mathematisch handhaben zu können. Es werden beim Tausch oder Kauf anfallende Zusatzkosten, so genannte Transaktionskosten (Ausgabeaufschlag, Börsenmaklercourtage etc.), und Dividenden vernachlässigt, vor allem aber werden Feinheiten beim Abschluss eines Kauf- oder Tauschvertrags nicht beachtet. So besteht in unserem Modell kein Unterschied zwischen Modalitäten beim Handel mit Gold, Öl oder der DaimlerChrysler-Aktie, auch die Bezugsquelle des Handelsguts oder die Handelspartner sind unerheblich. Einschränkungen an das Handelsvolumen sind nicht vorgesehen.

Dennoch bietet diese modellhafte Vereinfachung entscheidende Vorteile. Handelsgüter können miteinander verglichen und auf ihre Tauglichkeit geprüft werden, ein am Markt agierender Händler kann auf Grund der Modellstruktur Vor- und Nachteile besser abschätzen, qualitative Direktiven können abgeleitet werden.

Unser Modellmarkt besteht aus k Handelsgütern, die wir der Einfachheit halber alle *Aktien* bzw. *Assets* nennen, auch wenn es sich nicht unbedingt um solche handeln muss. Wir gehen aber davon aus, dass sich all diese Güter ähnlich verhalten und daher ein einheitliches Modell benutzt werden kann. Dieses Modell ist eine übliche Erweiterung der bereits im Jahr 1900 von Bachelier vorgestellten Arbeit [1] und formuliert den Aktienpreis als eine *geometrische BROWNSche Bewegung mit Drift*. Es gelten die üblichen, in 2.2 genannten Voraussetzungen an Wahrscheinlichkeitssystem und Filtration.

Definition 4.1 (WIENER-Prozess). Ein *WIENER-Prozess* ist eine stetig von der Zeit $t \in [0, T]$ abhängige Zufallsvariable, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $W(0) = 0$,
2. die Inkremente $W(t) - W(\tilde{t})$ für $0 \leq \tilde{t} < t \leq T$ sind normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $t - \tilde{t}$ (oder kürzer ausgedrückt: $W(t) - W(\tilde{t}) \sim N(0, \sqrt{t - \tilde{t}})$),
3. die Inkremente $W(t) - W(\tilde{t})$ und $W(s) - W(\tilde{s})$ sind für $0 \leq \tilde{s} < s < \tilde{t} < t < T$ unabhängig.

Damit kann ein WIENER-Prozess als $W(t) = \varepsilon \sim N(0, \sqrt{t}) = \sqrt{t}N(0, 1)$ realisiert werden. Dieser grundlegende, einem Rauschen ähnliche Prozess reicht aber bei

weitem noch nicht aus, eine Aktienbewegung nachzuahmen. Er ist lediglich der entscheidende Grundbaustein für die im Folgenden definierten, stochastischen Prozesse.

Definition 4.2 (BROWNSche Bewegung mit Drift). Seien $W(t)$ ein WIENER-Prozess und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Eine BROWNSche Bewegung mit Drift ist ein stochastischer Prozess der Form

$$Y(t) = Y(0) + at + bW(t). \quad (4.1)$$

Der Parameter a heißt *Drift*, b heißt *Varianz* des Prozesses.

Gelegentlich werden auch zeit- bzw. ortsabhängige Parameter $a(t, Y)$, $b(t, Y)$ betrachtet und als ITÔ-Prozess bezeichnet (siehe z. B. Hull [27, Kapitel 10]). Einige Autoren (z. B. Karatzas und Shreve [33]) ziehen sogar a , b als eigene, stochastische Prozesse in Betracht. Diese sind aber in der vorliegenden Arbeit nicht von Bedeutung.

Eine BROWNSche Bewegung mit Drift erfüllt auf kanonische Art und Weise die stochastische Differentialgleichung

$$dY(t) = a dt + b dW(t), \quad (4.2)$$

die eine Kurzschreibweise für das stochastische Integral

$$Y(t) = Y(t-h) + \int_{t-h}^t a dt + \int_{t-h}^t b dW(t)$$

darstellt und die Bewegung von Y vom Zeitpunkt $t-h$ nach t mit $h > 0$ modelliert. Für genauere Erläuterungen zu stochastischen Prozessen und stochastischen Differentialgleichungen sei auf die Literatur von Kwok [37, Kapitel 1] oder Seydel [59, Kapitel 1, 3] verwiesen.

Eine RIEMANN-Diskretisierung der obigen Integralgleichung würde dann wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y(t-h) + ah + b(W(t) - W(t-h)) \\ &= Y(t-h) + ah + b\sqrt{h}\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei die zweite Gleichheit aus den Eigenschaften des WIENER-Prozesses stammt und ε wiederum eine gemäß der Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz 1 gezogene Zufallszahl ist ($\varepsilon \sim N(0, 1)$). Wir haben also in (4.3) eine exakte Darstellung der eindeutigen Lösung von (4.2) erhalten.

Definition 4.3 (geometrische BROWNSche Bewegung mit Drift). Ist Y eine BROWNSche Bewegung mit Drift, so bezeichnen wir

$$e^{Y(t)}$$

als *geometrische BROWNSche Bewegung mit Drift*.

Sei nun $S(t)$ der Preis einer Aktie am betrachteten Markt zu einem Zeitpunkt t . Wir nehmen an, dass dieser Aktienpreis (oder Aktienkurs) einer geometrischen BROWNSchen Bewegung mit Drift $a := \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ und Varianz $b := \sigma$ folgt. Unter Ausnutzung von (4.3) können wir also $S(t)$ schreiben als

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{Y(t)} & (4.4) \\ &= e^{Y(0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)} \\ &= e^{Y(t-h) + (\mu - \sigma^2/2)h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon} \\ &= S(t-h)e^{(\mu - \sigma^2/2)h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der Quotient $\frac{S(t)}{S(t-h)}$ ist jetzt logarithmisch-normalverteilt, und ein positiver Startwert $S(0) > 0$ sichert die Positivität des Assetpreises für alle $t \geq 0$. Differenzieren wir nun (4.4) mit ITÔs Kettenregel (siehe Lemma 3.1), so erhalten wir für S die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t) dY(t) + S(t) \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &= S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

bzw.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t). \quad (4.7)$$

Wir können Gleichung (4.6) analog zu der Bemerkung nach Definition 4.2 als BROWNSche Bewegung mit ortsabhängiger Drift $\tilde{\mu}(S) = S\mu$ und Volatilität $\tilde{\sigma}(S) = S\sigma$ interpretieren, bleiben hier aber bei der präziser zu handhabenden Darstellung als geometrische BROWNSche Bewegung.

Gemäß Higham [26] lässt sich die exakte Zeitentwicklung (4.5) durch eine EULER- bzw. eine abgeschnittene, stochastische ITÔ-TAYLOR-Approximation der Form

$$S(t) \approx S(t-h) + S(t-h) \left(\mu h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon \right) \quad (4.8)$$

darstellen.

Wir wandeln unsere Begriffsbildung ein wenig ab und sprechen von μ nun als *Drift einer Aktie* und von σ als ihrer *Volatilität*.

Ein Wertpapier ohne stochastischen Anteil ($\sigma = 0$) nennen wir *Bond*. Er stellt eine Anlage mit deterministischer Wertentwicklung dar und ähnelt damit einem Sparbuch. Die Drift eines Bonds nennt man gewöhnlich *Zins* und bezeichnet sie mit r . Dies entspricht der natürlichen Interpretation von Verzinsung, wie im folgenden Lemma zum Ausdruck kommt.

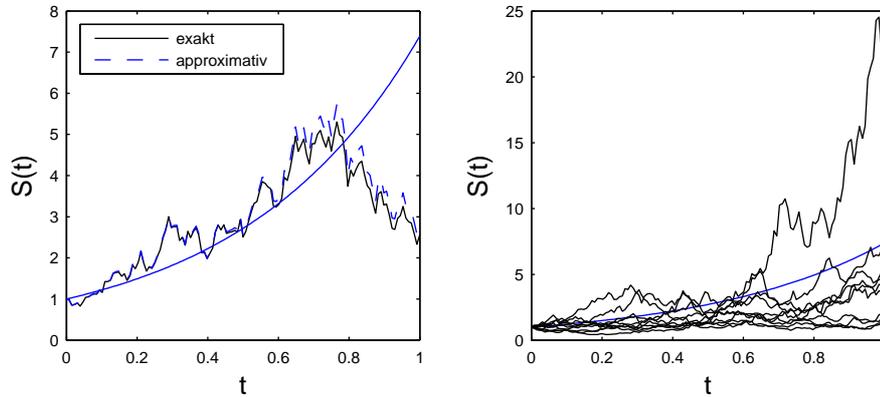


Abbildung 4.1: Geometrische BROWNSche Bewegungen mit Drift $\mu = 2$ und Volatilität $\sigma = 1$ auf dem Einheitsintervall. Links ist die Approximation (4.8) zu sehen, rechts 10 verschiedene geometrische BROWNSche Bewegungen mit denselben Parametern, zum Vergleich jeweils mit der deterministischen Entwicklung.

Lemma 4.4. Sei $\hat{r} > 0$ der Zins, d.h. Kapital K hat am Ende einer Zinsperiode der Länge 1 den Wert $(1 + \hat{r})K$. Dann ist es sinnvoll, für jeden Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ die „kontinuierliche Verzinsung“

$$e^{rt}K$$

zu betrachten, wobei $r = \ln(1 + \hat{r})$.

Beweis. Unterteilen wir die Zinsperiode in n gleiche Teile und nehmen an, dass eine Zinsausschüttung und Wiederanlage zum Ende einer jeden dieser Teilperioden möglich ist, so erfordert die Arbitragefreiheit einen Kapitalertrag von

$$(1 + \hat{r})^{\frac{1}{n}}$$

nach der ersten bzw. für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ eine Ausschüttung von

$$(1 + \hat{r})^{\frac{k}{n}}K$$

nach der k -ten Teilperiode.

Wir betrachten nun einen festen, rationalen Zeitpunkt t und wählen n so, dass ein k existiert mit

$$t = \frac{k}{n}.$$

Der Zinsertrag zum Zeitpunkt t sollte dann also

$$(1 + \hat{r})^{\frac{k}{n}} = (1 + \hat{r})^t = e^{t \ln(1 + \hat{r})}$$

betragen. Die eindeutige, stetige Vervollständigung für reelle t begründet nun die Behauptung. \square

Natürlich löst diese kontinuierliche Verzinsung die Differentialgleichung (4.6) mit $\sigma = 0$ in gewöhnlicher Form.

Man beachte, dass im Sprachgebrauch „eine Zinsrate von 5%“ üblich ist. Diese Angabe entspricht unserem \hat{r} , so dass im hier vorgestellten Modell $r \approx 0.04879$ betrachtet werden muss. Die Drifts der Aktien liegen in ähnlichen Größenordnungen.

Weiterhin sei bemerkt, dass in der Formulierung von Lemma 4.4 absichtlich $t < 0$ zugelassen ist. In diesem Fall handelt es sich um die *Abzinsung* eines Wertes auf einen früheren Zeitpunkt, was einer *exponentiellen Diskontierung* im Sinne von Definition 2.1 entspricht.

Gewöhnlich gilt $\mu > r$, da beide Parameter die erwartete Rendite beziffern und eine risikobehaftete Anlage mit einer geringeren Gewinnaussicht als der festen Verzinsung schlicht kein Kaufinteresse wecken würde. Lediglich die erhöhte Erfolgsaussicht des Assets veranlasst den Anleger dazu, ein Risiko einzugehen.

Da auf diese Weise ein Markt durch seine Aktien und die ihnen jeweils zugeordneten Driften und Volatilitäten sowie durch den Bond und seinen Zins eindeutig beschrieben ist, heißen die vorgenannten Bedingungen auch *Marktparameter*.

Der Einfachheit halber existieren im Rahmen des diskreten Marktmodells nur ein Bond und eine Aktie. Der Preis des Bonds wird mit S_0 , der Preis der Aktie mit S_1 bezeichnet, die jeweils gehaltene Stückzahl mit \mathfrak{p}_0 bzw. \mathfrak{p}_1 .

4.1.2 Investitionen und Konsum: Vermögen

Ein repräsentativer Agent kann nun auf dem im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Markt zu diskreten Zeitpunkten agieren. Dies entspricht einem „Spiel“, bei dem er im zeitlichen Abstand $h > 0$ Spielzüge ausführen kann, die aus Aktionen am Markt bestehen.

In den Spielzug zum Zeitpunkt t tritt der Agent mit einem gewissen Vermögen in Form von Aktien oder Bonds ein, die er aus dem vorhergehenden Spielzug herübergerettet hat. Diese löst er nun durch Verkauf am Markt (ohne Transaktionskosten) in Bargeld ein und erhöht (oder verliert) demnach ein in Geldeinheiten (€) gemessenes *Vermögen* X wie folgt:

$$X(t) = \mathfrak{p}_0(t-h)S_0(t) + \mathfrak{p}_1(t-h)S_1(t). \quad (4.9)$$

Gleichung (4.9) wird gewöhnlich als *Vermögensgleichung* bezeichnet.

Neben den Investitionsentscheidungen \mathfrak{p}_0 und \mathfrak{p}_1 , die die Anzahl der vom entsprechenden Asset gehaltenen Stücke angeben, kann der Agent nun noch eine dritte Entscheidung treffen, die sein Vermögen erst in einen für ihn fühlbaren Wert umwandelt: Wie viel Geld soll er für *Konsum* ausgeben? Wir nennen die zu dieser

Entscheidung gehörende Variable c . Es ist zu beachten, dass einmal für den Konsum verwendetes Geld keinen Wert mehr schafft und damit in der nächsten Runde schlicht nicht mehr zur Verfügung steht.

Des Weiteren sind negative Werte als Investitionen \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_1 zugelassen, die einen so genannten *Leerverkauf* (siehe Hull [27]) bedeuten. Dabei erhält der Agent den gegenwärtigen Wert des Assets in Geldeinheiten gegen die Verpflichtung, das Asset zu einem späteren Zeitpunkt (meist wenige Tage später, abhängig vom Börsenstandort) an den „Käufer“ zu liefern. Einschränkungen an diese Leerverkäufe sind auf verschiedenen Märkten denkbar. Negative Werte für den Konsum sind aus offensichtlichen Gründen nicht zugelassen.

Üblicherweise gilt die so genannte *Budgetbedingung*

$$X(t) = \mathbf{p}_0(t)S_0(t) + \mathbf{p}_1(t)S_1(t) + c(t), \quad (4.10)$$

die nichts anderes besagt, als dass der Agent Geld außerhalb des Marktes nur zu Konsumzwecken aufwenden kann. Um die Rolle des Konsums zu verdeutlichen, schreiben wir die Vermögensgleichung (4.9) unter Einbeziehung dieser Budgetbedingung als

$$\begin{aligned} X(t) = X(t-h) &+ \mathbf{p}_0(t-h)S_0(t) + \mathbf{p}_1(t-h)S_1(t) \\ &- \mathbf{p}_0(t-h)S_0(t-h) \\ &- \mathbf{p}_1(t-h)S_1(t-h) \\ &- \tilde{c}(t-h)h, \end{aligned} \quad (4.9a)$$

wobei wir $\tilde{c}(t) := \frac{c(t)}{h}$ gesetzt haben.

Die beiden Investitions- und die Konsumentscheidung bezeichnen wir als *kurzfristige Strategien*. Eine Festlegung auf kurzfristige Strategien für jeden Zeitpunkt und jede Vermögenshöhe nennen wir dann (globale) *Strategie*, siehe Definition 2.3. Der Agent kann nun für die folgende Runde seine kurzfristigen Strategien neu wählen, und zwar wie folgt:

- Wähle $\mathbf{p}_0(t)$, die Anzahl von Bonds, die bis zum nächsten Spielzug gehalten werden soll.
- Wähle $\mathbf{p}_1(t)$, die Anzahl von Assets, analog zum Bond.
- Wähle $\tilde{c}(t)$, die *Konsumrate* für den Zeitraum $[t, t+h]$.

Die Interpretation dieser drei Variablen erfordert besondere Aufmerksamkeit. Während es sich bei \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 um „Zustandsvariablen“ handelt, ist \tilde{c} eine Flussgröße, d. h. sie beschreibt die Durchflussgeschwindigkeit des für Konsum aufgewendeten Geldes. Dies lässt sich am einfachsten mit dem Beispiel eines Behälters vergleichen, aus dem Wasser durch einen Ablauf ausfließen kann. Die Größe und damit die Durchlässigkeit dieses Ablaufs wird dann von \tilde{c} geregelt. Die zugehörige Einheit ist also Geld/Zeit.

Schreiben wir stattdessen

$$\tilde{c}(t-h)C(t-h)h := \tilde{c}(t-h)h,$$

mit einem repräsentativen Konsumgutpreis C und, wie oben, $\tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{h}$, so können wir die Schreibweise bzw. Interpretation an die „Stückzahlen“ \mathbf{p}_i anpassen. Es werden genau \mathbf{c} Stück des repräsentativen Konsumguts „gehalten“, ein Wiederverkauf kann nicht stattfinden, und die Vermögensgleichung lautet

$$\begin{aligned} X(t) = X(t-h) &+ \mathbf{p}_0(t-h) \left(S_0(t) - S_0(t-h) \right) \\ &+ \mathbf{p}_1(t-h) \left(S_1(t) - S_1(t-h) \right) \\ &- \tilde{c}(t-h)C(t-h)h. \end{aligned} \quad (4.9b)$$

Um nicht zusätzlich Inflationseffekte und damit Schwankungen im Preis des Konsumguts C betrachten zu müssen, normieren wir die jeweiligen Preise aller anderen Güter in unserem Modell auf den Preis eines repräsentativen Konsumguts. Dafür bietet sich die Währung € an, in deren Einheiten wir Vermögen, Assets und Konsum messen. Vereinfacht ausgedrückt bestreiten wir unseren Lebensunterhalt von € -Stücken, deren Preis immer der eingepreiste Wert ist und damit keinen Schwankungen unterliegt. C ist also 1 und Gleichungen (4.9), (4.9a) und (4.9b) sind identisch.

4.1.3 Alternative Formulierungen

Wir geben nun zwei alternative, aber gleichwertige Formulierungen für die oben aufgestellte Vermögensgleichung (4.9) und die Budgetbedingung (4.10) an. Diese unterscheiden sich hauptsächlich in der Darstellung der vom Konsumenten zu bestimmenden kurzfristigen Strategien.

Formulierung in Geldeinheiten

Nachdem wir oben die Stückzahl der zu kaufenden Assets bestimmt haben, bestimmen wir nun die *Menge Geldes*, die in das entsprechende Asset investiert wird. Wir schreiben also

$$p_i(t) := \mathbf{p}_i(t)S_i(t), \quad c(t) := \mathbf{c}(t)C(t).$$

Zusätzlich betrachten wir nicht mehr die Wertdifferenzen des Assets zwischen verschiedenen Zeitpunkten, sondern seine *Wertsteigerungsrate*

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i^h(t) &:= \frac{S_i(t) - S_i(t-h)}{S_i(t-h)} \\ &= e^{(\mu - \sigma^2/2)h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon} - 1 \\ &\approx \mu h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon, \end{aligned}$$

nach (4.5) und der stochastischen ITÔ-Version der TAYLOR-Approximation. Diese Größe ist auch unter den Begriffen *Ertragsrate*, *Rendite* oder *Rücklaufquote* (engl. *rate of return*) bekannt und erzeugt eine Vermögensgleichung der Form

$$X(t) = X(t-h) + p_0(t-h)\mathfrak{A}_0^h(t) + p_1(t-h)\mathfrak{A}_1^h(t) - \tilde{c}(t-h)h. \quad (4.11)$$

Die analog zu \mathfrak{A} definierte Steigerungsrate des Konsumgutpreises \mathfrak{C} ist wie oben besprochen 0, braucht aber wegen der Unveräußerbarkeit der bereits konsumierten Güter nicht betrachtet zu werden. Die Budgetbedingung wird zu

$$X(t) = p_0(t) + p_1(t) + \tilde{c}(t)h. \quad (4.12)$$

Formulierung in Vermögensanteilen

Wir bestimmen nun den *Anteil* des Vermögens, der in das entsprechende Asset investiert wird. Wir schreiben also

$$\varphi_i(t) := \frac{p_i(t)}{X(t)}, \quad \gamma(t) := \frac{c(t)}{X(t)}$$

und erhalten eine Vermögensgleichung der Form

$$X(t) = X(t-h) + X(t-h) \left(\varphi_0(t-h)\mathfrak{A}_0^h(t) + \varphi_1(t-h)\mathfrak{A}_1^h(t) - \tilde{\gamma}(t-h)h \right), \quad (4.13)$$

wiederum mit $\tilde{\gamma}(t) := \frac{\gamma(t)}{h}$. Die Budgetbedingung wird zu

$$1 = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \tilde{\gamma}(t)h. \quad (4.14)$$

Aus der Vermögensgleichung (4.13) ersehen wir, dass es sich bei dem Vermögensprozess um eine geometrische BROWNSche Bewegung handelt. Dies wird auch im folgenden, kontinuierlichen Modell so bleiben.

4.2 Kontinuierliches Modell

Aus dem im vorhergehenden Kapitel dargestellten, diskreten Modell wird nun ein kontinuierliches Modell hergeleitet. Dabei folgen wir in weiten Zügen der Darstellung in Korn [35], betrachten aber beliebige Dimensionen.

4.2.1 Märkte

Wir betrachten nunmehr N gleich strukturierte, aber verschiedene Märkte, auf denen der Konsument jeweils in $n_k + 1$ Assets mit jeweiligen Preisen $S_{k i_k}(t)$ investieren kann. Auf jedem der N Märkte lassen wir das erste Asset als Bond fungieren, es

bekommt also die Bedeutung einer risikolosen Investition. Innerhalb des Marktes k bedeutet das für jedes Asset $i_k = 1, \dots, n_k$ in Erweiterung von (4.7)

$$\frac{dS_{ki_k}(t)}{S_{ki_k}(t)} = \mu_{ki_k} dt + \sum_{j_k=0}^{m_k-1} \sigma_{ki_k j_k} dW_{kj_k}(t) + \sum_{l \neq k} \sum_{i_l=0}^{m_l-1} \sigma_{ki_k l_i} dW_{li_l}(t) \quad (4.15)$$

und für $i_k = 0$

$$\frac{dS_{k0}(t)}{S_{k0}(t)} = r_k dt.$$

Dabei tauchen m_k -dimensionale WIENER-Prozesse $\mathbf{W}_k(t)$ zusammen mit so genannten *Korrelationsmatrizen* σ_{kl} auf. Für die Wertentwicklung eines Assets spielen also nicht nur die WIENER-Prozesse der restlichen Assets desselben Marktes eine Rolle, sondern darüber hinaus auch die WIENER-Prozesse sämtlicher Assets der übrigen Märkte. Wir nehmen im Folgenden immer $n_k = m_k$ für alle k an, die betrachteten Märkte sind also vollständig im Sinn der folgenden Definition.

Definition 4.5 (Vollständigkeit). Ein Markt $\mathbf{S}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt (dynamisch) vollständig, falls es für jede nichtnegative, F_T -messbare Zufallsvariable B und jeden Konsumprozess $c(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ und einen Portfolioprozess $\mathbf{p}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für den zugehörigen Vermögensprozess $X(t)$ gilt

$$X(0) \leq x \quad \text{und} \quad X(T) = B.$$

Für den Zeitpunkt $t = 0$ benötigen wir natürlich noch Startwerte $\mathbf{S}_0(0), \dots, \mathbf{S}_{N-1}(0)$. Da eine risikolose Festanlage aber oft in beliebigem Betrag getätigt werden kann, können wir auch hier, analog zur Argumentation beim Preis des Konsumguts in Kapitel 4.1, $S_{k0} = 1$ für alle Märkte k annehmen. Die Drift für S_{k0} heißt wieder *Zins des Marktes* k .

Bemerkung. Wir können die Notation vereinfachen, indem wir Gleichung (4.15) als

$$d\mathbf{S}(t) = \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{S}(t)) dt + \bar{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{S}(t)) d\mathbf{W}(t)$$

auffassen, mit $\bar{\mu}_{ki_k}(\mathbf{x}) = \mu_{ki_k} x_{ki_k}$, $\bar{\sigma}_{ki_k l_i}(\mathbf{x}) = \sigma_{ki_k l_i} x_{ki_k}$, $\bar{\sigma}_{kl}(\mathbf{x}) = (\bar{\sigma}_{ki_k l_i}(\mathbf{x}))_{i_k, i_l}$ und

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{00}(\mathbf{x}) & \dots & \bar{\sigma}_{1, N-1}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\sigma}_{N-1, 1}(\mathbf{x}) & \dots & \bar{\sigma}_{N-1, N-1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Wir möchten allerdings den Charakter der einzelnen Märkte beibehalten, um Mehrdimensionalität in Form von Transferbeschränkungen zwischen den Märkten einfacher handhaben zu können.

Wir leiten jedoch mit einer ähnlichen Matrix ein mehrdimensionales Analogon zur geometrischen BROWNSchen Bewegung in Gleichung (4.4) für die Assetprozesse in (4.15) mit Hilfe der mehrdimensionalen ITÔ-Kettenregel her. Dazu betrachten wir die *Volatilitätsmatrix* sämtlicher Assets auf allen Märkten, bestehend aus den Korrelationsmatrizen,

$$\Sigma := (\sigma_{k_i k_l})_{k_i, k_l}$$

und nehmen, wie bei allen Marktmodellen üblich, an, dass die Kovarianzmatrix $\Sigma \Sigma^T$ positiv definit ist. Um mit den Voraussetzungen von Satz 3.2 konsistent zu bleiben, fordern wir sogar ihre Elliptizität. Setzen wir nun die $\sum_{k=0}^{N-1} n_k$ -dimensionale BROWNSche Bewegung

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Y}(0) + \left(\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} ((\Sigma \Sigma^T)_{k_i k_i})_{k_i} \right) t + \Sigma \mathbf{W}(t)$$

an und betrachten die *mehrdimensionale geometrische BROWNSche Bewegung* $(e^{Y_{01}(t)}, \dots, e^{Y_{N-1, n_{N-1}}(t)})$, so zeigt sich mit einer Anwendung des ITÔ-Lemmas 3.1, wenn dort $N = 1$ (betrachteter Markt) und $M = N$ (Anzahl aller Märkte) gesetzt wird,

$$\begin{aligned} d(e^{Y_{k_i k}(t)}) &= \left(\left(\mu_{k_i k} - \frac{1}{2} (\Sigma \Sigma^T)_{k_i k_i} \right) e^{Y_{k_i k}(t)} + \frac{1}{2} \sum_{l, i_l} \sigma_{k_i k_l}^2 e^{Y_{k_i k}(t)} \right) dt \\ &\quad + e^{Y_{k_i k}(t)} \sum_{l, i_l} \sigma_{k_i k_l} dW_{l_i}(t) \\ &= e^{Y_{k_i k}(t)} \left(\mu_{k_i k} dt + \sum_{l, i_l} \sigma_{k_i k_l} dW_{l_i}(t) \right), \end{aligned}$$

dass Gleichung (4.15) von

$$S_{k_i k}(t) := e^{Y_{k_i k}(t)} \tag{4.16}$$

erfüllt wird. Wie in [18] nachgelesen werden kann, ist es auch der einzige stochastische Prozess, der (4.15) erfüllt.

4.2.2 Investitionen und Konsum

Auf jedem der N Märkte müssen nun Investitions- und Konsumententscheidungen entsprechend der in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Konzepte getroffen werden. Wir erhalten also je Markt eine Budgetbedingung.

Betrachten wir nun aber auf einem Markt k den kontinuierlichen Fall $h \rightarrow 0$, so verschwindet in jeder der drei Formulierungen der Budgetbedingung (4.10), (4.12) und (4.14) der letzte Term. Dieser enthält jeweils den Konsum, so dass wir nur noch

Restriktionen an die Investitionen in Form von

$$\begin{aligned} X_k(t) &= \sum_{i_k=0}^{n_k} \mathbf{p}_{ki_k}(t) S_{ki_k}(t), \\ X_k(t) &= \sum_{i_k=0}^{n_k} p_{ki_k}(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

und

$$1 = \sum_{i_k=0}^{n_k} \varphi_{ki_k}(t)$$

behalten.

Der Konsum fließt aber sehr wohl, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, in die Vermögensgleichung mit ein.

Wir bezeichnen nun, je nach Formulierung, eine Festlegung auf $(\mathbf{p}_k(t, \mathbf{x}), \tilde{\mathbf{c}}_k(t, \mathbf{x}))$, $(\mathbf{p}_k(t, \mathbf{x}), \tilde{c}_k(t, \mathbf{x}))$ oder $(\varphi_k(t, \mathbf{x}), \tilde{\gamma}_k(t, \mathbf{x}))$ für alle Zeitpunkte $t \in I$ als Strategie in Markt k und folglich

$$\mathcal{A} := \{(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{c}}) : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+\sum_{k=0}^{N-1} n_k} \times \mathbb{R}_+^N\}$$

als die Menge aller Strategien. Für die anderen Formulierungen definieren wir diese Menge analog. Ein $(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{c}}) \in \mathcal{A}$ kann über $\mathbf{p}(t, \mathbf{X}(t))$, $\tilde{\mathbf{c}}(t, \mathbf{X}(t))$ zum stochastischen Prozess werden. Es handelt sich dann um eine Strategie in Feedback-Form. Es mag sich aber auch herausstellen, dass Strategien $(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{c}})$ nur von t oder nur von \mathbf{X} abhängen.

Um die Anhäufung unendlicher Schulden auszuschließen, führen wir eine untere Schranke an das Vermögen ein. Diese Schranke bedeutet den *Bankrott*. Wie an der Folgerung in Abschnitt 2.2 gesehen werden kann, erschließen sich aus dieser Gebietsbeschränkung für \mathbf{X} auch sofort Randwerte für die in 4.2.4 aufgestellte Wertfunktion. Ein Bankrott ist bindend, es dürfen keine Volatilität erzeugenden Geschäfte mehr abgeschlossen werden, und da Geldanleihe nur zu demselben Zinssatz wie eine Festanlage getätigt werden kann, ist im weiteren Verlauf kein Gewinn und daher kein Konsum mehr möglich. Wir schränken \mathcal{A} als die Menge der *zulässigen* Strategien also weiter ein,

$$\mathcal{A} := \{(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{c}}) : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+\sum_{k=0}^{N-1} n_k} \times \mathbb{R}_+^N \mid \mathbf{X}(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in I\}. \quad (4.18)$$

Die Ungleichung $\mathbf{X} \geq 0$ ist komponentenweise zu verstehen.

4.2.3 Mehrdimensionales Vermögen mit Transfer

Wir verkontinuierlichen nun die Vermögensgleichungen (4.9b), (4.11) und (4.13) auf einem der N Märkte. Dazu führen wir zuerst $X_k(t)$ für eine geeignet gewählte Partition $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ des Intervalls I auf seinen Startwert $X_k(0)$ zurück:

$$X_k(t) = X_k(0) + \sum_{i_k=0}^{n_k} \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_{ki_k}(t_{j-1}, \mathbf{X}(t_{j-1})) \left(S_{ki_k}(t_j) - S_{ki_k}(t_{j-1}) \right) - \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{c}}_k(t_{j-1}, \mathbf{X}(t_{j-1})) C(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}). \quad (4.19)$$

Definieren wir nun noch $h_j := t_j - t_{j-1}$ und $h := \max_j h_j$, die Feinheit der Partition, so erkennen wir für $h \rightarrow 0$ in Gleichung (4.19), wie in Evans [12, Kapitel 4] ausführlich beschrieben, genau die RIEMANNsche Approximationsumme des stochastischen ITÔ-Integrals

$$X_k(t) = X_k(0) + \sum_{i_k=0}^{n_k} \int_0^t \mathbf{p}_{ki_k}(s, \mathbf{X}(s)) dS_{ki_k}(s) - \int_0^t \tilde{\mathbf{c}}_k(s, \mathbf{X}(s)) C(s) ds \quad (4.20)$$

bzw. der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_k(t) = \sum_{i_k=0}^{n_k} \mathbf{p}_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) dS_{ki_k}(t) - \tilde{\mathbf{c}}_k(t, \mathbf{X}(t)) C(t) dt \quad (4.21)$$

wieder. Dies ist eine erste Version der kontinuierlichen Vermögensgleichung in mehreren Dimensionen in der Formulierung mit Stückzahlen. Die Formulierungen in Geldeinheiten und in Vermögensanteilen lauten

$$X_k(t) = X_k(0) + \sum_{i_k=0}^{n_k} \int_0^t p_{ki_k}(s, \mathbf{X}(s)) \frac{dS_{ki_k}(s)}{S_{ki_k}(s)} - \int_0^t \tilde{\mathbf{c}}_k(s, \mathbf{X}(s)) ds, \quad (4.22)$$

$$dX_k(t) = \sum_{i_k=0}^{n_k} p_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) \frac{dS_{ki_k}(t)}{S_{ki_k}(t)} - \tilde{\mathbf{c}}_k(t, \mathbf{X}(t)) dt \quad (4.23)$$

und

$$X_k(t) = X_k(0) + \sum_{i_k=0}^{n_k} \int_0^t \varphi_{ki_k}(s, \mathbf{X}(s)) X_k(s) \frac{dS_{ki_k}(s)}{S_{ki_k}(s)} - \int_0^t \tilde{\gamma}_k(s, \mathbf{X}(s)) X_k(s) ds, \quad (4.24)$$

$$\frac{dX_k(t)}{X_k(t)} = \sum_{i_k=0}^{n_k} \varphi_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) \frac{dS_{ki_k}(t)}{S_{ki_k}(t)} - \tilde{\gamma}_k(t, \mathbf{X}(t)) dt. \quad (4.25)$$

Der so erzeugte Vermögensprozess ist also ein von den Strategien kontrollierter, stochastischer Prozess.

In unserem hier vorgestellten, mehrdimensionalen Modell sollen nun auch Transferbeschränkungen eine Rolle spielen. Zu diesem Zweck führen wir Transferterme ein, die einen monetären, paarweisen Transfer zwischen den Märkten beschreiben. Sie gleichen in ihrer Interpretation dem Konsum, es handelt sich hierbei auch um Flussvariablen (siehe Seite 59), und sie werden analog behandelt:

$$\begin{aligned} dX_k(t) = & \sum_{i_k=0}^{n_k} p_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) dS_{ki_k}(t) - \tilde{c}_k(t, \mathbf{X}(t))C(t) dt \\ & + \sum_{l \neq k} \tilde{t}_{kl}(t, \mathbf{X}(t)) dt - \sum_{l \neq k} \tilde{t}_{lk}(t, \mathbf{X}(t)) dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die Transferstrategie \tilde{t}_{kl} für $k \neq l$ ist der in Konsumeinheiten (siehe Bemerkung am Ende von Unterabschnitt 4.1.2) gemessene Geldfluss, der von Markt l nach Markt k transferiert wird. Dieser Transfer ist schiefsymmetrisch, es gilt natürlich $\tilde{t}_{lk} = -\tilde{t}_{kl}$. Wir erhalten also $\frac{N(N-1)}{2}$ weitere Kontrollen, die das mehrdimensionale Vermögen beeinflussen. Sie werden in einer oberen Dreiecksmatrix ohne Diagonale abgelegt: $\tilde{\mathfrak{T}} = (\tilde{t}_{kl})_{l > k}$. Einschränkungen an diesen Transfer, bedingt etwa durch das Ausnutzen von Steuervorteilen oder durch Transferbeschränkungen seitens einer für verschiedene Märkte zuständigen Regierung, sind möglich. Auch die Entwicklung von Wechselkursen könnte für die Gestalt von \tilde{t}_{kl} eine Rolle spielen. Ebenso lässt sich nicht-transferierbares Produktionskapital, wie es in Winschel [64] modelliert wird, in diese Transferbeschränkung einbinden.

Die weiteren Formulierungen lauten

$$\begin{aligned} dX_k(t) = & \sum_{i_k=0}^{n_k} p_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) \frac{dS_{ki_k}(t)}{S_{ki_k}(t)} - \tilde{c}_k(t, \mathbf{X}(t)) dt \\ & + \sum_{l \neq k} \tilde{t}_{kl}(t, \mathbf{X}(t)) dt \end{aligned} \quad (4.27)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dX_k(t)}{X_k(t)} = & \sum_{i_k=0}^{n_k} \varphi_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) \frac{dS_{ki_k}(t)}{S_{ki_k}(t)} - \tilde{\gamma}_k(t, \mathbf{X}(t)) dt \\ & + \sum_{l \neq k} \tilde{\tau}_{kl}(t, \mathbf{X}(t)) dt. \end{aligned} \quad (4.28)$$

An Gleichung (4.28) erkennen wir den Charakter einer geometrischen BROWNSchen Bewegung für das Vermögen X_k eines jeden Marktes k . Dennoch werden wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels die zweite Formulierung in Geldeinheiten (4.27) weiterverfolgen.

Bemerkung. Die Einführung der Transferterme lässt unsere Budgetbedingung (4.17) unverändert, so dass wir bei bekanntem Vermögen \mathbf{x} die Dimension der Kontrolle \mathbf{p}_k in jedem Markt um 1 reduzieren können:

$$p_{k0}(t, \mathbf{x}) = x_k - \sum_{i_k=1}^{n_k} p_{ki_k}(t, \mathbf{x}). \quad (4.29)$$

Fassen wir die Kontrollen $\mathbf{p}(t, \mathbf{x})$, $\tilde{\mathbf{c}}(t, \mathbf{x})$ und $\tilde{T}(t, \mathbf{x}) = (\tilde{t}_{kl}(t, \mathbf{x}))_{l>k}$ nun in einer Kontrolle $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ zusammen und schreiben dann in Übereinstimmung mit dieser Bemerkung

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) := & (\tilde{c}_0, \underbrace{p_{01}, \dots, p_{0n_0}}_{=: \mathbf{p}_0}, \tilde{c}_1, \underbrace{p_{11}, \dots, p_{1n_1}}_{=: \mathbf{p}_1}, \dots, \\ & \tilde{c}_{N-1}, \underbrace{p_{N-1,1}, \dots, p_{N-1,n_{N-1}}}_{=: \mathbf{p}_{N-1}}, \tilde{t}_{1,2}, \dots, \tilde{t}_{N-1,N})(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

so stellen wir fest, dass die einzig zu beachtende Beschränkung dieser Strategie $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ in einer Schranke für $\tilde{c}_k(t, \mathbf{x})$ für alle k , und für alle Punkte (t, \mathbf{x}) gleichmäßig, durch 0 nach unten besteht:

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{A} = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N + \sum_{k=0}^{N-1} n_k} \mid a_{k + \sum_{l=0}^{k-1} n_l} \geq 0 \ \forall k = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Eigentlich ist auch diese Bedingung nicht notwendig, um sicherzustellen, dass X_k für jeden Markt nicht negativ wird, da es sich ja um eine geometrische BROWNSche Bewegung mit nicht-negativem Anfangswert handelt. Es scheint trotzdem augenscheinlich sinnvoll, negativen Konsum auszuschließen.

Wir lösen nun in (4.27) den $\frac{dS}{S}$ -Term auf und erhalten

$$\begin{aligned} dX_k(t) = & \left(X_k(t) - \sum_{i_k=1}^{n_k} p_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) \right) r_k dt \\ & + \sum_{i_k=1}^{n_k} p_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) \left(\mu_{ki_k} dt + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{i_l=0}^{m_l-1} \sigma_{ki_k l i_l} dW_{l i_l}(t) \right) \\ & + \left(-\tilde{c}_k(t, \mathbf{X}(t)) + \sum_{l \neq k} \tilde{t}_{kl}(t, \mathbf{X}(t)) \right) dt \end{aligned}$$

sollte daher auch den üblichen Annahmen an Präferenzstrukturen, die in Definition 2.2 erwähnt werden, gehorchen. Wir verdeutlichen die unterschiedlichen Rollen der Zeit- und Raumvariablen und der Kontrolle durch eine klarere Trennung mit einem Semikolon. Die Kontrolle „parametrisiert“ hier quasi die Funktion J :

$$J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}) := \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\beta(s-t)} u_1(s, \tilde{\mathbf{c}}(s, \mathbf{X}_{\mathbf{a}}(s))) ds + e^{-\beta(T-t)} u_2(\mathbf{X}_{\mathbf{a}}(T)) \mid \mathbf{X}_{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{x} \right]. \quad (4.32)$$

Das Subskript $\mathbf{X}_{\mathbf{a}}$ weist noch einmal darauf hin, dass es sich beim Vermögen um einen kontrollierten Prozess handelt.

Die Definition der Wertfunktion führt nun direkt auf das mehrdimensionale, *zeitseparierende Nutzenmaximierungsproblem*

$$v(t, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} J(t, \mathbf{x}; \mathbf{a}). \quad (4.33)$$

Wie in Unterabschnitt 2.2 bereits bemerkt, ist diese Wertfunktion auch wohldefiniert. Für $t^* \in [t, T]$ erhalten wir das BELLMAN-Prinzip (vgl. (3.14))

$$v(t, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^{t^*} e^{-\beta(s-t)} u_1(s, \tilde{\mathbf{c}}(s, \mathbf{X}_{\mathbf{a}}(s))) ds + e^{-\beta(t^*-t)} v(t^*, \mathbf{X}_{\mathbf{a}}(t^*)) \mid \mathbf{X}_{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{x} \right],$$

und mit Sätzen 3.2 und 3.3 kann die zugehörige HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-Gleichung (3.15) aufgestellt werden,

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} & \left(u_1(t, \tilde{\mathbf{c}}(t, \mathbf{x})) - \beta v(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) \right. \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k r_k + \sum_{i_k=1}^{n_k} p_{ki_k}(t, \mathbf{x}) (\mu_{ki_k} - r_k) - \tilde{c}_k(t, \mathbf{x}) \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{l \neq k} \tilde{t}_{kl}(t, \mathbf{x}) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{i_k=1}^{n_k} \sum_{i_l=1}^{n_l} \sum_{m, i_m} p_{ki_k}(t, \mathbf{x}) \sigma_{ki_k mi_m} \sigma_{li_l mi_m} p_{li_l}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
 &= \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \left(u_1(t, \tilde{\mathbf{c}}(t, \mathbf{x})) - \beta v(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, \mathbf{x}) \right. \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \tilde{G}_{kl}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right)
 \end{aligned}$$

für alle $t \in I$, zusammen mit der Endbedingung

$$v(T, \mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}). \quad (4.35)$$

Eine Transformation dieser Gleichung, wie sie analog zur BLACK-SCHOLES-Differentialgleichung denkbar wäre, die ebenfalls eine Reaktions-Konvektions-Diffusions-Gleichung ist und auf die Wärmeleitungsgleichung transformiert werden kann, ist hier auf Grund der Zeitabhängigkeit der Konvektions- und Diffusionskoeffizienten leider nicht möglich.

Randwerte

Randbedingungen ergeben sich aus den Einschränkungen an das Vermögen (4.18) und aus der Vermögensentwicklung (4.30), wie in Abschnitt 3.4 bereits beschrieben. Ein absoluter Bankrott schließt weitere Geschäftstätigkeiten in Assets aus, um Volatilität im Vermögen zu beseitigen, verhindert damit zukünftigen Konsum, da auch aus keinem anderen Markt dafür Geld abgezogen werden kann, und führt zu dem stationären Zustand

$$v(t, \mathbf{0}) = 0. \quad (4.36)$$

Für die Ränder $X_k \rightarrow \infty$ für ein k setzen wir auf Grund der Nutzenstruktur des Funktionals (4.32), siehe auch Platen [55] oder Merton [45, Theorem IV], die NEUMANN-Bedingungen

$$\lim_{X_k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial X_k} v(t, \mathbf{X}) = 0.$$

Die übrigen Ränder $X_k = 0$ für ein k werden entweder im Falle der nach Definition 2.2 angeführten CRRA-Nutzenfunktion mit der willkürlichen DIRICHLET-Bedingung

$$v(t, \mathbf{X}) = 0, \quad X_k = 0 \text{ für ein } k,$$

ausgestattet oder im Fall der CARA-Nutzenfunktion mit der besser gerechtfertigten NEUMANN-Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial X_k} v(t, \mathbf{X}) = 1 - \eta, \quad X_k = 0 \text{ für ein } k.$$

Dieser Randfall erfordert zusätzlich eine eingehendere Betrachtung der Koeffizienten der Gleichung (4.34). Ist auf einem Markt k kein Vermögen mehr vorhanden, $X_k(t) = 0$, so darf auf diesem Markt kein volatiles Asset mehr gehalten werden. Dies kann sofort an der Vermögensentwicklung (4.30) abgelesen werden. Ist dort $p_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) \neq 0$ für ein i_k , so hat der WIENER-Prozess Einfluss auf die Bewegung von X_k , und mit positiver Wahrscheinlichkeit ist dann $X_k(t + \varepsilon) < 0$ für ein $\varepsilon > 0$. Da das eine unzulässige Strategie bedeuten würde, muss an dieser Stelle $p_{ki_k}(t, \mathbf{X}(t)) = 0$ für alle i_k gelten. Das bedeutet aber, dass die Matrix $G(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t)))$ und damit auch die Diffusionsmatrix \bar{G} in der HJB-Gleichung singulär wird, wie auch der Beweis von Lemma 4.6 verdeutlicht. Da eine Anleihe nicht gegenfinanziert werden kann, muss der Konsum auf diesem Markt dann einzig aus Transferleistungen von anderen Märkten bestritten werden, so dass sich auch die Konsum- und Transferterme im Konvektionskoeffizienten für k auslöschen. Dieses Verhalten sollte beim Lösungsversuch immer im Blickfeld bleiben.

Bedingungen erster Ordnung

Die Maximumsbedingung 1. Ordnung für \tilde{c} lautet

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial c_k} u_1(t, \tilde{c}) - \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right)_k,$$

die wegen der strikten Konkavität von u_1 auch hinreichend ist. Die Bedingung 1. Ordnung für \tilde{t} führt zu einer Vereinheitlichung der Wertstruktur zwischen den Dimensionen,

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_l} v(t, \mathbf{x}) \right)_{k,l},$$

und die Maximumsbedingung für \mathbf{p} ist

$$0 = \left((\mu_{ki_k} - r_k) \frac{\partial}{\partial x_k} v(t, \mathbf{x}) + \sum_{l, i_l} \sum_{m, i_m} \sigma_{ki_k m i_m} \sigma_{li_l m i_m} p_{li_l} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right)_{ki_k}.$$

Die zweite, sich durch \tilde{t} ergebende Bedingung ist neu. Sie ist als Ausgleich des *Grenz- oder marginalen Nutzens* zu verstehen, der die Änderung der Nutzenhöhe in Bezug setzt zu der Menge des Guts, aus dem Nutzen gezogen wird. Mathematisch ist er nichts anderes als die erste Ableitung der Nutzenfunktion. Der Grenznutzen gleicht sich auf allen Märkten an, weil so lange von einem Markt in den anderen transferiert wird, bis der Zugewinn auf dem zweiten den Verlust auf dem ersten nicht mehr übersteigt. Der Punkt, an dem ein Transfer keinen zusätzlichen Nutzen mehr schafft, ist erreicht, wenn der Grenznutzen jeweils paarweise ausgeglichen ist. Diese natürliche Bedingung untermauert die Interpretation auch der mehrdimensionalen Wertfunktion als Nutzenstruktur.

Der Anwender könnte nun versucht sein, diese Bedingungen 1. Ordnung in Gleichung (4.34) einzusetzen und so die Maximierung innerhalb der HJB-Gleichung zu eliminieren. Er würde dabei aber eine beherrschbare Nichtlinearität eintauschen gegen eine sehr viel aufwändiger zu behandelnde Nichtlinearität in Form von gemischten Termen, die sowohl Invertierungen der HESSE-Matrix der gesuchten Funktion als auch Auswertungen der inversen Nutzenfunktion an der ersten Ableitung der Lösung enthalten (vergleiche (4.38)). Neben einer fehlenden Lösbarkeitstheorie für die dann entstehende, hochgradig nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist auch eine Linearisierung derselben zu ihrer numerischen Behandlung nicht offensichtlich von Vorteil. Semi-implizite Verfahren könnten dann zur Anwendung kommen.

Trotzdem hat Merton [45] auf genau diesem Weg eine Lösung für das eindimensionale Problem der Wahl optimaler Portfolios mit einer speziellen Nutzenfunktion analytisch gefunden. Die Herleitung dieser Lösung demonstriert das folgende Beispiel.

Beispiel 4.1 (1 Dimension). Wir betrachten nun das Problem auf *einem* Markt und nehmen *konstante, exponentielle Diskontierung* an. Dabei folgen wir hauptsächlich der Darstellung in Korn [35, Abschnitt 3.3].

Die Assets gehorchen

$$\begin{aligned} \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} &= \mu_i dt + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{ij} dW_j(t), \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} &= r dt \end{aligned}$$

mit einem n -dimensionalen WIENER-Prozess, der Markt ist also vollständig. Für die Korrelationsmatrix $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j}$ gilt: $\sigma\sigma^T$ ist positiv definit. Das Vermögen entwickelt sich gemäß

$$dX(t) = \left(X(t)r(t) + \mathbf{p}(t, X(t))^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) - \tilde{c}(t, X(t)) \right) dt + \mathbf{p}(t, X(t))^T \sigma d\mathbf{W}(t).$$

Wir gebrauchen die gängigen CRRA-Nutzenfunktionen

$$u_1(t, \tilde{c}) = u_2(\tilde{c}) := \frac{1}{\eta} \tilde{c}^\eta$$

mit relativem Risikoaversionsmaß $1 - \eta \in (0, 1)$. Die HJB-Gleichung (4.34) lautet dann

$$\begin{aligned} 0 = -\beta v(t, x) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + \max_{\tilde{c}, \mathbf{p}} \left(\frac{\tilde{c}^\eta}{\eta} + (xr + \mathbf{p}^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) - \tilde{c}) \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \sigma \sigma^T \mathbf{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) \right), \quad (4.37) \end{aligned}$$

und für die an der Stelle (t, x) optimalen $\tilde{c}(t, x)$ und $\mathbf{p}(t, x)$ ergeben sich

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t, x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right)^{\frac{1}{\eta-1}}, \\ \mathbf{p}(t, x) &= -(\sigma\sigma^T)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) \frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t, x)}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)}.\end{aligned}$$

Werden diese Werte in (4.37) eingesetzt, so entsteht die konkrete, hochgradig nicht-lineare partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}} - \beta v(t, x) + \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) \\ &\quad + \left(xr - (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r)^T (\sigma\sigma^T)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) \frac{\frac{\partial}{\partial x} v(t, x)}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)} - \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right)^{\frac{1}{\eta-1}} \right) \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r)^T (\sigma\sigma^T)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right)^2}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) - \beta v(t, x) - \frac{\eta-1}{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}} + xr \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r)^T (\sigma\sigma^T)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right)^2}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)}\end{aligned}\tag{4.38}$$

auf $[0, T[$ und die Endbedingung

$$v(T, x) = \frac{1}{\eta} x^\eta.$$

Wir versuchen nun, eine Lösung mit der speziellen Form

$$v(t, x) = f(t) \frac{1}{\eta} x^\eta$$

zu finden. Setzen wir dies in (4.38) ein, so stimmt die Gleichung im Fall $x = 0$, und für $x > 0$ erhalten wir nach Kürzen die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned}f'(t) &= \beta f(t) + (\eta-1) f(t)^{\frac{\eta}{\eta-1}} - r\eta f(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r)^T (\sigma\sigma^T)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) \frac{\eta}{\eta-1} f(t) \\ &= \left(\beta - r\eta + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\eta-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r)^T (\sigma\sigma^T)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) \right) f(t) \\ &\quad + (\eta-1) f(t)^{\frac{\eta}{\eta-1}} \\ &=: a_1 f(t) + a_2 f(t)^{\frac{\eta}{\eta-1}}.\end{aligned}$$

Mit der Ersetzung $h(t) := f(t)^{-\frac{1}{\eta-1}}$ transformiert sich diese nichtlineare Gleichung in eine lineare:

$$h'(t) = -\frac{1}{\eta-1} \left(a_1 h(t) + a_2 \right), \quad h(T) = 1. \quad (4.39)$$

Die eindeutige Lösung von (4.39) lautet

$$h(t) = e^{-\frac{a_1}{\eta-1}(t-T)} \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) - \frac{a_2}{a_1}.$$

Aus

$$f(t) = h(t)^{1-\eta}$$

erhalten wir die Wertfunktion als

$$v(t, x) = \left(e^{-\frac{a_1}{\eta-1}(t-T)} \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) - \frac{a_2}{a_1} \right)^{1-\eta} \frac{1}{\eta} x^\eta, \quad (4.40)$$

und $\tilde{c}(t, x)$ sowie $\mathbf{p}(t, x)$ sind von der Form

$$\tilde{c}(t, x) = \left(e^{-\frac{a_1}{\eta-1}(t-T)} \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) - \frac{a_2}{a_1} \right)^{-1} x, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{p}(x) = -(\sigma\sigma^T)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) \frac{1}{\eta-1} x. \quad (4.42)$$

Wir stellen bei beiden Strategieteilen eine lineare Ortsabhängigkeit fest, die eine Aufteilung des Vermögens auf Assets und Konsum vollkommen unabhängig von dessen Höhe bedeutet. In unserer zweiten Formulierung sind also φ und $\tilde{\gamma}(t)$ ortsunabhängig. $\tilde{\gamma}(T)$ ist erwartungsgemäß 1, d. h., am Ende wird das gesamte Vermögen konsumiert, da sich die Wiederanlage auch nur der kleinsten Geldmenge nicht mehr lohnt. Bei \mathbf{p} beziehungsweise φ stellen wir sogar eine Zeitunabhängigkeit fest. Diese lässt sich leicht durch die konstanten Marktkoeffizienten und die Zeitunabhängigkeit der Nutzenfunktion erklären: Die Portfolioaufteilung auf die Assets sollte natürlich konstant bleiben, da sich das Verhältnis der Ertragsaussichten nicht ändert. Allerdings findet ein Ausgleich zwischen Konsum und Anlage in Bonds statt, abhängig von $f(t)$.

Die lineare Abhängigkeit von x führt zu $\tilde{c}(t, x), \mathbf{p}(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ und bestätigt damit die Herleitung der Randwerte (4.36). Gleichzeitig sehen wir daran deutlich die Degenerierung der parabolischen Differentialgleichung (4.37), in der die Konvektions- und Diffusionskoeffizienten für $x \rightarrow 0$ verschwinden. Übrig bleibt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, 0) = \beta v(t, 0),$$

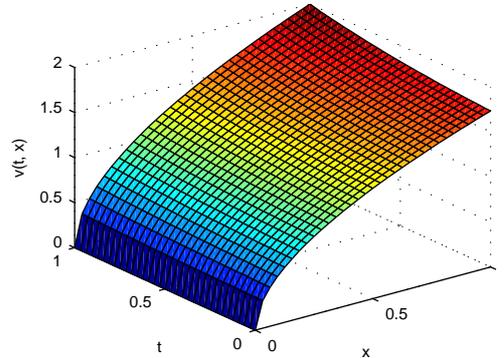


Abbildung 4.3: Die analytische Wertfunktion (4.40) mit $\beta = 0.75$

die wegen der Endbedingung (4.35) von

$$v(t, 0) = e^{\beta(t-T)} u_2(0) = 0$$

gelöst wird und damit die Konformität der Randbedingung (4.36) noch einmal bestätigt.

4.3 Diskretisierung der HJB-Gleichung

Um nun die Diskretisierungen aus Abschnitt 3.4.4 auf dieses eindimensionale Beispiel anzuwenden, wählen wir ein Zeit- und ein Ortsdiskretisierungslevel l_t, l_x und stellen ein zugehöriges Ortsgitter mit der Maschenweite $\Delta x := 2^{-l_x} \varnothing \Omega$ auf,

$$\Omega_{l_x} := \{j\Delta x \mid j = 0, \dots, 2^{l_x}\}.$$

Das Zeitschrittverfahren macht dann Schritte der Größe $\Delta t := 2^{-l_t} T$. Um die Notation ein wenig zu vereinfachen, verwenden wir für Funktionswerte auf dem nächstzurückliegenden, bereits bekannten Zeitpunkt das Superskript v^c für *current* und für den aktuell zu berechnenden Zeitpunkt v^n für *next*. Auch die Ortsspezifizierung verdeutlichen wir durch einen Index, als Subskript j geschrieben. Analog wird mit den Strategien \tilde{c}, \mathbf{p} und den Konvektions- und Diffusionskoeffizienten f und G verfahren, also

$$\begin{aligned} v_j^c &= v((i+1)\Delta t, j\Delta x), \\ v_j^n &= v(i\Delta t, j\Delta x), \\ f_j^c &= f(j\Delta x, \tilde{c}_j^c, \mathbf{p}_j^c) = j\Delta x r + (\mathbf{p}_j^c)^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}r) - \tilde{c}_j^c, \\ \bar{G}_j^c &= \bar{G}(\mathbf{p}_j^c) = (\mathbf{p}_j^c)^T \sigma \sigma^T \mathbf{p}_j^c. \end{aligned}$$

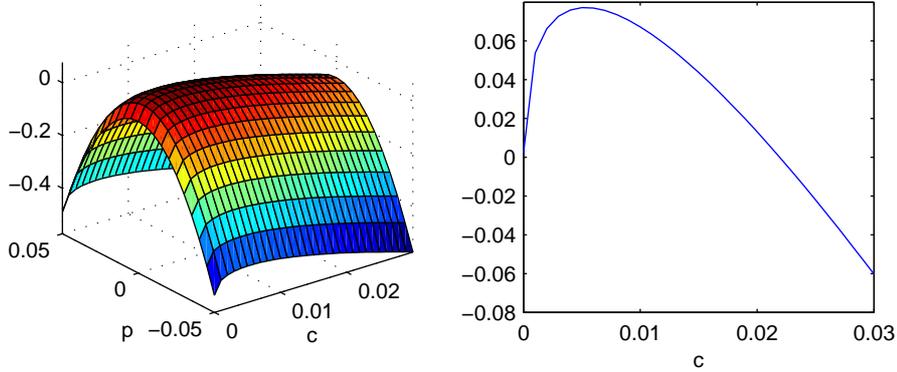


Abbildung 4.4: Die zu maximierende Funktion in (4.44) am linken Gebietsrand

Alle angegebenen Werte sind skalar, und es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass \bar{G} quadratisch in \mathbf{p}_j und damit > 0 ist. Auch f hängt positiv von \mathbf{p}_j ab, da die Driftraten generell die Zinsrate übersteigen, worauf bereits in Unterabschnitt 4.1.1 hingewiesen wurde. \tilde{c}_j geht einzig in f ein, diesmal negativ. Diese Beobachtungen helfen, subtile Schwierigkeiten bei der Zeitschrittbehandlung der HJB-Gleichung aufzudecken, die im Zuge der Beschreibung der Nachiteration erläutert werden.

Man erhält nun für die eindimensionale HJB-Gleichung (4.37) das gewöhnliche CRANK-NICOLSON-Schema (3.21) erster Ordnung

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{\Delta t} v_j^c - \left(\beta + \frac{1}{\Delta t} \right) v_j^n \\
 & + (1 - \theta) \left(\frac{1}{\eta} (\tilde{c}_j^c)^\eta + \left(\frac{f_j^{c-}}{\Delta x} + \frac{\bar{G}^c}{2\Delta x^2} \right) v_{j-1}^c \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{|f_j^c|}{\Delta x} + \frac{\bar{G}^c}{\Delta x^2} \right) v_j^c + \left(\frac{f_j^{c+}}{\Delta x} + \frac{\bar{G}^c}{2\Delta x^2} \right) v_{j+1}^c \right) \\
 & + \theta \max_{\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n} \left(\frac{1}{\eta} (\tilde{c}_j^n)^\eta + \left(\frac{f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^-}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{2\Delta x^2} \right) v_{j-1}^n \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{|f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)|}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{\Delta x^2} \right) v_j^n + \left(\frac{f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^+}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{2\Delta x^2} \right) v_{j+1}^n \right),
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

und das modifizierte CRANK-NICOLSON-Verfahren (3.25) lautet in jedem Zeitschritt

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{\Delta t} v_j^c - \left(\beta + \frac{1}{\Delta t} \right) v_j^n \\
 & + \max_{\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n} \left(\frac{1}{\eta} (\tilde{c}_j^n)^\eta + (1 - \theta) \left(\frac{f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^-}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{2\Delta x^2} \right) v_{j-1}^c \right. \\
 & \quad - (1 - \theta) \left(\frac{|f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^+|}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{\Delta x^2} \right) v_j^c \\
 & \quad + (1 - \theta) \left(\frac{f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^+}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{2\Delta x^2} \right) v_{j+1}^c \quad (4.44) \\
 & \quad + \theta \left(\frac{f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^-}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{2\Delta x^2} \right) v_{j-1}^n \\
 & \quad - \theta \left(\frac{|f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^+|}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{\Delta x^2} \right) v_j^n \\
 & \quad \left. + \theta \left(\frac{f_j(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)^+}{\Delta x} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j^n)}{2\Delta x^2} \right) v_{j+1}^n \right).
 \end{aligned}$$

Diese Schemata sind so aufgeschrieben, dass aus ihnen das nach der Maximierung zu lösende, lineare Gleichungssystem sofort ablesbar ist. So können die aus dem $n+1$ -dimensionalen, maximierenden Konsum- und Anlagestrategie-Parameter $(\tilde{c}_j^n, \mathbf{p}_j^n)$ in jedem Maximierungsschritt ohnehin generierten Koeffizienten für $v_{j(\pm 1)}^{c/n}$ gespeichert und nach hinreichender Genauigkeit des gesuchten Maximums zur Aufstellung der Matrix wieder abgefragt werden. Selbstverständlich wird die Matrix nur aus den Koeffizienten für den aktuell zu berechnenden Zeitpunkt $i\Delta t$ aufgestellt, die bekannten und entsprechend (4.43) beziehungsweise (4.44) gewichteten Werte $v_{j(\pm 1)}^c$ sowie der Wert der Nutzenfunktion bilden die rechte Seite des Gleichungssystems.

Nun wird die in Abschnitt 3.4 beschriebene Nachiteration angewendet, die je Zeitschritt einen neuerlichen Durchlauf von Maximierung und Lösen des Gleichungssystems erfordert. Als Startwert bietet sich die konstante Extrapolation $v^n = v^c$ an, danach wird die Maximierung jeweils über die im vorherigen Iterationsschritt erhaltenen Werte v^n ausgeführt. Konvergenz für v^n wird im ℓ_2 -Sinn gemessen (siehe Abschnitt 5.3). Ist die Iteration für den behandelten Zeitschritt abgeschlossen, führt eine einfache Vertauschung der Rollen von v^c und v^n bereits zu einem für den nächsten Zeitschritt notwendigen Startwert. Die Anweisung $v^c = v^n$ dagegen führt direkt zur konstanten Extrapolation.

Konkavitätserhaltung

Nachiterationen sind für die Lösbarkeit der einzelnen Maximierungsprobleme in beiden CRANK-NICOLSON-Formulierungen von essentieller Bedeutung. Sie führen zum Erhalt der von der Endbedingung als grundlegende Voraussetzung an eine Nutzenfunktion vorgegebenen Konkavität der Wertfunktion. Um dies einzusehen, kommen wir noch einmal auf die Beobachtungen bezüglich der Koeffizienten f, \bar{G} zurück und

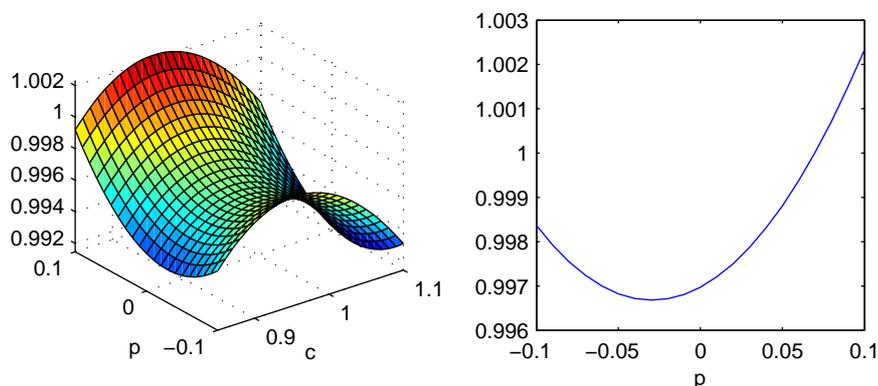


Abbildung 4.5: Die zu maximierende Funktion in (4.43) am Punkt $(T-2\Delta t, \emptyset\Omega-2\Delta x)$ nach fehlender Nachiteration und konstanter Extrapolation. Eine Nicht-Konkavitätsstelle macht aus der zu maximierenden Funktion eine nach oben geöffnete Parabel.

schalten im Maximierungsteil von (4.43) den Betrag durch die Annahme $f > 0$ aus. Für den Fall $f < 0$ kann ganz analog vorgegangen werden. Die fatalen Folgen einer konvexen Stelle in v werden nun nach einer Umstellung der verbleibenden Terme deutlich:

$$\frac{\tilde{c}_j^\eta}{\eta} + \frac{\bar{G}(\mathbf{p}_j)}{\Delta x^2} \left(\frac{v_{j-1} + v_{j+1}}{2} - v_j \right) + f_j(\tilde{c}_j, \mathbf{p}_j)(v_{j+1} - v_j). \quad (4.45)$$

Ist trotz Monotonie der Faktor an \bar{G} positiv, so öffnet sich die in \bar{G} enthaltene Parabel nach oben, nicht einmal ausgeglichen durch $f_j(\tilde{c}_j, \cdot)$. Im Fall $f < 0$ findet zwar ein solcher Ausgleich statt, \bar{G} wächst aber doch schneller als das nur lineare f_j fällt, und in beiden Situationen ist kein Maximum mehr definiert. Eine derartige nicht-konkave Stelle kann sehr einfach durch den NEUMANN-Randwert 0 an der rechten Seite des Gebiets entstehen, wenn der erste innere Punkt unnatürlich weit nach oben gedrückt und so links von ihm Konvexität erzeugt wird. Mehrfache Nachiteration würde diese Unnatürlichkeit wieder bereinigen. Die Situation verdeutlicht Abbildung 4.5.

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse

Wir wenden uns nun den von den bisher beschriebenen Algorithmen erzeugten Ergebnissen zu. Dabei wird das in Kapitel 3 aufgestellte Finite-Differenzen-Verfahren gegenüber einer analytisch bekannten Referenzlösung getestet und dann auf Problemstellungen mit unbekanntem Lösungen angewendet.

Zuerst unterziehen wir die analytische Referenzlösung für MERTONS Problem, die über eine CRRA-Nutzenfunktion in Abschnitt 4.2 erhalten wurde, einer genaueren Betrachtung und stellen die Relevanz der wichtigsten Parameter heraus.

Dann wird die Konvergenz des CRANK-NICOLSON-Verfahrens und der Downwind-Diskretisierung der HAMILTONSchen Funktion gegen die CRRA-Referenzlösung in einer Dimension anhand einer Sensitivitätsanalyse untersucht. Der Einfluss der unterschiedlichen Parameterwahl auf die HJB-Gleichung und auf die Diskretisierung wird herausgestellt. Wir gehen auf die Gebietsgröße sowie die örtliche Verteilung des Fehlers und der Konvergenzordnung ein und erläutern den Effekt der Nachiterationen auf Genauigkeit und Stabilität des Verfahrens. Weiterhin führen wir Berechnungen für einen Markt mit mehreren Aktien und für eine alternative Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion durch.

Für zweidimensionale Simulationen werden unterschiedliche Risikoaversionen und Nutzenfunktionen vorgestellt und der Einfluss verschiedener Parameter auf die Symmetrie der Lösung aufgezeigt. Die Kombinationstechnik für dünne Gitter wird der Berechnung mit einem vollen isotropen Gitter gegenübergestellt und Konvergenzen für die diskreten Normen angegeben. Wir untersuchen auch Berechnungen mit einer zweidimensionalen CARA-Nutzenfunktion auf ihre Konvergenzeigenschaften und gehen auf die Laufzeiten des Kombinationsverfahrens ein.

Die Implementierung erfolgte in der Programmiersprache C++, die Abbildungen wurden mit dem Programmpaket MATLAB [62] angefertigt.

5.1 Die analytische Referenzlösung

Im Fall eindimensionalen Vermögens und einer CRRA-Nutzenfunktion steht uns die von Merton [45] gefundene, analytische Lösung des Nutzenmaximierungsproblems als Referenz zur Verfügung. Sie wurde bereits in Beispiel 4.1 hergeleitet und in ihrer

geschlossenen Form präsentiert. Sie wird von etlichen Parametern beeinflusst, die von der Spezifikation des Problems vorgegeben und daher bei dessen Lösung nicht beeinflussbar sind. An dieser Stelle soll zuerst kurz auf diese Parameter und ihre Bedeutung eingegangen werden, bevor wir uns in den darauf folgenden Abschnitten mit der Konvergenz der numerischen Lösung gegen diese analytische beschäftigen.

Um den Effekt eines Parameters besser zu demonstrieren, betrachten wir an dieser Stelle die Wertfunktion (4.40) lediglich für den Anfangszeitpunkt des Intervalls t , den wir der Einfachheit halber auf 0 normiert haben. Durch diese Festlegung ergibt sich eine eindimensionale Funktion, deren Betrachtung Aufschluss über die Struktur auf dem gesamten Zeitintervall zulässt. Insbesondere handelt es sich bei dieser speziellen Wertfunktion um eine glatt in der Zeit skalierte Version der ursprünglichen Nutzenfunktion, so dass keine signifikanten Zeiteffekte berücksichtigt werden müssen.

Als augenscheinlichster Parameter fällt das ARROW-PRATT-Maß der Risikoaversion $1 - \eta$ auf. Es bestimmt die Krümmung der Nutzenfunktion u_2 und damit die Dominanz der Singularität von v bei $\tilde{c} = 0$. Die beiden Extremwerte 0 und 1 für η werden wohl bedacht ausgeschlossen. Für $\eta = 1$ verschwindet die Singularität in der Nutzenfunktion vollständig; in diesem Fall läge keinerlei Risikoaversion vor. Dann würde u_2 aber auch nicht mehr dem GOSSENSchen Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen gehorchen und damit aus den Voraussetzungen an unser Problem herausfallen. In der Tat wäre das Maximierungsproblem (4.37) dann linear in \tilde{c} , und jede Beschränkungsvorgabe an die Strategie führte zu einem rein willkürlichen Maximum. Die HJB-Gleichung hätte keine sinnvolle Lösung und würde keine Antwort mehr auf die Frage nach dem erreichbaren Wert durch ein Vermögen (4.33) geben. Für $\eta = 0$ entartete bereits die Endbedingung der HJB-Gleichung (4.35). Da außer gegen den Bankrott dann keine Präferenzstruktur mehr erkennbar bliebe, wäre auch in diesem Fall das Nutzenmaximierungsproblem (4.33) schlecht definiert. Schlicht jede nicht-ruinöse Strategie führte zu einem Maximum, und dieses wäre an Gleichung (3.4) ohne weiteres als $\frac{1}{\beta} + (1 - \frac{1}{\beta})e^{-\beta T}$ ablesbar. Eine weitere Lösung zur Ableitung einer Strategie wäre gar nicht mehr erforderlich.

Auch wenn die Absicherung modellhafter Risikoannahmen durch empirische Daten nicht immer gewährleistet ist, kann hier doch von einer weniger starken Risikoaversion ausgegangen werden, die Stärke der Konkavität der Nutzenfunktion sollte also moderat ausfallen. In Abbildung 5.1 können links drei verschiedene Wertfunktionen für ARROW-PRATT-Parameter $\eta = 0.125$, $\eta = 0.5$ und $\eta = 0.75$ abgelesen werden. Der Einfluss auf die Konkavität der Wertfunktion ist unverkennbar. Um einen fairen Vergleich unserer Ergebnisse zu ermöglichen, wird durchgängig $\eta = 0.5$ gesetzt.

Der zweite, starken Einfluss auf die Wertfunktion (4.40) nehmende Parameter ist der Diskontfaktor β . Er beschreibt die Zeitpräferenzstruktur des betrachteten Agenten und damit gewissermaßen seine Ungeduld. Je größer der Wert von β ist, desto schneller verfällt ein Wert mit der Zeit. Zukünftige Zahlungen verlieren an

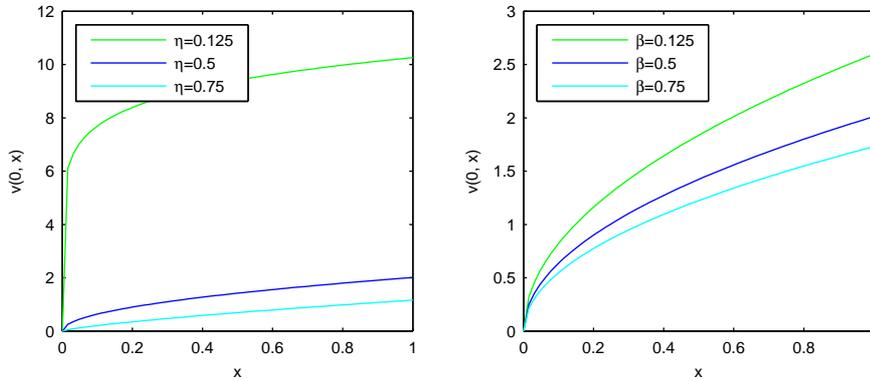


Abbildung 5.1: Die geschlossene Referenzlösung (4.40) für den Zeitpunkt $t = 0$ mit verschiedenen Werten für η und β

heutigem Wert und der Agent wird gierig, er konsumiert lieber heute als morgen. Der maximal erreichbare Wert in (4.32) nimmt unweigerlich ab, selbst wenn die anderen das Problem bestimmenden Größen unverändert bleiben. Zur Verifikation kann dies auch aus Gleichung (4.40) selbst abgelesen werden: Mit β wächst auch a_1 , und die Exponentialfunktion dominiert den ebenfalls fallenden Subtrahenden, so dass der Gesamtskalierungsfaktor an der Nutzenfunktion fällt, unabhängig von allen anderen Parametern. Dieses erwartete Verhalten verdeutlicht die rechte Seite von Abbildung 5.1. Da wir uns hier ebenfalls nur auf modellhafte Annahmen zur Zeitpräferenz stützen können, benutzen wir für unsere Rechnungen ein durchschnittliches β von 0.5.

5.2 Maximierungsroutinen

Für die Auswertung der HAMILTONSchen Funktionen in den Gleichungen (4.43) und (4.44) kommen verschiedene Maximierungsroutinen in Frage. Da sie auch allgemeine, stochastische Optimierungsaufgaben lösen sollen, wird die Grundforderung der Ableitungsfreiheit der Algorithmen sowie der Unabhängigkeit von der konkreten Problemformulierung aufgestellt. Deshalb werden keine Gradientenverfahren eingesetzt, obwohl die Struktur der für optimale Portfolios zu maximierenden Funktion in den Investitionsstrategien den Einsatz eines solchen zuließen. Wie in Abschnitt 4.3 ausführlicher dargelegt und an (4.45) erkennbar, besteht die HAMILTONSche Funktion in beiden CRANK-NICOLSON-Formulierungen aus einem quadratischen und einem linearen Teil in \mathbf{p} und einem linearen sowie einem nichtlinearen, konkaven Teil in \tilde{c} , der aus der Nutzenfunktion stammt. Somit ist unter den in Abschnitt 4.3 gemach-

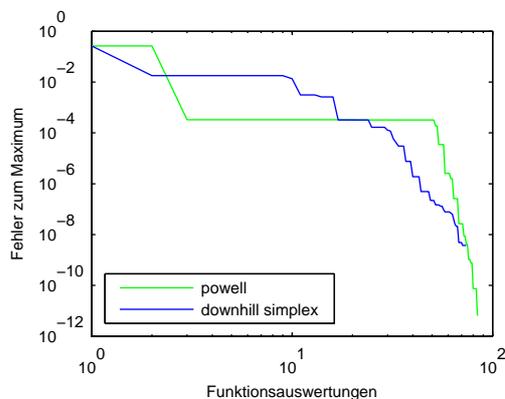


Abbildung 5.2: Konvergenz der Methode von POWELL und der Downhill-Simplex-Methode für (4.43) am linken Gebietsrand

ten Konkavitätsannahmen an die diskretisierte Wertfunktion jeweils ein eindeutiges Maximum zu erwarten, und ein Maximierungsalgorithmus braucht nicht lokal gefundene Minima auf ihre Globalität zu überprüfen. Aufwändigere Algorithmen wie Simulated Annealing, Metropolis oder Sintflut werden also nicht benötigt, und wir beschränken uns auf zwei Algorithmen aus der Familie der Bergsteigeralgorithmen (engl. *hill climbing*). Diese sind das POWELL-Verfahren mit einer Goldener-Schnitt-Suche in jeder Richtung und das Downhill-Simplex-Verfahren nach NELDER und MEAD. Beide Verfahren kommen ohne Berechnung der Ableitungen der zu maximierenden Funktion aus und können jeweils mit fast beliebigen Nichtlinearitäten umgehen. Sie werden in Press [56] beschrieben.

Der POWELL-Algorithmus benutzt vom Ausgangspunkt einen Satz Einheitsvektoren im Definitionsraum der zu maximierenden Funktion, in deren Richtungen er jeweils eine Maximierung unter Berücksichtigung der Gebietsbeschränkung vornimmt. Die letztgenutzte Richtung wird dann durch die nicht mehr achsenausgerichtete, sich übergreifend aus diesem Maximierungsdurchlauf ergebende Richtung von Startpunkt zu aktuell gefundenem, optimalem Punkt ersetzt. Dann wird ein weiterer Durchlauf durch alle derzeitigen Richtungen vollzogen und wiederum die letztgenutzte durch die schleifenübergreifende ersetzt. Damit diese Richtungserstellung nicht mit der Zeit entartet, werden die Koordinatenrichtungen nach einer konstanten Anzahl von Durchläufen wieder hergestellt.

Die Maximierung in die jeweilige Richtung wird durch zwei Einzelschritte bewerkstelligt. Zuerst wird entlang der gegebenen Linie eine Punktklammer aus drei Punkten gesucht, so dass die beiden äußeren Punkte kleinere Werte haben als der mittlere, wodurch sichergestellt ist, dass auf der Verbindungslinie der beiden äußeren Punkte ein lokales Richtungsmaximum enthalten ist. Dann wird diese Verbindungs-

linie durch ein mit dem goldenen Schnitt agierendes Bisektionsverfahren sukzessive unterteilt. Diese Intervallschachtelung liefert das gesuchte, lokale Richtungsmaximum.

Der Algorithmus gilt als konvergiert, wenn die Differenz der Funktionswerte vor einem kompletten Richtungsdurchlauf f_i und nach diesem Richtungsdurchlauf f_{i+1} eine relative Toleranzschwelle unterläuft:

$$2|f_{i+1} - f_i| \leq \varepsilon(|f_{i+1}| + |f_i|).$$

Dies entspricht dem Standardkriterium für die numerische Gleichheit zweier reeller Werte, wie es in Knuth [34, Abschnitt 4.2.2] beschrieben wird. Den Wert für ε haben wir in unseren Simulationen auf $1e-10$ festgelegt.

Der Downhill-Simplex-Algorithmus ist trotz ähnlichen Namens nicht mit dem aus der linearen Programmierung bekannten Simplex-Algorithmus verwandt. Er verwendet die geometrische Struktur eines streckbaren Simplex, das durch verschiedene Transformationen amöbenartig auf ein Maximum „zukriecht“. Dabei wird ein Ausgangssimplex gegenüber seinem kleinsten Eckpunkt gespiegelt und je nach Güte des dadurch erhaltenen, neuen Punktes gestreckt oder gestaucht. Liefert der neue Punkt ein zu schwaches Ergebnis, wird der Simplex ungespiegelt beibehalten, allerdings zu seinem maximalen Eckpunkt hin gestaucht.

Beide Algorithmen sind eher heuristischer Natur, auf das behandelte Problem aber durchaus mit Erfolg anwendbar. Abbildung 5.2 zeigt die Konvergenz der beiden Routinen für ein beispielhaftes Maximierungsproblem am linken Gebietsrand. Es wird jeweils die Differenz des maximal gefundenen Werts für eine gegebene Zahl von Funktionsauswertungen zum tatsächlichen Maximum angegeben. Der Startpunkt ist natürlich gleich. Auffällig ist eine lange Stagnation des POWELL-Algorithmus, bevor er zu einer sehr viel steileren Konvergenz übergeht als das Downhill-Simplex-Verfahren. Dies liegt in der gelegentlich fruchtlosen Suche in einer Richtung begründet. Durch die Reinitialisierung der Richtungen nach mehreren Durchläufen wird auch die Größe der anfänglichen Punktklammer wieder auf eine Normgröße zurückgesetzt, und die Intervallschachtelung benötigt viele Funktionsauswertungen, um den bereits bekannten Punkt als immer noch maximalen in dieser Richtung festzustellen. So haben viele Funktionsauswertungen zu keiner Verbesserung des Werts geführt, und der Algorithmus kann seine überlegene Konvergenzrate erst sehr spät ausspielen.

Diese Beobachtungen haben uns zur Wahl des Downhill-Simplex-Algorithmus für unser Verfahren veranlasst, da mit ihm eine hinreichende Genauigkeit bereits mit durchschnittlich unter 100 Auswertungen zu erreichen ist, während der POWELL-Algorithmus meist mehr als 200 benötigt. Das macht bereits bei einem Ortslevel von 12 und einem Zeitlevel von 0, d. h. lediglich einem Zeitschritt und damit nur einer Maximierung je *Ortspunkt* bei jeweils 5 Nachiterationen, einen Zeitsprung von 14s auf 25s aus. Am Problem gemessen bewährt sich der Downhill-Simplex-Algorithmus wesentlich besser.

5.3 Fehlermessung

Jeder der in Kapitel 3 beschriebenen Algorithmen liefert eine Näherung v^h der korrekten Lösung v auf einem beschränkten Teilgebiet Ω des gesamten Definitionsbereichs. Um die Güte dieser Näherung zu bewerten, benötigen wir sinnvolle Möglichkeiten, den durch die Diskretisierung begangenen Fehler von $e := v^h - v$ zu messen. Bei diesem Fehler handelt es sich um eine Funktion auf dem Rechengebiet Ω , die nicht notwendigerweise dieselbe Struktur aufweist wie die Näherung v^h . Ist z. B. die Näherung als $v^h \in V_I$ entstanden (siehe Abschnitt 3.5.1) so kann keineswegs davon ausgegangen werden, dass $v^h - v$ ebenfalls stückweise multilineare ist und damit ebenfalls in diesem Raum liegt. Die hier gewählte Fehlermessung ist geeignet, diese Fehlerfunktion im Fall einer bekannten Referenzlösung exakt genug aufzulösen und auch den Fall einer nicht bekannten analytischen Lösung adäquat zu behandeln.

Da für das Problem der optimalen Portfolios die Funktionsauswertung für $t = 0$ wichtig ist und jeder weitere Zeitpunkt ohnehin nur durch Umskalierung und Neuberechnung des Problems mit angepassten Parametern erhalten werden kann, konzentrieren wir uns auf die allein von ihrem räumlichen Parameter abhängende Funktion $v(0, \cdot)$. An ihr nehmen wir sämtliche Fehlermessungen vor, die Zeitdiskretisierung dient dabei der Erhöhung der Genauigkeit, die Entwicklung des Fehlers über die einzelnen Zeitpunkte ist aber nicht von Belang.

Für jedes anisotrop gewählte Referenzgitter Ω_I mit n Punkten kann eine auf diesem Gitter auswertbare Referenzlösung v geschaffen werden. Da sie zum Vergleich mit berechneten Lösungen auf gröberen Gittern dient, ist ihre weitere Struktur unerheblich, einzig die Funktionswerte an diesen Gitterpunkten fallen ins Gewicht. Ist diese Referenzlösung nicht analytisch verfügbar, kann eine Berechnung einer nodalen Referenznäherung auf diesem Gitter Ω_I , die dann ebenfalls auf diesen Gitterpunkten durch Abruf ihrer Koeffizienten auswertbar ist, zur Fehlerbestimmung herangezogen werden. Wird dann eine Näherungslösung auf einem gröberen Gitter Ω_I bestimmt, kann auch diese auf dem Referenzgitter ausgewertet und ein diskreter Fehlervektor e aufgestellt werden. Dieser entspricht dem nodalen Koeffizientenvektor der Fehlerfunktion e und kann nun auf verschiedene Funktionsnormen hin untersucht werden.

Zur Messung von Größe und damit Relevanz dieses diskreten Fehlers steht uns eine Auswahl von verschiedenen Techniken zur Verfügung:

$$\|e\|_{\ell_1} := \frac{\sum_j |e_j|}{n}, \quad \|e\|_{\ell_2} := \sqrt{\frac{\sum_j |e_j|^2}{n}}, \quad \|e\|_{\ell_\infty} := \max_j |e_j|. \quad (5.1)$$

Bei der ℓ_2 -Norm haben wir uns dafür entschieden, den Nenner in die Wurzel mit einzubeziehen. Obwohl auch die Version mit einem Nenner außerhalb der Wurzel üblich ist (z. B. in Griebel, Schneider und Zenger [20]), bietet die hier gewählte Norm einen entscheidenden Vorteil: Ist die Fehlerfunktion e konstant auf ihrem Definitionsbereich

θ	$=$	0.5
β	$=$	0.5
r	$=$	$\ln(1.02) = 0.0198$
μ	$=$	$\ln(1.05) = 0.0392$
σ	$=$	1
$u(t, c)$	$=$	$2\sqrt{c}$
Δt	$=$	2^{-t}
Δx	$=$	2^{-x}

Tabelle 5.1: Die im eindimensionalen Beispiel eingesetzten Parameter

und erhöhen wir lediglich die Anzahl von Punkten, an denen wir e auswerten, so sollte die erhaltene Größe für e unabhängig von der Anzahl und Lage dieser Punkte sein. Die andere Version erzeugt für diesen Fall aber künstliche Konvergenz gegen 0 für einen gleichwohl konstanten Fehler.

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass auf diese Weise nicht die L_1 -, L_2 - oder L_∞ -Norm der Funktion e in den zugehörigen Funktionsräumen gemessen wird. Diese könnte man zwar durch Erhöhung der Anzahl der Gitterpunkte zur Auswertung von v^h leicht approximieren, doch wird dann gewöhnlich diese Chance genutzt, auch eine neue Approximation v^h von v zu berechnen. Diese liefert dann auch eine neue Fehlerfunktion e , und die sich so ergebende Folge von diskreten Normen unterschiedlicher Funktionen konvergiert nicht mehr gegen die Funktionsraumnorm des ersten Folgenglieds. Wir können uns aber damit beruhigen, dass die oben eingeführten ℓ -Normen bei hoher Gitterauflösung bereits eine gute Approximation an die entsprechenden L -Normen darstellen und uns meist schwierige Stellen der Funktion v bekannt und bewusst sind, so dass wir darauf mit einer geeigneten Wahl des Gitters reagieren können.

5.4 Die CRRA-Nutzenfunktion: Mertons Beispiel

Wir wenden uns zuerst der Lösung des eindimensionalen Problems der optimalen Portfolios zu, wie es bereits in Abschnitt 4.3 beschrieben und aufgestellt wurde. Um zuerst das Problem in seiner einfachsten Form zu untersuchen, wählen wir einen eindimensionalen Markt mit einer Aktie, deren Drift auf $\mu = 0.0392$ und deren Volatilität auf $\sigma = 1$ gesetzt wird. Der Zins liegt bei $r = 0.0198$, die Diskontierung erfolgt exponentiell mit dem Parameter $\beta = 0.5$, die Nutzenfunktion ist CRRA, zeitunabhängig und lautet $u(c) = 2\sqrt{c}$. Das betrachtete Gebiet ist $[0, 1]$ in der Zeit und $[0, 1]$ im Ort, mit jeweils uniformen Gittern der Feinheit $\Delta t = 2^{-t}$ bzw. $\Delta x = 2^{-x}$. Zur besseren Übersicht vereint Tabelle 5.1 noch einmal all diese Parameter.

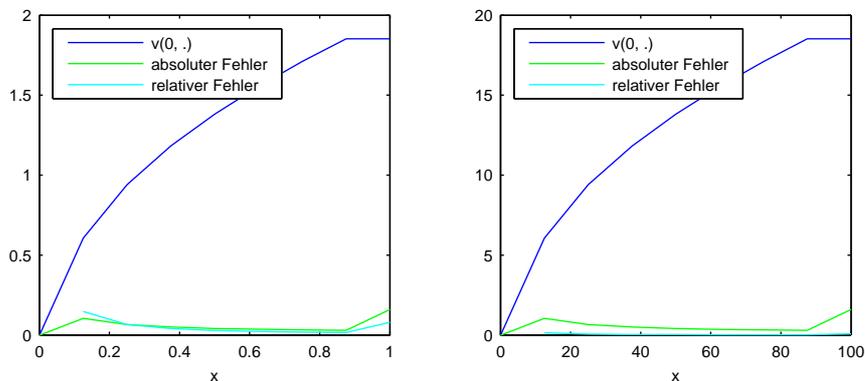


Abbildung 5.3: Unterschiedliche Gebietsskalierungen: links $[0, 1]$, rechts $[0, 100]$

5.4.1 Gebietswahl

Die Zeit- und Ortsbeschränkungen auf die Einheitsintervalle sind reine Skalierungen und damit für die Fehleranalyse vordergründig unerheblich. So lässt sich eine beliebige Zeitspanne $[t, T]$ durch Translation und Skalierung des Einheitsintervalls betrachten, ebenso im Ort. Die Gitterauflösung skaliert dann zwar mit, eine Gitterverfeinerung führt aber auf beiden Skalen zu den gleichen Effekten, und die begangenen, numerischen Fehler sind von derselben Struktur. Zur Verdeutlichung zeigt Abbildung 5.3 die berechnete Wertfunktion und den begangenen Fehler mit demselben Diskretisierungslevel auf verschiedenen Gebieten. Der relative Fehler schrumpft natürlich, sein Wesen verändert er dabei nicht. Einen Hinweis auf diese Beobachtung gibt bereits das Maß der Risikoaversion, das Krümmung und Steigung der Nutzenfunktion in Beziehung setzt. Die betrachtete CRRA-Funktion weist eine konstante Risikoaversion über das gesamte Gebiet auf und impliziert somit die gleiche lokale Struktur an jedem Ort, unabhängig von der Einschränkung auf ein Rechengebiet.

Statt dieser linearen Gebietstransformation ist es durchaus denkbar, verzerrende Transformationen einzusetzen. Diese bieten, wie alle numerischen Techniken, Vor- und Nachteile, die je nach Problem abgewogen werden müssen, damit sie sich nicht gegenseitig nivellieren. Solch verzerrende Transformationen führen auf so genannte *gradientierte* Gitter, deren Punktabstand nicht mehr uniform ist. Das bedeutet, dass die Ortsschrittweite dort ortsabhängig gewählt wird, nämlich $\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x})$. Dies sollte möglichst so geschehen, dass sowohl die Singularität am linken Gebietsrand als auch die Randbedingungen am willkürlich gesetzten, rechten Gebietsrand hinreichend fein aufgelöst und damit adäquat numerisch behandelt werden. Damit die in Kapitel 3 vorgestellten Lösungsansätze für solche Gitter nicht verloren gehen oder aufwändig ortsabhängig umgestaltet werden müssen, bieten sich beispielsweise logarithmische

Gebietstransformationen von $(0, \infty)$ auf $(-\infty, \infty)$ an, so dass auf dem transformierten Gebiet mit uniformen Gittern gerechnet werden kann und die Ortsabhängigkeit der Maschenweite erst durch die Rücktransformation entsteht. Diese Technik erfordert allerdings ein neuerliches Zurechtschneiden des Rechengebiets, der linke Rand kann mit einer logarithmischen Transformation nicht mehr behandelt werden, und es stellt sich die erneute Frage nach Randbedingungen. DIRICHLET-Bedingungen von 0 am ersten inneren Punkt wären hier nächstliegend, wirken aber eher willkürlich. Des Weiteren bietet eine logarithmische Transformation, wie sie zur numerischen Behandlung der BLACK-SCHOLES-Gleichung und ihrer Varianten erfolgreich eingesetzt wird, nicht genügend Auflösung am rechten Rand, so dass dort eventuell ein sehr viel gravierender Fehler durch die NEUMANN-Bedingung von 0 begangen wird.

Ein erster Nachteil einer solchen A-priori-Adaptivität ist ihre spezielle Problemabhängigkeit. Die Gebietstransformation kann entsprechend den im Vorhinein bekannten, schwierigen Stellen des individuellen Problems gewählt werden, aber schon eine andere Nutzenfunktion verändert die Struktur des Problems erheblich, erübrigt möglicherweise gar die Singularität und erfordert eine andere Art der Adaptivität in Form einer geänderten Gebietstransformation. Diese muss also sehr speziell anhand des konkreten Problems formuliert werden und ist in den Fällen überhaupt nicht sinnvoll einsetzbar, in denen über die Struktur der Lösung a priori nichts bekannt ist.

Ein zweiter Nachteil drängt sich bereits bei der Formulierung einer nichtlinearen Transformation auf: Der betrachtete Operator verändert sich unweigerlich. Dies kann, wie im Fall der BLACK-SCHOLES-Gleichung durchaus gewünscht sein und positive Effekte auf die Komplexität des Problems haben. Im allgemeineren Fall sind die Auswirkungen einer solchen Transformation auf den Differentialoperator aber nicht immer genau abzusehen. So kann durch eine logarithmische Transformation die Ortsvariable selbst als Faktor für Konvektion und Diffusion auftauchen. Das ist eine zusätzlich numerisch zu behandelnde Komplikation. Ein geänderter Operator ist immer auch anders zu behandeln als der ursprüngliche und erfordert unter Umständen eine gänzlich neue Lösungstheorie. Die so eingehandelten Schwierigkeiten sind vor der Festlegung auf eine Gebietstransformation eingehend zu berücksichtigen.

Im hier vorgestellten Fall der Nutzenfunktion als Anfangsbedingung ist zusätzlich die Transformation der Masse oder Energie der Lösung zu untersuchen. Eine Nutzenfunktion hat als konkave Funktion mit asymptotischer NEUMANN-Bedingung 0 am rechten „Gebietsrand“ eine nicht beschränkte Energie und führt somit bereits in der Anfangsbedingung zu Komplikationen. Ein numerischer Abschnitt des Gebiets führt zwar zu einer Beschränkung der Masse, aber eine Transformation dieses Gebiets hält diese künstlich endliche Masse nicht unbedingt aufrecht. Zu klären bleibt die Massenverteilung nach der Transformation und deren Verhältnis zur ursprünglichen Massenverteilung ohne Gebietsabschnitt. Kann diese konsistent gewährleistet werden? Ist eine Stauchung oder Streckung der Energie zulässig und mit der Pro-

Level	ℓ_1 -Fehler		ℓ_2 -Fehler		ℓ_∞ -Fehler	
1	0.451409		0.479359		0.825503	
2	0.185122	1.29	0.199316	1.27	0.359091	1.20
3	0.081775	1.18	0.094548	1.08	0.213221	0.75
4	0.037266	1.13	0.047252	1.00	0.150770	0.50
5	0.017319	1.11	0.024024	0.98	0.106610	0.50
6	0.008110	1.09	0.012262	0.97	0.075349	0.50
7	0.003761	1.11	0.006240	0.97	0.053280	0.50
8	0.001673	1.17	0.003145	0.99	0.037675	0.50
9	0.000658	1.35	0.001558	1.01	0.025920	0.54

Tabelle 5.2: Die Konvergenzraten der einzelnen Fehlernormen mit den Parametern aus Tabelle 5.1 auf Zeitlevel 16

blemformulierung verträglich? Gibt es ein ökonomisches Äquivalent zur Massen- und Energieerhaltung in der Physik und kann dieses Prinzip geeignet modifiziert werden? Antworten darauf sollten bei der Wahl einer Gebietstransformation unbedingt beachtet werden.

5.4.2 Konvergenzverhalten

Für die in Tabelle 5.1 angeführte CRRA-Nutzenfunktion liegt uns in Form von Beispiel 4.1 die in Abschnitt 5.1 untersuchte analytische Referenzlösung vor, mit der die berechneten Werte für die Wertfunktion und die Strategien verglichen werden können. Dabei gehen wir wie im Abschnitt über Fehlermessung 5.3 vor und stellen die jeweils korrekten Werte auf einem feinen Referenzgitter auf, interpolieren die berechneten Werte linear von einem größeren Approximationsgitter auf die Referenzgitterpunkte und bestimmen die Normen (5.1) des sich so ergebenden Fehlervektors. Tabelle 5.2 zeigt die Konvergenz der einzelnen Fehlernormen auf.

In den Blick fällt sofort das schnelle Erreichen der Konvergenzrate von $\frac{1}{2}$ in der ℓ_∞ -Norm. Diese hatten wir in Abschnitt 3.4 über die Stabilität des Verfahrens bereits vorausgesagt und erkannt, dass damit die maximale Ordnung für monotone Schemata erreicht ist. Wie in den folgenden Abschnitten verdeutlicht wird, ist dies die verlässlichste der drei Normen, was erheblich an der Struktur der Fehlerfunktion e selbst liegt. Für die beiden anderen Fehlernormen ist eine Konvergenzrate von nicht mehr als 1 zu erwarten, da in der Finite-Differenzen-Diskretisierung einseitige Downwind-Sterne zum Einsatz kommen. Zentrale Sterne höherer Ordnung bleiben uns auf Grund von Stabilitätseinschränkungen verwehrt. Diese Konvergenzordnung wird für das hier untersuchte Standardbeispiel tatsächlich erreicht, wie aus Tabelle 5.2 abgelesen werden kann.

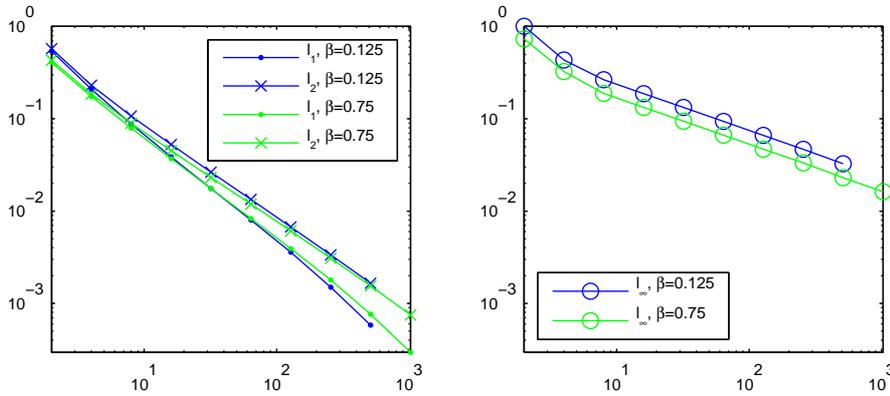


Abbildung 5.4: Konvergenz der l_1 -, l_2 - und l_∞ -Normen für $\beta = 0.125$ und $\beta = 0.75$

Der Fehler weist allerdings eine sehr ungleichmäßige Struktur auf, die in Unterabschnitt 5.4.4 näher untersucht wird. Durch eine ortsabhängige Fehleranalyse werden dort Gebiete ausgemacht, die ein besseres Konvergenzverhalten aufweisen. Darauf folgen Vorschläge zu einer aufgabenstellungsabhängigen Gebietswahl.

5.4.3 Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt soll das Konvergenzverhalten des Verfahrens für unterschiedliche Variationen der Standardparameter aus Tabelle 5.1 betrachtet werden. Dabei wird jeweils nur einer der Parameter in realistischem Rahmen variiert, die anderen werden auf ihren Standardwerten festgehalten. So lässt sich deutlich die Robustheit des Verfahrens gegenüber den einzelnen Parametern analysieren, und es können Gründe für verändertes Konvergenzverhalten aufgedeckt werden. Dazu trägt bereits die Betrachtung von Gleichung (4.37) bei, deren Koeffizienten bereits vor Anwendung des diskreten Verfahrens Hinweise auf Änderungen des Charakters der Gleichung für Grenzfälle der Parameterwerte und damit der Behandelbarkeit mit den gewählten Finite-Differenzen-Verfahren geben. In diesen Fällen sei auch auf den folgenden Unterabschnitt 5.4.4 über die Fehlerstruktur verwiesen.

Der Diskontfaktor β

Wie Abbildung 5.1 bereits zeigt, verändert der Zeitpräferenzparameter β die Steigung der Wertfunktion. An ihrer analytischen Darstellung (4.40) ist erkennbar, dass er umgekehrt proportional in den linearen Faktor der Ortsstruktur der Funktion eingeht; je größer β , desto kleiner ist dieser Faktor. Er geht aber auch in die exponentielle Zeitstruktur der Funktion ein und bewirkt eine proportionale Diskontierung der Entwicklung über den relevanten Zeitraum. Insofern flacht die Wertfunktion mit absteigender Zeit für große β sehr viel stärker ab. Der in Abbildung 5.1 beobachtete

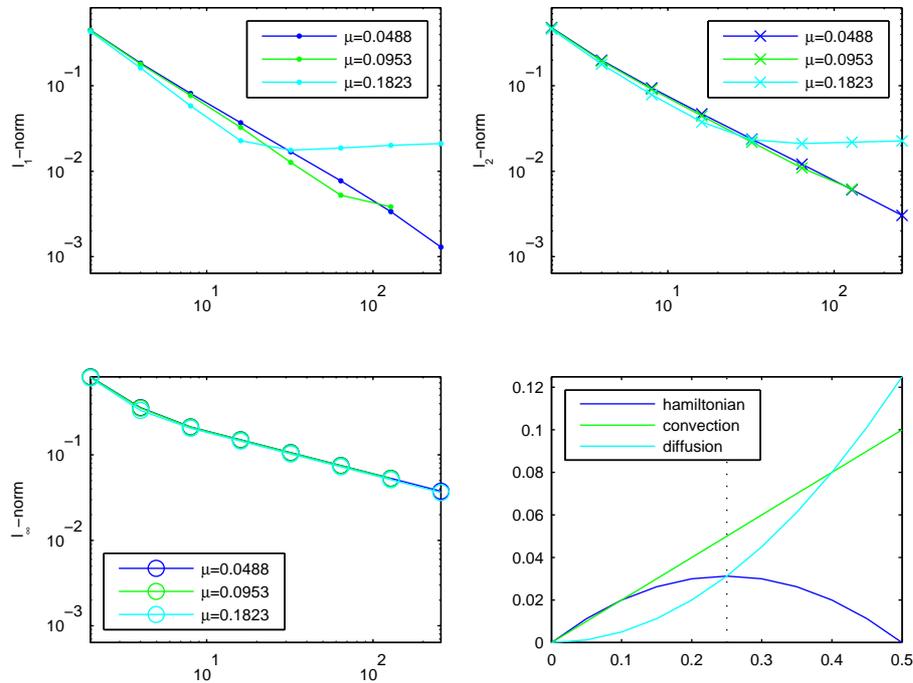


Abbildung 5.5: Konvergenz der l_1 -, l_2 - und l_∞ -Normen für $\mu = 0.0488$, $\mu = 0.0953$ und $\mu = 0.1823$. Unten rechts die HAMILTONSche Funktion (5.2) für $x = 0.4$ und eine Drift-Zins-Differenz von 0.2.

Effekt auf $v(0, \cdot)$ ist die Folge.

Die analytische Darstellung zeigt aber auch, dass die Wertfunktion lediglich gestreckt oder gestaucht, nicht aber in ihrer räumlichen Struktur verändert wird. Auch die HJB-Gleichung (4.37) weist β nur als konstanten Faktor in der Reaktion auf, wo er sich harmlos verhalten sollte. Einfluss auf Konvektion oder Diffusion hat er dagegen gar nicht. Insofern sollte das Verfahren auch höhere oder niedrigere Werte von β sinnvoll behandeln können. Die entsprechenden Konvergenzgraphen 5.4 bestätigen dieses Verhalten.

Die Drift μ

Der Driftparameter μ beschreibt die erwartete Zuwachsrate des volatilen Assets. Dabei ist keineswegs gesichert, dass tatsächlich mehr Gewinn gemacht wird, lediglich die Möglichkeit dazu vergrößert sich. Die Steuerung der Sicherheit dieser Erwartung obliegt der Volatilität, die wir in diesem Abschnitt nicht verändern.

Die Drift geht an derselben Stelle wie der Diskontfaktor β in den Streckungsfaktor der Wertfunktion ein und verändert in der analytischen Darstellung ihre Struktur nicht. Auf Grund der Voraussetzung $\eta \in (0, 1)$ verhält sich sein Einfluss aber genau entgegengesetzt zu β ; je größer μ , desto größer der Faktor und die Wertfunktion zu jedem Zeitpunkt. Dies hat einfache Gründe. Ist bei gleichem Zins und gleicher Volatilität die erwartete Wertsteigerung höher als zuvor, so sind natürlich die Gewinnchancen höher und aus mehr Kapitalgewinn am Markt resultiert eine größere Konsummöglichkeit. Gleiches Vermögen zum selben Zeitpunkt ist für bessere Gewinnaussichten mehr wert als für schlechtere, und genau diesen Umstand drückt die Wertfunktion aus.

Da aber der Zins dieselbe Eigenschaft für eine nicht-volatile Wertentwicklung des Bonds beschreibt, sollte seine Rolle in diesem Zusammenhang nicht unerwähnt bleiben. Sein Verhältnis zur Drift ist entscheidend, wie der Konvektionskoeffizient aus Gleichung (4.37) zeigt. Solange er die Drift nicht übersteigt, geht der entsprechende Investitionsparameter für das Asset positiv in den Konvektionskoeffizienten ein, da die Wertfunktion als Nutzenfunktion monoton steigend im Ort ist. Durch seine Steigerung lässt sich eventuell die nach unten geöffnete Parabel der Diffusion abschwächen, aus positivem p kann Nutzen gezogen werden. Ist die Drift allerdings kleiner als der Zins, dreht sich der Einfluss des Investitionsparameters in der Konvektion gerade um, so dass negative Werte für p nun positive Auswirkungen haben. Im Diffusionskoeffizienten ändern negative p -Werte nichts. Das führt zu Leerverkäufen des Assets, siehe Unterabschnitt 4.1.2. Diese unrealistische Situation schließen wir allerdings aus, ein solches Asset würde auf dem Markt nicht lange existieren, da es niemandes Interesse wecken könnte. Wir betrachten dagegen einen relativ kleinen Zins, wie er für kurzfristige Anleihen derzeit durchaus üblich ist, und der von allen Assets in ihrer Rendite übertroffen wird.

Eine im Verhältnis zum Zins r zu groß angetroffene Drift μ verändert dagegen den Charakter der HJB-Gleichung nachhaltig. Für kleine p dominiert der Konvektionskoeffizient als Funktion in p den Diffusionskoeffizienten, und genau in diesem Bereich findet sich das Maximum der HAMILTONSchen Funktion. Wir begründen diese Aussage mit der Feststellung, dass auch die Wertfunktion v eine Nutzenfunktion der CRRA-Klasse darstellt (siehe Merton [45]), und damit auch einen Risikoaversionsparameter aufweist, den wir hier der Einfachheit halber auf η setzen. Dann schreibt sich der von p abhängige Teil der HAMILTONSchen Funktion in (4.37) nach Kürzen durch $-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) > 0$ als

$$p(\mu - r) \frac{1 - \eta}{x} - \frac{1}{2} p^2 \sigma^2. \quad (5.2)$$

Wie sich beispielhaft in Abbildung 5.5 unten rechts erkennen lässt, findet sich das zugehörige Maximum deutlich in dem Bereich, in dem der Konvektions- den Diffusionskoeffizienten übersteigt. Das bedeutet, dass im Inneren des Gebiets eine Konvektionsdominanz auftaucht und die Gleichung wesentlich hyperbolischen Charakter

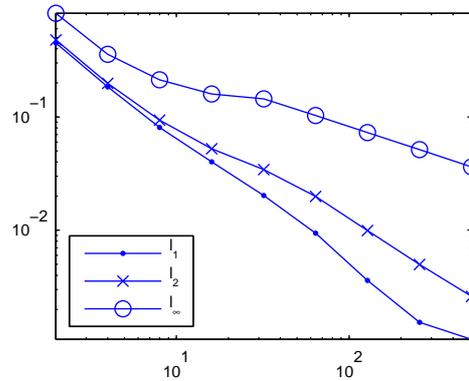


Abbildung 5.6: Konvergenz der l_1 -, l_2 - und l_∞ -Normen für $\sigma = 0.5$

annimmt. Die entsprechenden Auswirkungen können sehr gut an den Konvergenzen der l_1 - und der l_2 -Normen für die Driften von $\mu = 0.0953$ oder $\mu = 0.1823$ erkannt werden, die in Abbildung 5.5 dargestellt sind. Sie erreichen zuerst eine Konvergenzrate von 1, danach schwächen sie sich allerdings ab, gelegentlich kommen sie auch ganz zum Erliegen. Die Ursache für dieses Verhalten zu ergründen wird Gegenstand des Unterabschnitts 5.4.4 über die räumliche Verteilung des Fehlers sein. Die l_∞ -Normen halten ihre Konvergenz dagegen genau bei $\frac{1}{2}$ und lassen sich für die einzelnen Driftparameter kaum voneinander unterscheiden.

Die Volatilität σ

Im Gegensatz zum Driftparameter μ beschreibt der Volatilitätsparameter σ den Ausschlag der Unsicherheit für das Erreichen der erwarteten Wertsteigerungsrate. Dabei sind volatile Assets grundsätzlich risikobehafteter als solche mit kleinem σ , bieten aber auch größere Gewinnmöglichkeiten, wenn die Rendite stark nach oben abweicht. Einem risikoaversen Investor sind solch volatile Anlagen weniger lieb als ein sicherer Bond. Dennoch achtet er stark auf die mögliche Rendite, die generell beim Asset die eines Bonds übersteigt, siehe auch die Diskussion im vorangegangenen Abschnitt. Das risikoaverse Verhalten des Agenten lässt sich gut an der analytischen Darstellung des Investitionsparameters p in Gleichung (4.42) ablesen, in den σ umgekehrt proportional sogar quadratisch eingeht.

Die Auswirkungen auf die HJB-Gleichung und damit auf das Rechenverfahren sind durch dieses Verhalten erheblich. σ bestimmt in der HJB-Gleichung (4.37) maßgeblich die Diffusion, geht in den entsprechenden Koeffizienten sogar quadratisch ein. Insofern haben kleine Änderungen in der Größe der Volatilität bereits sehr viel größere Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten, als dieselbe Änderung in μ hätte. Die Problematik ist allerdings ähnlich zu dem im vorangegangenen Abschnitt

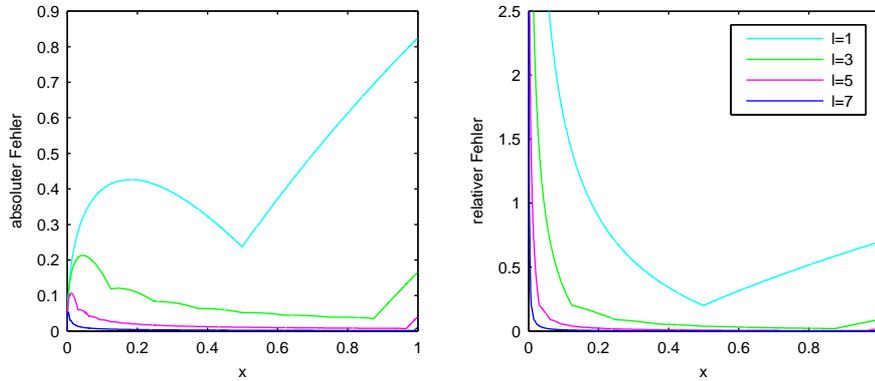


Abbildung 5.7: Der absolute (links) und der relative (rechts) Fehler für das Standardbeispiel mit Zeitlevel 16 und verschiedenen Ortslevels

diskutierten Verhältnis von Drift zu Zins. Ein zu klein gewählter Volatilitätsparameter σ eliminiert die Diffusion fast vollständig. Der resultierende, hyperbolische Charakter der Gleichung kann zwar durch die Downwind-Diskretisierung aufgefangen werden, dies geschieht allerdings erst langsam, und die anvisierte Konvergenzrate von 1 auch für die mitteln Fehler ℓ_1 und ℓ_2 wird erst spät erreicht.

5.4.4 Fehlerstruktur

Um der für einige Parametersätze schwachen Konvergenz des ℓ_1 - und des ℓ_2 -Fehlers auf den Grund zu gehen, sind in Abbildung 5.7 die räumlichen Verteilungen des absoluten und des relativen Fehlers aufgezeichnet. Zwei Problemstellen werden deutlich sichtbar: der linke und der rechte Gebietsrand. Auf die jeweiligen Fehlerquellen gehen wir einzeln ein.

Am linken Gebietsrand sind DIRICHLET-Randwerte von 0 angelegt, so dass der Fehler auf dem Randpunkt natürlich verschwindet. Gravierend ist aber der direkt innerhalb vom Rand entstehende große Abstand von berechneter zu exakter Lösung. Diese Ungenauigkeit wird von der bereits in der Anfangsbedingung enthaltenen Singularität der Wertfunktion verursacht, die von einem diskreten Gitter nicht hinreichend erfasst werden kann. Die Ableitungen der Wertfunktion divergieren dort bestimmt gegen ∞ , allerdings, wie aus (4.40) ersichtlich, nur mit einer Ordnung von $\eta < 1$. Die Endlichkeit des HJB-Operators wird lediglich von der Konvergenz der Konvektions- und Diffusionskoeffizienten gegen 0 mit einer höheren Rate sichergestellt. Diese beträgt nach (4.41) und (4.42) gerade 1 und ist daher zu einem solchen Ausgleich geeignet. Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren berechnen aber die Koeffizienten in Abhängigkeit der ebenfalls nur genäherten Strategien $(\tilde{c}_{ij}, \tilde{p}_{ij})$, und

deren Ordnung bestimmt sich wiederum aus den vorangegangenen Diskretisierungen der Wertfunktion auf späteren Zeitpunkten. Der entsprechende Ausgleich von genäherten Koeffizienten und genäherten Ableitungen der Wertfunktion funktioniert nicht äquivalent zum analytischen Problem. Daher wird ein solch gearteter Fehler am linken Gebietsrand auch durch ein uniform feineres Gitter nicht adäquat eliminiert. Die Fehlerverteilung bleibt ähnlich.

Offensichtlich stellt aber auch der rechte Rand des Rechengebiets eine Hürde für die Konvergenz dar. Die Ungenauigkeiten werden dort von den NEUMANN-Bedingungen verursacht, die natürlich in der ursprünglichen Problemstellung erst in der Asymptotik erreicht und durch den künstlichen Gebietsabschnitt erheblich verfrüht erzwungen werden. An dieser Stelle wird bewusst ein Fehler in Kauf genommen, da man nicht davon ausgehen kann, die Asymptotik auf einem nicht-gradierten Gitter rechtzeitig zu erreichen, wie auch Abbildung 5.3 deutlich macht. Eine Angabe von korrekten DIRICHLET- oder NEUMANN-Werten für den tatsächlichen rechten Rechengebietsrand ist allein anhand der Problemstruktur nicht möglich.

Im eindimensionalen CRRA-Beispiel kann man sich noch mit den aus (4.37) analytisch berechneten Randwerten behelfen und erreicht damit auch tatsächlich ein wenig genauere Ergebnisse. Die Differenz zu den hier vorgestellten Konvergenzraten ist jedoch minimal, der Gewinn zu vernachlässigen. Des Weiteren ist diese analytische Berechnung schon für Nutzenfunktionen der CARA-Klasse, für die keine geschlossene Lösung bekannt ist, unmöglich, und allgemeinere Nutzenfunktionen oder gar mehrdimensionale Probleme können nicht mit solchen DIRICHLET-Randdaten ausgestattet werden.

Es existieren Möglichkeiten, den Fehler in den Randwerten zu reduzieren, indem zuerst auf größeren Gebieten gerechnet wird, um anschließend die ermittelten Werte in DIRICHLET- oder NEUMANN-Form auf die Ränder eines verkleinerten Gebiets anzuwenden. Doch selbst wenn damit eine Verbesserung des Randfehlers erreicht werden kann, so legen doch Untersuchungen mit korrekten DIRICHLET-Werten auf dem rechten Gebietsrand mit analogen Ergebnissen die Vermutung nahe, dass die Konvergenz des Fehlers maßgeblich von der singulären Struktur der sich ergebenden Lösung gebremst wird. Diese Singularität erfordert höhere Aufmerksamkeit. Ihre adaptive Behandlung mit beispielsweise gradierten Gittern (siehe Unterabschnitt 5.4.1) als A-priori-Adaptivität, ENO/WENO-Schemata (siehe Shu [60]) als Quasi-Adaptivität oder lokaler Gitterverfeinerung mit adäquatem Fehlerschätzer als A-posteriori-Adaptivität sollte eine Fehlerreduktion zur Folge haben. Doch auch für diese Möglichkeiten zeigen die Ergebnisse 5.7 Grenzen auf. Der maximale Fehler, der durch die Singularitätsstelle bestimmt wird, konvergiert mit der Rate $\frac{1}{2}$. Um auch im adaptiven Fall nicht von ihm regiert zu werden, ist eine sehr starke Verfeinerung notwendig, so dass der vom jeweiligen Verfeinerungslevel herrührende Maximalfehler ausschlaggebend wird. So lässt sich mit erheblich weniger Aufwand ein äquivalenter ℓ_1 - oder ℓ_2 -Fehler erreichen, und die in den vorangegangenen Abschnitten gesehenen

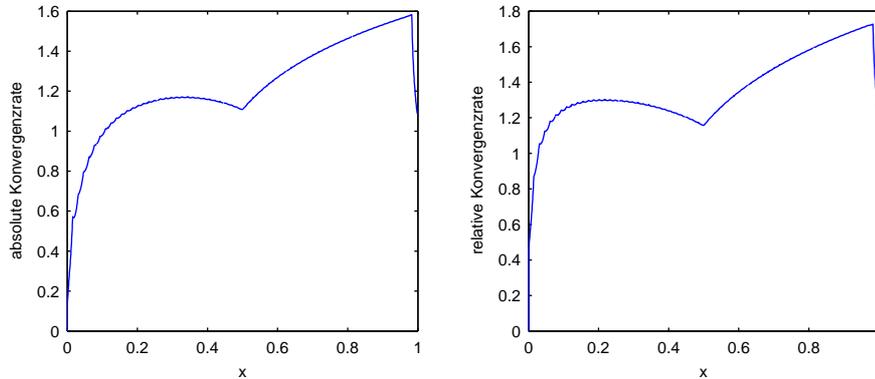


Abbildung 5.8: Die Konvergenzraten des absoluten (links) und des relativen (rechts) Fehlers für das Standardbeispiel mit Zeitlevel 16, über verschiedene Ortslevels gemittelt

Konvergenzraten sind dann aufwand- statt levelweise zu sehen. Eine Verbesserung der Konvergenz des ℓ_∞ -Fehlers ist im Schnitt nicht zu erreichen.

An Abbildung 5.7 sind auch die entsprechenden Ausstrahlungen der Randfehler in das Innere des Rechengebiets deutlich ersichtlich. Der hohe am Rand begangene Fehler wird durch das (mehrfache) Lösen des linearen Gleichungssystems in jedem Zeitschritt auch auf die inneren Punkte transportiert, so dass die dort bessere Möglichkeit, exaktere Werte zu berechnen, von den äußeren Ungenauigkeiten „verschmutzt“ wird. Der Fehler verteilt sich auf das gesamte Gebiet und hat damit globale Auswirkungen. Besonders dominant scheint dabei der Singularitätsfehler am linken Gebietsrand zu sein, der noch sehr weit im Inneren des Gebiets spürbar den lokalen Fehler anhebt.

Dieses Phänomen wird besonders deutlich, wenn analog zur Fehlerstruktur auch die Konvergenz lokal betrachtet wird. Abbildung 5.8 zeigt ortsabhängig die mittleren Konvergenzraten, die über die Formel

$$\frac{\ln\left(\frac{e^l(x)}{e^{l+1}(x)}\right)}{\ln 2}$$

ermittelt wurden. $e^l(x)$ stellt dabei den auf Level l an der Stelle x begangenen Fehler dar. Während sich im Inneren des Gebiets die lokalen Konvergenzraten deutlich über 1 halten, stürzen sie zum linken Rand hin gänzlich ab. Beide Abbildungen 5.7 und 5.8 legen nahe, dass diese Grenzschicht jedoch mit zunehmender Auflösung des Rechengebiets deutlich schmaler wird. Somit wäre für einen nahe der Mitte liegenden Wert x eine erheblich bessere Konvergenzrate erreichbar, als die Maximumnorm suggeriert. Es ist sinnvoll, das vor der Skalierung ursprünglich betrachtete Gebiet

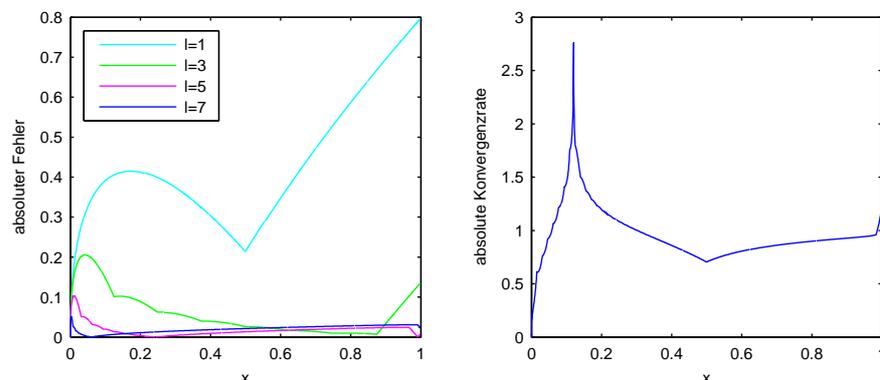


Abbildung 5.9: Der absolute Fehler (links) und seine Konvergenzrate (rechts) für $\mu = 0.1823$ mit Zeitlevel 16. Die Konvergenzrate ist über verschiedene Ortslevels gemittelt.

(siehe Unterabschnitt 5.4.1) so zu wählen, dass der interessierende Vermögenswert möglichst zentral in diesem Gebiet zu liegen kommt. Dann fällt er im skalierten Gebiet in den optimalen Konvergenzbereich, und die Stärken des Verfahrens können voll genutzt werden.

Gänzlich anders stellt sich die Situation für die in Abbildung 5.5 aufgezeigten Grenzfälle einer starken Konvektionsdominanz dar. Für $\mu = 0.1823$ zeigt Abbildung 5.9 den absoluten Fehler und die Konvergenzrate in Abhängigkeit vom Ort. Dem Fehlergraphen ist die konvektionsbedingte, übermäßige Ausstrahlung des Singularitätsfehlers bis weit in das Gebiet hinein klar anzusehen. Während die äußeren Werte zwar deutlich schneller konvergieren als die mittleren, bremsen sie doch die Konvergenz in eben dieser Gebietsmitte ab. Diese hohen Konvergenzraten für äußere Punkte sollten aber keinesfalls darüber hinwegtäuschen, dass sie bei ihrerseits hohen, lokalen Fehlern stattfinden. Einen großen Fehler einzudämmen, geschieht effektiver, als einen bereits kleinen Fehler entgegen dem vom Gebietsrand erzeugten Druck zu verkleinern.

5.4.5 Mehrere Aktien

In diesem Abschnitt wird der Fall eindimensionalen Vermögens, aber eines mehrdimensionalen Markts betrachtet. Ein solcher führt auf eine ebenfalls mehrdimensionale Investitionsstrategie. Der Effekt dieser Mehrdimensionalität beschränkt sich jedoch auf die Konvektions- und Diffusionskoeffizienten in der *eindimensionalen* HJB-Gleichung (4.37). Allerdings treten somit auch die bereits im Fall eines Assets beobachteten Schwierigkeiten auf.

Wie an der analytischen Darstellung (4.42) für den Investitionsparameter \mathbf{p} fest-

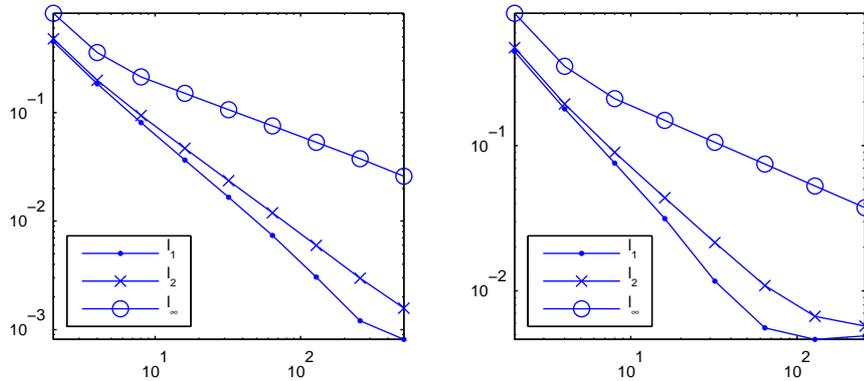


Abbildung 5.10: Konvergenz der l_1 -, l_2 - und l_∞ -Normen für einen zweidimensionalen Markt mit den Standardparametern und $\boldsymbol{\mu} = (0.0392, 0.0488)$, $\sigma = \text{Id}$ (links) und für einen dreidimensionalen Markt mit $\boldsymbol{\mu} = (0.0392, 0.0488, 0.0953)$, $\sigma = \text{Id}$ (rechts)

gestellt werden kann, verschwindet eine Aktie mit höherer Drift als der Zins nicht grundsätzlich vollständig aus dem Portfolio. Da die Matrix $\sigma\sigma^T$ als nicht singulär angenommen worden war, müssen sowohl ihr Bild als auch das Bild ihrer Inversen die Marktdimension aufweisen. Das verhindert für eine Aktie so genannte „down-and-out“-Kriterien, wonach sie für eine unter eine Schranke fallende Drift nicht mehr gehalten würde. Lediglich eine dem Zins entsprechende Drift würde die Aktie aus dem Portfolio entfernen, für andere Werte wird die Aktie gehalten oder leer verkauft, selbst wenn es sich um das schwächste Asset am Markt handelt. Insofern ist es nach einem Blick auf die HJB-Gleichung (4.37) nicht verwunderlich, dass der Konvektionskoeffizient für einen mehrdimensionalen Markt deutlich anwächst. Der Diffusionskoeffizient bleibt von eigenem Wachstum nicht verschont, er ist jedoch quadratisch in \boldsymbol{p} , und das Maximum findet sich, analog zur Diskussion im Unterabschnitt 5.4.3 über den Driftparameter μ , in dem konvektionsdominanten Bereich.

Die Konvektion trägt jedoch erst den Randfehler in das Innere des Gebiets und stört dort die Konvergenz der mittellenden Fehlernormen, wenn sie als mit den Investitionsentscheidungen gewichtete Summe der einzelnen Driften zu groß wird. Besteht nur die Wahl zwischen verschiedenen Aktien mit jeweils niedriger Drift, so ist die Konvektionsdominanz nicht bestimmend für das Fehlerverhalten, zumal sich die risikobehaftete Investition auf die verschiedenen Assets aufteilen kann. Wie bereits oben bemerkt fällt kein Asset aus dem Portfolio heraus, so dass sich das vorhandene Vermögen auf alle Assets verteilt. Diese Investitionsstreuung hat bei moderaten Driften eine im Verhältnis zur Diffusion nicht zu stark wachsende Konvektion zur Folge. Deshalb ist für den Beispielfall zweier Assets mit den Driften $\boldsymbol{\mu} = (0.0392, 0.0488)$ eine ebenfalls stabile Konvergenz ähnlich dem Fall eines Assets mit $\mu = 0.0953$ zu er-

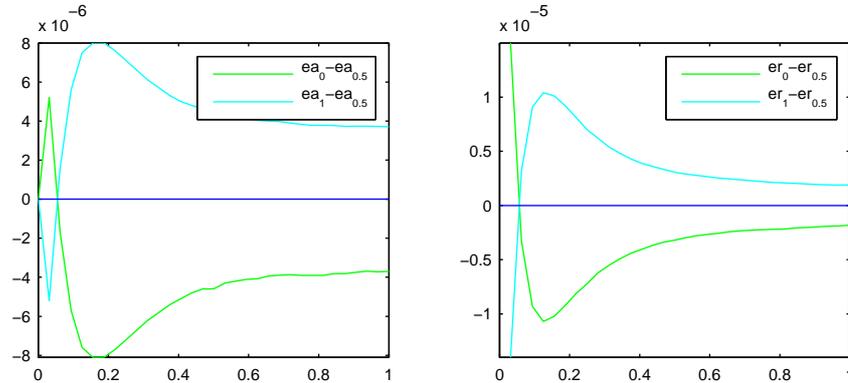


Abbildung 5.11: Der absolute (links) und der relative (rechts) Fehler für explizites ($\theta = 0$) und implizites ($\theta = 1$) Zeitschrittverfahren im Vergleich zum CRANK-NICOLSON-Verfahren mit Parameter $\theta = \frac{1}{2}$

warten. Das wird von der Konvergenzkurve auf der linken Hälfte von Abbildung 5.10 bestätigt.

Im Vergleich dazu haben wir einen dreidimensionalen Markt mit den Driften $\mu = (0.0392, 0.0488, 0.0953)$ berechnet. Die dritte Drift $\mu_2 = 0.0953$ ist dabei gegenüber den anderen beiden relativ groß gewählt. Zu den im vorigen Unterabschnitt 5.4.4 aufgezeigten ähnliche Fehlerstrukturen sind die Folge, so dass auch in diesem Fall eine schwache Konvergenz der mittelnenden Fehlernormen zu beobachten ist. Die einzelnen Fehlerkonvergenzen sind der rechten Hälfte von Abbildung 5.10 zu entnehmen. Die ℓ_∞ -Norm fällt wie gewöhnlich mit einer Rate von $\frac{1}{2}$.

5.4.6 Die Rolle der Nachiteration

Das in Unterabschnitt 3.4.4 vorgestellte Verfahren der Nachiteration soll in diesem Abschnitt noch einmal betrachtet werden. Die Wertfunktion wird je Zeitschritt zuerst mit einem konstant extrapolierten Wert vorbelegt, um die HAMILTONSche Funktion auszuwerten, dann wird das resultierende, lineare Gleichungssystem nach neuen Werten für die Wertfunktion gelöst, und diese werden wiederum zu einer neuerlichen Auswertung der HAMILTONSchen Funktion herangezogen. Für ein explizites Schema ist keine Nachiteration notwendig, da die Werte zum neu zu berechnenden Zeitpunkt nicht in die Auswertung der HAMILTONSchen Funktion einfließen. Die berechneten Werte im expliziten Schema wären in jeder Nachiteration gleich.

Wie bereits in Abschnitt 4.3 erläutert worden ist, wirkt die Nachiteration in jedem Zeitschritt konkavitätserhaltend und damit formbewahrend, eine wichtige von Judd [30] geforderte Eigenschaft des Algorithmus. Sie ist zudem unerlässlich für die

Wohldefiniertheit der Maximierung in der HAMILTONSchen Funktion. Diese wird jedoch nicht nur überhaupt auswertbar, sie wird auch leichter und vor allem schneller auswertbar, wenn die Konkavität zunimmt. Das ist natürlich nicht unbegrenzt der Fall, wird aber am unteren Rand der möglichen Konkavitätsausprägung deutlich. Eine lineare Nutzenfunktion bedeutet eine nicht vorhandene Risikoaversion und damit eine gewisse Indifferenz gegenüber der Konsumhöhe. Betrachten wir noch einmal die zu maximierende Funktion (4.45), so ist deutlich, dass der Konsum vom Ausgleich zwischen Konvektionskoeffizient, in den er negativ linear eingeht und der die risikobehaftete Investition darstellt, und Nutzen bestimmt wird. Wächst der Nutzen asymptotisch aber nicht weniger als linear an, so kann er an keiner Stelle vom Konvektionskoeffizienten dominiert werden, und es existiert kein Maximum. Wächst aber die Konkavität ein wenig, so entsteht nicht nur ein Maximum, es ist auch leichter zu finden. Je konkaver die Nutzenfunktion wird, desto steiler wird die zu maximierende Funktion, und desto schneller und genauer kann das Maximum bestimmt werden. Der Effekt der Konkavität der Nutzenfunktion kann sehr gut an Abbildung 4.4 nachvollzogen werden.

Nach Kushner und Dupuis [36] sowie Fleming und Soner [15] konvergieren durch die Nachiteration für einen CRANK-NICOLSON-Parameter $\theta > 0$ die jeweils durch das lineare Gleichungssystem berechneten Werte gegen die tatsächlichen Funktionswerte der Wertfunktion v . Dies geschieht so erfolgreich, dass für ein Beispiel mit zwei Aktien, wie es im letzten Unterabschnitt vorgestellt wurde, kein Unterschied zwischen berechneten Werten für die drei Parameter $\theta = 0$, $\theta = 1$ und $\theta = \frac{1}{2}$ mehr feststellbar ist. Es legt aber auch den Verdacht nahe, dass dort, wo es stabil ist, das explizite Verfahren bereits ohne Nachiterationen den entsprechend genauesten Wert berechnet.

In Abbildung 5.11 ist die Fehlerdifferenz von CRANK-NICOLSON-Verfahren jeweils zu explizitem und implizitem Verfahren für ein einfaches Beispiel mit Zeitlevel 10 und Ortslevel 5 ohne Nachiterationen dargestellt. Man erkennt deutlich, dass das CRANK-NICOLSON-Verfahren zwischen explizitem und implizitem Verfahren mittelt. Wird der Fehler des impliziten Verfahrens durch Nachiteration verringert, nähert sich auch der CRANK-NICOLSON-Fehler mit gleicher Rate der gewünschten Lösung. Das CRANK-NICOLSON-Verfahren hat nun den Vorteil, zusätzliche Stabilität zu bieten, ohne den im impliziten Verfahren begangenen, größeren Fehler vollständig zu erben. Ein konkretes Beispiel für einen solchen Stabilitätsgewinn ist in Abschnitt 5.5 für die Berechnung einer CARA-Nutzenfunktion aufgeführt.

Auch das modifizierte CRANK-NICOLSON-Verfahren aus Abschnitt 3.4 haben wir an diesem anspruchsvolleren Zwei-Aktien-Problem getestet. Die Nachiterationen wirken auch in diesem Fall so ausgleichend, dass die Normfehler und die Konvergenztabelle kaum von den Ergebnissen des unmodifizierten CRANK-NICOLSON-Verfahrens unterscheidbar sind. Allerdings ist für die Modifikation eine Erhöhung der Nachiterationen festzustellen, so dass das gewöhnliche Verfahren zeiteffektiver ist.

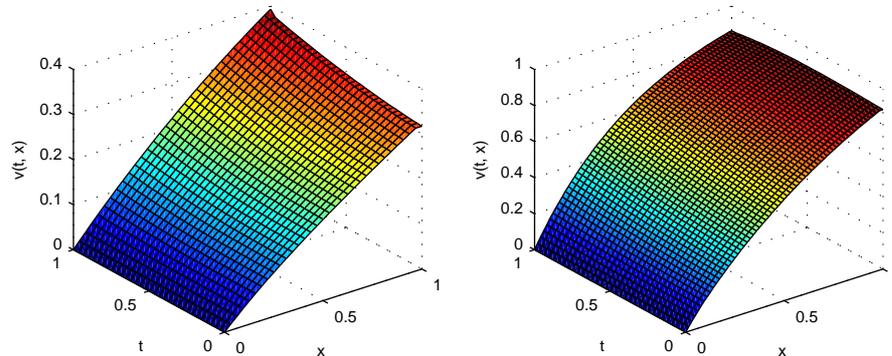


Abbildung 5.12: Die berechneten Wertfunktionen aus CARA-Nutzenfunktionen für Risikoaversionsparameter $\eta = 0.5$ (links) und $\eta = -1$ (rechts)

5.5 Die CARA-Nutzenfunktion

Um nun die Übertragbarkeit des Verfahrens auf andere Nutzenfunktionen zu demonstrieren, wenden wir es auf die in Kapitel 2 bereits eingeführte CARA-Nutzenfunktion an. Diese zeichnet sich durch konstante *absolute* Risikoaversion aus. Da somit nicht mehr die relative Größe im Verhältnis zur Größe des Nutzens, sondern tatsächlich ein absolutes Maß gemessen wird, ist es nicht mehr notwendig, sich bei der Wahl des Risikoaversionsparameters η auf das Intervall $(0, 1)$ zu beschränken. Diese Werte sind in der Tat sogar als sehr klein und wenig relevant anzusehen. Sie bedeuten eine kaum vorhandene Risikoaversion, der Agent wäre demnach fast indifferent zwischen erwartetem Nutzen und Nutzen der erwarteten Ausschüttung. Dies schlägt sich in der Konkavität der Nutzenfunktion nieder. Bei Abwesenheit von Risikoaversion ist keine Konkavität vorhanden, die Nutzenfunktion ist linear, und, wie bereits in Abschnitt 4.3 vermerkt, das Maximierungsproblem kann seine Wohldefiniertheit verlieren. Dass dies nicht der Fall sein muss und sehr wohl für diesen Bereich von η Ergebnisse erzielt werden können, sieht man auf der linken Hälfte von Abbildung 5.12, die eine berechnete CARA-Wertfunktion mit $\eta = 0.5$ darstellt. Wie man ohne weiteres erkennen kann, ist die Funktion aber fast linear in x . Wir haben für die Berechnung den Diskontfaktor β auf seinen Standardwert gesetzt; trotzdem ist der Abzinsungseffekt in der Zeit t deutlich zu sehen.

Bereits in Kapitel 2 haben wir gesehen, dass der Parameter η das konstante ARROW-PRATT-Maß der *absoluten* Risikoaversion $1 - \eta$ impliziert. Einzige Einschränkung an seine Größe ist die Positivität, so dass der Nutznießer risikoscheu bleibt und nicht plötzlich risikofreudig wird. Dies ermöglicht die Wahl von $\eta < 1$ beliebig. Um erste Konvergenztests durchzuführen, haben wir $\eta = 0$ gesetzt, also eine abso-

Level	ℓ_1 -Fehler		ℓ_2 -Fehler		ℓ_∞ -Fehler	
1	0.090843		0.121184		0.267666	
2	0.030675	1.57	0.043451	1.48	0.129404	1.05
3	0.011931	1.36	0.016388	1.41	0.063206	1.03
4	0.005134	1.22	0.006547	1.32	0.030866	1.03
5	0.002328	1.14	0.002758	1.25	0.014878	1.05
6	0.001058	1.14	0.001191	1.21	0.006930	1.10
7	0.000450	1.23	0.000492	1.27	0.002967	1.22
8	0.000150	1.59	0.000162	1.60	0.000989	1.59

Tabelle 5.3: Die Konvergenzraten für die CARA-Nutzenfunktion mit dem Parameter $\eta = 0$

lute Risikoaversion von 1 implementiert. Die Konkavität der Wertfunktion nimmt damit zu, der Abzinsungseffekt wird im Verhältnis etwas geringer. Das Ergebnis des CRANK-NICOLSON-Verfahrens mit den Standardparametern der Tabelle 5.1 kann aus Tabelle 5.3 abgelesen werden. Die Konvergenzraten für den ℓ_1 - und ℓ_2 -Fehler liegen deutlich über 1, die ℓ_∞ -Norm konvergiert mit einer Rate von knapp 1. Der Anstieg der Raten im letzten Schritt ist durch die Fehlermessung zu erklären, die in Ermangelung einer analytischen Lösung jeweils im Vergleich zu einem berechneten, höheren Level stattfindet.

Da die CARA-Nutzenfunktion weder in der Anfangsbedingung noch im Funktional, das die Bewegung der Wertfunktion über die Zeit beschreibt, eine Singularität aufweist, soll aufgezeigt werden, dass eine Sensitivitätsanalyse für das gewählte Verfahren bei Berechnung einer CARA-Wertfunktion günstiger ausfällt. Wenn verschiedene Parameter so gewählt werden, dass die Konvektion dominant wird, sollte sich auf Grund der Downwind-Diskretisierung dennoch ein stabiles Verfahren ergeben. Ein übermäßiger Randfehler, der sich mit der Konvektion in das Gebiet hineinschiebt und damit die ℓ_1 - und ℓ_2 -Fehler bremst, sollte nicht mehr auftreten. Die erstellten Konvergenzgraphen 5.13 bestätigen diese Annahmen. Dort ist die Konvergenz für den Volatilitätswert $\sigma = 0.5$ und für den Driftwert $\mu = 0.0953$ eingezeichnet, die auch für alle Fehlernormen über 1 liegt. Die Größe der Fehler ist sehr ähnlich zu denen für die Standardparameter. Während der niedrigere Volatilitätswert mit Zeitlevel 7 gerechnet werden konnte, musste für den hohen Driftwert ein höheres Zeitlevel von 10 gewählt werden. Eine nochmalige Betrachtung der CFL-Bedingung aus Lemma 3.4 macht auch deutlich, woran diese Einschränkung liegt. In der Formulierung des stochastischen Kontrollproblems für optimale Portfolios wird die Diffusionsmatrix $\bar{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})$ einzig von der in \mathbf{a} enthaltenen Investitionsstrategie \mathbf{p} und der Volatilität beeinflusst. Für festes \mathbf{p} geht die Volatilität σ in die Diagonale und die anderen Einträge gleichermaßen ein, so dass sich die Diagonaldominanz erhält und die CFL-Bedingung nicht restriktiver wird. Dies sollte auch für eine Vergrößerung von σ der

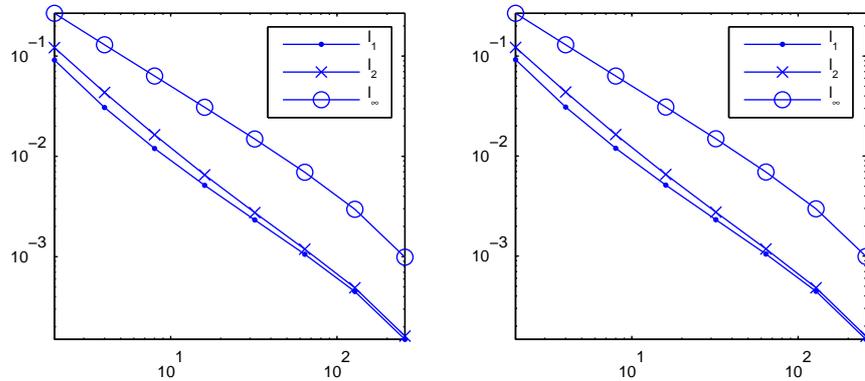


Abbildung 5.13: Konvergenz für $\sigma = 0.5$ (links) und $\mu = 0.0953$ (rechts) bei Verwendung der CARA-Nutzenfunktion

Fall sein, an der wir hier aber nicht interessiert sind. Im eindimensionalen Fall ist die Diagonaldominanz ohnehin irrelevant, und die CFL-Bedingung wird großzügiger für Δt . Bei Erhöhung der Drift μ verhält sich die CFL-Bedingung allerdings genau umgekehrt. Sie geht positiv in den Konvektionskoeffizienten $\mathbf{f}(t, x, \mathbf{a})$ ein, der sich nicht selbst ausgleicht und daher die untere Schranke für Δt deutlich vergrößert. Eine restriktivere Handhabung des Zeitlevels kann also geradezu erwartet werden.

Beide Berechnungen sind mit dem niedrigen und nicht starke Konkavität implizierenden Risikoaversionsparameter $\eta = 0$ durchgeführt worden (vergleiche Abschnitt 5.4.6). Damit bewegen wir uns am unteren Rand der gerechtfertigten Risikoaversion und gleichzeitig in einem für den Algorithmus durchaus anspruchsvollen Bereich. Abgesehen von einer stärkeren Einschränkung der Zeitschrittweite ist durch die ungeminderte Konvergenz in diesen Fällen seine Robustheit bei der Berechnung einer CARA-Wertfunktion aufgezeigt.

Bereits für ein einfaches Beispiel zeigt sich für die CARA-Nutzenfunktion der Stabilitätsgewinn, den das CRANK-NICOLSON-Verfahren gegenüber dem expliziten erzielt. Wir haben dazu die Risikoaversion auf 2 gesetzt, η also auf -1 , ein plausibler Wert für eine absolute Risikoaversion. Wird nun eine explizite Zeitschrittberechnung für ein Zeitlevel von 5 und ein Ortslevel von 6 vorgenommen, so ergeben sich schon nach einem Drittel der Zeitschritte immens große Fehler, die nicht mehr ausgeglichen werden können. Der berechnete Funktionswert für v liegt ungefähr bei 10^{300} . Offensichtlich ist dies durch einen Konkavitätsverlust in der Berechnung der Wertfunktion zu begründen, durch den das Maximierungsproblem nicht mehr wohldefiniert ist. Der gefundene Maximalwert sollte also eigentlich ∞ sein, wird aber numerisch abgeschnitten. Diese Instabilität gleicht das CRANK-NICOLSON-Verfahren durch seine Nachiterationen aus. Die Nachiterationen wirken formerhaltend, das Maximierungs-

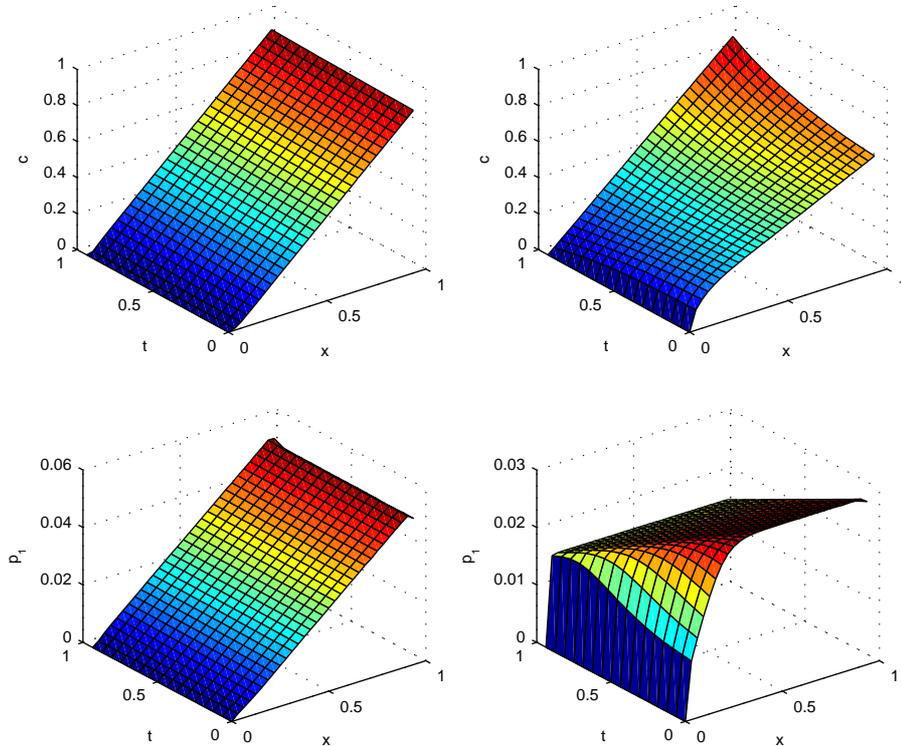


Abbildung 5.14: Konsum \tilde{c} und Investition p_1 in das zweite Asset bei Verwendung der CRRA-Nutzenfunktion (links) und bei Verwendung der CARA-Nutzenfunktion (rechts)

problem bleibt wohldefiniert, und eine sinnvolle Berechnung der Wertfunktion ist möglich. Die entsprechend aufgestellte Wertfunktion ist in Abbildung 5.12 auf der rechten Hälfte zu sehen. Es darf aber nicht unerwähnt bleiben, dass die Rechenzeit wegen der Nachiterationen deutlich ansteigt.

Ein Vergleich der jeweils für die CRRA- und CARA-Nutzenfunktion erhaltenen Strategien lohnt sich. Die für einen Markt mit zwei Assets ($\boldsymbol{\mu} = (0.0392, 0.0488)$, $\sigma = \text{Id}$) erhaltene Konsumstrategie $\tilde{c}(t, x)$ und die Investition in das zweite Asset $p_1(t, x)$ sind in Abbildung 5.14 zu sehen. Da die Investitionsstrategie für das erste Asset qualitativ p_1 gleich ist und sich nur in der Höhe unterscheidet, haben wir auf ihre Darstellung verzichtet. Ebenso haben wir den rechten Gebietsrand nicht dargestellt, da die Strategie dort nie ermittelt wird und der Wert rein willkürlich wäre. Wie wir bereits in den Formeln (4.41) und (4.42) gesehen haben, führt die Verwendung der singulären CRRA-Nutzenfunktion zu linearen Strategien für Konsum und Investition. Bei Verwendung der CARA-Nutzenfunktion fällt der Ausgleich

zwischen Konsum und Anlage sehr viel stärker ins Gewicht, und er bezieht die risikobehafteten Investitionen mit ein. Um den stark steigenden Konsum zu finanzieren, werden hauptsächlich die beiden Assetanlagen aufgebraucht, die risikolose Anlage verändert sich analog zum CRRA-Fall kaum. Die risikobehaftete Anlage strebt einer ortshomogenen Verteilung entgegen, einzig der linke DIRICHLET-Randwert wirkt dagegen. Das CARA-Investitionsverhalten verläuft sozusagen dem CRRA-Verhalten entgegengesetzt.

5.6 Zweidimensionale Berechnungen

In diesem Abschnitt wenden wir uns dem in Kapitel 4 vorgestellten mehrdimensionalen Marktmodell zu. In mehr als einer Dimension ist auch für die CRRA-Nutzenfunktion keine analytische Lösung bekannt, so dass der Einsatz numerischer Verfahren unerlässlich ist. Bereits in zwei Dimensionen ist der so genannte *Fluch der Dimension* deutlich spürbar, so dass ein Rückgriff auf die Kombinationstechnik und die dünnen Gitter aus Abschnitt 3.5 sinnvoll erscheint. Wir berechnen zweidimensionale Lösungen mit vollen und dünnen Gittern, gehen auf Asymmetrien für unterschiedliche Wahl der Parameter ein und stellen den isotropen und den Kombinationsansatz gegenüber.

Da der Anwender hauptsächlich an der Auswertung der Wertfunktion und der Bestimmung der Strategie zum momentanen Zeitpunkt interessiert ist, werden die Ergebnisse für $v(0, \cdot)$ präsentiert. Insofern wird auch bei der Kombinationstechnik für dünne Gitter zuerst die Wertfunktion zum Zeitpunkt 0 auf den benötigten anisotropen Gittern mit den Levels $\mathbf{l} = (l_0, l_1)$ berechnet und dann die Kombinationsformel (3.29) für die so erzeugten $v_{\mathbf{l}}(0, \cdot)$ angewendet. Dieses Vorgehen erzeugt möglichst gute, anisotrope Approximationen für die momentane Wertfunktion und kombiniert sie erst dann. Ein frühzeitiger Approximationsfehler, der durch den Einsatz der Kombinationstechnik in jedem Zeitschritt begangen und dann über die Zeit propagiert würde, wird somit umgangen.

Neben dem Vermögen sind weitere Variablen von der Dimension abhängig. Während bereits in Unterabschnitt 5.4.5 auch für den eindimensionalen Markt mehrdimensionale Investitionsstrategien anzutreffen waren, werden nun ebenso mehrere Konsumstrategien betrachtet. Je Markt ist über mindestens eine Investitions- und genau eine Konsumgröße zu entscheiden. Nutzen wird folglich aus mehr als einer Konsummöglichkeit gezogen, und wir betrachten die in Kapitel 2 gewählte Verallgemeinerung des *kumulierten* Nutzens. Stellt u_k eine eindimensionale Nutzenfunktion dar, die eine Präferenzordnung für Dimension k beschreibt, so wird der kumulierte Nutzen über die Summe der einzelnen Nutzen aus den unterschiedlichen Dimensio-

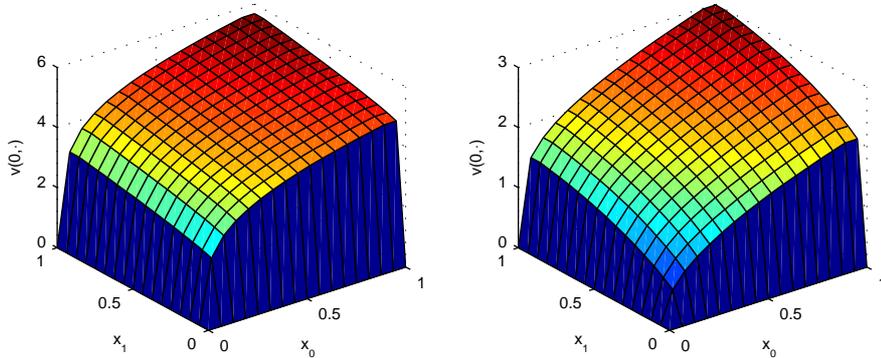


Abbildung 5.15: Die zweidimensionale CRRA-Wertfunktion mit $\eta = (0.25, 0.75)$ (links) und die gemischte CRRA-CARA-Wertfunktion mit $\eta = (0.5, -2)$

nen definiert als

$$u(\mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k(c_k).$$

Zuerst betrachten wir eine kumulierte Nutzenfunktion, die sich aus CRRA-Nutzenfunktionen in jeder Dimension zusammensetzt. Als eindimensionale Nutzenfunktionen dienen die bekannten Wurzelfunktionen wie in Beispiel 4.1, jeweils mit einem dimensionsabhängigen Risikoaversionsparameter η_k . Die Anfangsbedingung der HJB-Gleichung lautet also

$$v(T, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\eta_k} x_k^{\eta_k}. \quad (5.3)$$

Die berechnete Wertfunktion für stark unterschiedlich gewählte Risikoaversionen auf zwei Märkten sieht man auf Abbildung 5.15 links. Auf dem ersten Markt ist $\eta_0 = 0.25$ gesetzt und damit eine recht große relative Risikoaversion implementiert. Auf dem zweiten Markt dagegen liegt η_1 bei 0.75 und impliziert eine schwache Risikoaversion. Die Auswirkungen einer solchen Präferenzordnung in einer Dimension haben wir bereits in Abschnitt 5.1 gesehen. In zwei Dimensionen kombinieren sich beide Effekte, so dass in der ersten Richtung starke Konkavität zu erkennen ist, während die zweite Richtung viel flacher ist und geringere Krümmung aufweist.

Auch eine Mischung aus unterschiedlichen Präferenzstrukturen ist berechenbar. Wir haben beispielhaft eine Wertfunktion aufgestellt, die in ihrer ersten Dimension eine konstante relative Risikoaversion von 0.5 und in ihrer zweiten Dimension eine konstante absolute Risikoaversion von 3 aufweist. Die eingesetzte Nutzenfunktion

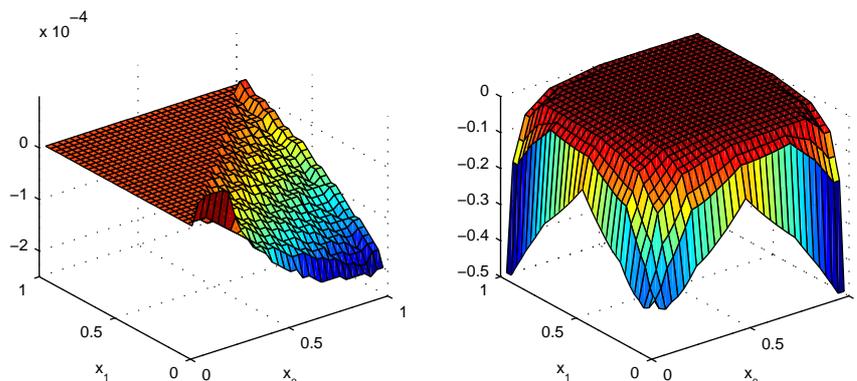


Abbildung 5.16: Die Asymmetrie der Vollgitterlösung mit den Driften $\mu_0 = 0.0392$ und $\mu_1 = 0.0488$ (links) und die Differenz zwischen Dünn- und Vollgitterlösung (rechts)

ist also eine CRRA-CARA-Kombination der Form

$$u(\mathbf{c}) = 2\sqrt{c_0} + 1 - e^{-3c_1}.$$

Durch die Wahl von $\eta_1 = -2$ ist diese Nutzenfunktion und damit die Wertfunktion auch in der zweiten Dimension hinreichend konkav, als dass ein sinnvolles Maximum gefunden werden kann (siehe Unterabschnitt 5.4.6). Diese stärkere Konkavität führt zu einer ähnlichen Struktur wie die von einer CRRA-Nutzenfunktion erzeugte, so dass der Unterschied zu einer simulierten, nicht gemischten Wertfunktion optisch weniger auffällt. Die entsprechende Grafik findet man auf der rechten Seite von Abbildung 5.15.

Da auch in mehreren Dimensionen von einer zunehmenden Sättigung des Nutzens bei steigendem Konsum in jedem Markt auszugehen ist, können auch jetzt NEUMANN-Randbedingungen von 0 an die rechte Seite des Rechengebiets angelegt werden. Damit sind diejenigen Ränder gemeint, für die $x_k > 0$ für alle Dimensionen k gilt. Mangels analytischer Randdaten haben wir DIRICHLET-Werte von 0 für den linken Rand, d. h. $x_k = 0$ für mindestens ein k , vorgegeben. Wir beschränken uns auf Berechnungen *ohne* Transfer, so dass aus einem Markt, auf dem kein Kapital vorhanden ist, kein Nutzen mehr gezogen werden kann. Für diesen Markt gelten dann die Randbedingungen des eindimensionalen Falls, also DIRICHLET-Werte von 0. Im zweidimensionalen ist dann nur noch der andere Markt aktiv, so dass die eindimensionale Wertfunktion berechnet und als Randwert eingesetzt werden könnte. Dies erscheint jedoch unter Betrachtung der dafür notwendigen Laufzeiten sehr aufwändig. Es ist außerdem nur sinnvoll, wenn alle bis auf einen Markt kein Kapital aufweisen, also $x_k > 0$ für genau ein k , und daher als allgemeines Konzept zur Bestimmung von Randdaten in vielen Dimensionen nicht einsetzbar. Da 0 eine untere

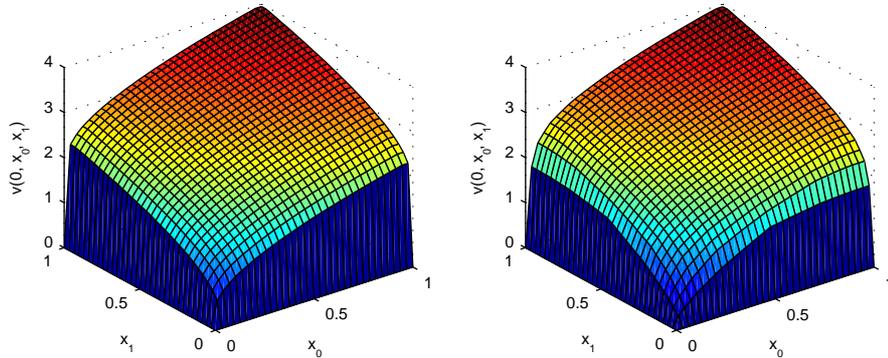


Abbildung 5.17: Die Vollgitterlösung (links) und die durch die Kombinationstechnik erzeugte Dünngitterlösung (rechts) mit $\mu_0 = 0.0392$ und $\mu_1 = 0.0488$. Dargestellt ist Ortslevel 5.

Schranke für die Wertfunktion ist und für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ auch erreicht wird, erscheinen die gewählten DIRICHLET-Werte als sinnvoll.

Um die Konvergenz von voll anisotropen und kombinierten Dünngitterlösungen zu vergleichen, haben wir eine zweidimensionale CRRA-Nutzenfunktion im Sinne von (5.3) eingesetzt. Da auch davon auszugehen ist, dass ein Agent homogene Präferenzordnungen gleichermaßen über alle Märkte besitzt, haben wir auch die Risikoavversionsparameter einheitlich als $\boldsymbol{\eta} = (0.5, 0.5)$ gewählt. Damit sich die Märkte dennoch voneinander unterscheiden, kommen unterschiedliche Driften zum Einsatz. Auf dem ersten Markt entwickelt sich das volatile Asset mit einer Rate von $\mu_0 = 0.0392$ und auf dem zweiten Markt mit $\mu_1 = 0.0488$. Damit sind auf dem ersten Markt nicht so große Entwicklungsmöglichkeiten vorhanden wie auf dem zweiten, und es entsteht eine leichte Asymmetrie der Wertfunktion. Sie ist sehr gering und optisch kaum auszumachen, an den Daten aber deutlich ablesbar. Bei einer isotropen Berechnung mit den Levels (5, 5) beträgt die Differenz der beiden ecknahen Punkte $(0.03125, 1)$ und $(1, 0.03125)$ ungefähr $2.1 \cdot 10^{-4}$. Diese berechnete Lösung ist in Abbildung 5.17 auf der linken Seite dargestellt. Um die Asymmetrie dennoch sichtbar zu machen, kann der von den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ aufgespannte Bereich der Wertfunktion an der Diagonalen durch $(0, 0)$, $(1, 1)$ gespiegelt und von der gesamten Wertfunktion subtrahiert werden. Das Dreieck aus $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(1, 0)$ verdeutlicht dann den asymmetrischen Anteil der Wertfunktion. Abbildung 5.16 zeigt links dieses Dreieck ohne den linken Gebietsrand. Für die Wahl gleicher Driften für beide Märkte stellt sich eine exakte Symmetrie ein.

Die Lösung, die sich nun aus der Kombinationstechnik (siehe Abschnitt 3.5) ergibt, weist im Vergleich zu der Vollgitterlösung deutlich den Einfluss der stark anisotropen Levels auf, die in der Kombinationsformel (3.29) auftreten. Sie ist auf der rechten

Level	ℓ_1 -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$	ℓ_2 -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$	ℓ_∞ -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$
1	1.427470		1.468260		2.235990	
2	0.758211	1.88	0.896874	1.64	2.122570	1.05
3	0.402638	1.88	0.588271	1.52	2.062800	1.03
4	0.211497	1.90	0.392363	1.50	2.019420	1.02
5	0.109728	1.93	0.262236	1.50	1.968000	1.03
6	0.055780	1.97	0.173376	1.51	1.867980	1.05
7	0.027267	2.05	0.110620	1.57	1.671870	1.12
8	0.012221	2.23	0.063816	1.73	1.285130	1.30

Tabelle 5.4: Die Konvergenzquotienten der einzelnen Fehlernormen für das zweidimensionale Kombinationsverfahren

Hälfte von Abbildung 5.17 zu sehen. Ein Knick auf den jeweiligen Achsenhälften ist leicht erkennbar, der aus den Levels $(1, n - 1)$ und $(n - 1, 1)$ stammt. Diese Levels senken auch die Werte in der Nähe des linken Rands, da sie in einer der Dimensionen nur einen inneren Punkt enthalten und sich die DIRICHLET-Bedingungen restriktiv auswirken. Wie man an der rechten Seite von Abbildung 5.16 erkennen kann, macht die Kombinationstechnik an diesen Stellen auch den größten Fehler. Dieser ist zusätzlich durch die Singularitäten der betrachteten CRRA-Nutzenfunktionen erklärbar. Wie bereits im eindimensionalen Fall könnte ein adaptives Dünngitterverfahren eingesetzt werden, um den singulären Rand feiner aufzulösen.

Wir betrachten nun das Konvergenzverhalten der Dünngitter- gegen die Vollgitterlösung, wobei wie oben die Parameter auf $\boldsymbol{\eta} = (0.5, 0.5)$, $\boldsymbol{\mu} = (0.0392, 0.0488)$ und $\sigma = \text{Id}$ gesetzt sind. Zuerst wird dazu eine Vollgitterlösung auf einem feinen Gitter erzeugt, dann werden Dünngitterlösungen auf niedrigeren Levels berechnet und auf das feine Level interpoliert. Somit sind sie vergleichbar und die entsprechenden diskreten Normen können bestimmt werden. Natürlich wird auf diese Weise lediglich die Konvergenz der Kombinations- gegen die Vollgitterlösung festgestellt, bei der es sich wiederum nur um eine Approximation handelt. Da aber die isotrope Vollgitterlösung die genaueste vorliegende Repräsentation der exakten Lösung ist, bietet ein Vergleich zu ihr einen wichtigen Anhaltspunkt für Aussagen über die Güte der Dünngitterapproximation.

Analog zu Griebel, Schneider und Zenger [20] betrachten wir für die Konvergenz den Quotienten aus Fehlern aufeinander folgender Levels. Die Autoren erhalten für ein rein diffusives elliptisches Problem mit Singularität Quotienten von etwa 1.6 in der ℓ_2 - und von annähernd 1.2 in der ℓ_∞ -Norm im Vergleich mit einer bekannten Referenzlösung. Die Konvergenzquotienten in Tabelle 5.4 erreichen in der ℓ_2 -Norm eine ähnliche Größe von 1.5 und bezeugen somit, dass die Kombinationstechnik auch bei dem vorliegenden singulären, parabolischen Reaktions-Konvektions-Diffusions-

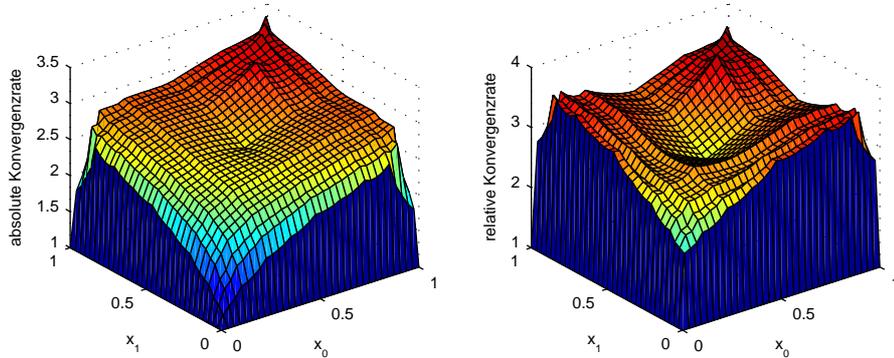


Abbildung 5.18: Die gemittelten Konvergenzquotienten des absoluten (links) und des relativen (rechts) Fehlers, interpoliert auf Level 5

Problem sinnvoll eingesetzt werden kann. Die ℓ_1 -Norm weist sogar einen noch größeren Konvergenzquotienten von annähernd 1.9 auf. Lediglich die Rate des maximalen Fehlers steigt erst gegen Ende auf über 1.1, während sie bei Griebel, Schneider und Zenger [20] früher erreicht wird. Wir machen dies an der Ausdehnung des von der Singularität beeinflussten Teils des Rechengebiets fest. Während die erwähnten Autoren eine Punktsingularität auf dem Rand des Rechengebiets untersuchen, liegt hier eine Singularität auf einer gesamten Mannigfaltigkeit der Dimension $N - 1$ vor, nämlich einer Hälfte des gesamten Rands. Die Ausstrahlung dieser Fehlerquelle ist um einiges stärker als die eines einzigen Punkts, was auch an der Fehlerstruktur in Abbildung 5.16 rechts abgelesen werden kann.

Um dieses Ergebnis genauer zu beleuchten, untersuchen wir die Konvergenzquotienten nun in Abhängigkeit vom Ort. Der Ort $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ beschreibt die Vermögensverteilung auf die beiden Märkte. Im ersten Markt kann also ein Vermögen von x_0 für Investition und Konsum eingesetzt werden, während im zweiten Markt Geld in der Höhe x_1 zur Verfügung steht. Nun kann punktweise der interpolierte Wert einer mit der Kombinationstechnik erhaltenen Lösung auf einem Level $\tilde{l} < l$ mit dem Wert der isotropen Lösung auf dem vollen Gitter mit Levels (l, l) verglichen und der ortsabhängige Fehler $e^{\tilde{l}}(\mathbf{x})$ aufgestellt werden. Der ortsabhängige Konvergenzquotient ergibt sich dann jeweils als

$$\frac{e^{\tilde{l}-1}(\mathbf{x})}{e^{\tilde{l}}(\mathbf{x})}. \quad (5.4)$$

Wir haben für die Rechnungen aus Tabelle 5.4 diese Werte für jeden Punkt des vollen, isotropen Gitters aufgestellt und über verschiedene Levels gemittelt. Die absoluten und relativen Konvergenzquotienten werden in Abbildung 5.18 präsentiert.

Level	ℓ_1 -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$	ℓ_2 -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$	ℓ_∞ -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$
1	1.427470		1.468260		2.235990	
2	0.681711	2.09	0.831047	1.77	2.109520	1.06
3	0.324239	2.10	0.516727	1.61	2.049820	1.03
4	0.153120	2.12	0.333814	1.55	2.004960	1.02
5	0.071601	2.14	0.218601	1.53	1.937110	1.04
6	0.032560	2.20	0.141682	1.54	1.804350	1.07
7	0.013698	2.38	0.087272	1.62	1.542940	1.17
8	0.004508	3.04	0.045662	1.91	1.025900	1.50

Tabelle 5.5: Die Konvergenzquotienten der einzelnen Fehlernormen für zweidimensionale volle Gitter

Der Fehler auf dem DIRICHLET-Rand verschwindet ohnehin auf jedem Level, so dass dort nichts konvergieren kann. Deutlich erkennbar ist aber die langsame Konvergenz in der Nähe dieser Ränder, wobei der Ursprung als doppelte Singularität, d. h. Singularität in beide Richtungen, den niedrigsten Quotienten aufweist. Doch auch die NEUMANN-Bedingungen treten in den Ecken $(0, 1)$ und $(1, 0)$ als erhebliche Konvergenzbremser auf. Je weiter man sich jedoch vom linken Gebietsrand entfernt, womit $x_k = 0$ für mindestens ein k gemeint ist, desto besser wird die Konvergenz. In der Nähe des vierten Eckpunkts $(1, 1)$ steigt der gemessene gemittelte Quotient sogar auf einen Wert von über 3 an. Der für die Kombinationstechnik übliche Einfluss der niedrigen anisotropen Levelkombinationen ist deutlich sichtbar und führt zu einer leichten Senke im Mittelpunkt des Gebiets. Die Struktur der Diagonalen ist dabei sehr ähnlich zum eindimensionalen Fall aus Abbildung 5.8. Der Vergleich zu dem bei Griebel, Schneider und Zenger [20] angegebenen Wert für den Punkt $(-0.25, 0.25)$, der hier dem Punkt $(0.25, 0.25)$ mit gleichem Abstand und gleicher Lage zur Singularitätsecke entspricht, fällt zufriedenstellend aus. Bei den vorgenannten Autoren erreicht die Rate 2.7 für die von der dortigen Punktsingularität stark beeinflusste Stelle, hier liegt die gemittelte Rate bereits auf niedrigen Levels bei 2.4. Wie oben erwähnt ist das singuläre Gebiet im vorliegenden Fall allerdings erheblich größer. Die Messungen deuten jedoch darauf hin, dass bereits in akzeptablem Abstand vom Bankrott auf einem der Märkte mit der Kombinationstechnik hinreichend exakt gerechnet werden kann.

Zum Vergleich wird auch die Konvergenztabelle 5.5 für die isotropen Vollgitterapproximationen angeführt. Die Konvergenzraten übersteigen wie erwartet die Raten für das dünne Gitter, übertreffen diese aber nicht in einem Maß, das ihre Überlegenheit demonstrieren würde. Am deutlichsten fällt der Unterschied im Konvergenzquotienten für die ℓ_1 -Norm auf, der für die isotrope Lösung durchschnittlich um 0.2 besser ist als für die Dünngitterlösung. Am schwächsten fällt er dagegen bei der ℓ_∞ -

Norm aus, die nicht die lokale Konvergenz über das gesamte Gebiet mittelt, sondern anspruchsvoll den größten begangenen Fehler misst. Dieser liegt immer noch deutlich in der Nähe des singulären Gebietsrands und stört damit die Maximumsnorm stark, ohne den auf dem Rest des Gebiets sehr kleinen lokalen Fehler zu berücksichtigen. Die isotrope Approximation leidet also genauso unter dem schweren Randfehler wie die Dünngitternäherung, so dass ihre Exaktheit in dem entscheidenden randnahen Streifen nicht zunimmt. Es folgt also auch im mehrdimensionalen Fall, dass wie im eindimensionalen das Gebiet so gewählt werden sollte, dass das aktuelle Vermögen möglichst mittig im Gebiet liegt. Der Gebietsmittelpunkt sollte lieber etwas links vom betrachteten Vermögen liegen als rechts davon.

Auch eine zweidimensionale CARA-Nutzenfunktion wurde auf die Konvergenz der Kombinationslösung gegen eine Vollgitterlösung untersucht. Dabei sind die Risikoaversionsparameter $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \eta_1)$ sensibler zu wählen als im eindimensionalen Fall. Da homogene Nutzenstrukturen auf beiden Märkten angenommen wurden, sind beide Risikoaversionen auf 3 und damit $\eta_0 = \eta_1 = -2$ festgelegt. Wie schon Abbildung 5.15 für eine gemischte CRRA-CARA-Nutzenfunktion vermuten lässt, ist die Lösungsstruktur für eine CARA-Funktion ähnlich zu der für eine CRRA-Funktion, und der Kombinationsansatz liefert tatsächlich zu den oben erwähnten Raten analoge Ergebnisse. Auch wenn die Konvergenzquotienten mindestens den in Tabelle 5.4 angegebenen entsprechen, so liegen sie doch so nahe daran, dass sie nicht noch einmal in einer gesonderten Tabelle aufgeführt zu werden brauchen. Sie unterscheiden sich frühestens in der zweiten Nachkommastelle von diesen. Der in einer Dimension beobachtete Verbesserungseffekt bei Betrachtung einer CARA-Nutzenfunktion überträgt sich also nicht auf mehrere Dimensionen. Dies ist einerseits an der restriktiveren Wahl der Risikoaversionen festzumachen, die eine gewisse Mindestkonkavität für die Maximierung erzeugen, andererseits an dem logarithmischen Faktor, der die Konvergenzordnung des Kombinationsverfahrens senkt.

Die beiden Märkte brauchen nicht wie bisher als unkorreliert betrachtet zu werden. Stattdessen können sie sich sehr wohl gegenseitig beeinflussen oder beide von gemeinsamen Drittfaktoren beeinflusst werden. Dies wird gewöhnlich mit einem N -dimensionalen WIENER-Prozess modelliert, der sich durch eine Korrelationsmatrix auf die einzelnen Elemente des stochastischen Systems verteilt. Dieses Verhalten sieht man in Gleichung (4.15) in der Form einer stochastischen Differentialgleichung und in Gleichung (4.16) in der Form ihrer Lösung. Setzt man, wie oben geschehen, die Identität als Korrelationsmatrix ein, so entkoppeln die einzelnen Prozesse und jede Dimension des WIENER-Prozesses geht nur in einen Aktienprozess ein. Um nun den Einfluss von Korrelation zu testen, haben wir die Matrizen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$ für Berechnungen eingesetzt. Um den Asymmetrieeffekt ungleicher Driften auszuschalten, werden beide auf 0.0392 gehalten. Da die Korrelation in die HJB-Gleichung nur als Diffusionskoeffizient in Form von $\sigma\sigma^T$ und damit symmetrisch eingeht, sind Effekte ähnlich der Variierung der Driften zu

Level	volles Gitter	dünnes Gitter
1	40000ms	40000ms
2	430000ms	330000ms
3	2s, 340000ms	1s, 430000ms
4	11s, 940000ms	5s, 290000ms
5	48s, 110000ms	14s, 270000ms
6	3m, 21s, 960000ms	39s, 410000ms
7	14m, 30s, 240000ms	1m, 37s, 480000ms
8	58m, 52s, 922704ms	3m, 7s, 700000ms

Tabelle 5.6: Die Laufzeiten für die Berechnung von $v(0, \cdot)$ auf einem vollen, isotropen und mit der Kombinationstechnik auf einem dünnen Gitter bei 5 Nachiterationen und 2 Zeitschritten

erwarten. Statt der Konvektion wird nun die Diffusion dimensionsweise gewichtet, und zwar in den ersten beiden Fällen ungleichmäßig. Die obere Dreiecksmatrix hebt das Gewicht für die erste Dimension deutlich an, so dass der entsprechende Investitionsparameter und die Krümmung in dieser Richtung eine größere Rolle spielen. Die untere Dreiecksmatrix bestärkt dagegen die zweite Dimension, und die voll symmetrische Matrix führt zu einer ebenso symmetrischen Lösung. Es ergeben sich sowohl für die Vollgitter- als auch für die Dünngitterlösung zu Abbildung 5.16 analoge Lösungsstrukturen. Auch das Konvergenzverhalten wird durch die Korrelation nicht beeinflusst. Bei der Aufstellung der HJB-Gleichung für unkorrelierte Prozesse, also bei rein diagonalem σ , wird der Diffusionsteil zu einem dimensionsweise gewichteten LAPLACE-Operator. Dann ist die Einbeziehung der gemischten zweiten Ableitungen nicht mehr notwendig, und die Diskretisierung der Diffusion kann ausschließlich mit zentralen Differenzen erfolgen. Das bringt einen zusätzlichen Laufzeitgewinn, der eine Vollgitterberechnung mit den Levels (8, 8) statt in 85 Minuten schon in 66 Minuten erlaubt.

Die Zeitersparnis bei der Berechnung der Wertfunktion mittels der Kombinationstechnik ist erheblich. Sie ist leicht zu erklären, denn die Anzahl der zu berechnenden Punkte für die in der Kombinationstechnik eingesetzten anisotropen Räume ist jeweils sehr viel geringer als die für ein volles Gitter entsprechender Auflösung. Der hierarchische Raum $V_n^{(\infty)}$, der das volle Gitter darstellt, entspricht in dem zweidimensionalen Beispiel dem nodalen, anisotropen Raum $V_{(n,n)}$ mit $(2^n + 1)^2 = \mathcal{O}(2^{2n})$ Punkten. Im Dünngitterraum $V_n^{(1)}$ werden aber nur diejenigen anisotropen Räume eingesetzt, deren ℓ_1 -Levelnorm gerade n ist, die also nur $(2^{l_1} + 1)(2^{l_2} + 1) = \mathcal{O}(2^n)$ Punkte enthalten. Obwohl in durchaus vielen unterschiedlichen anisotropen Räumen Lösungen berechnet werden müssen, bleibt die Laufzeit der Berechnungen weit unter derjenigen, die zur Erzeugung einer Vollgitterlösung notwendig ist. Das ist leicht

Level	ℓ_1 -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$	ℓ_2 -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$	ℓ_∞ -Fehler	$\frac{e^{l-1}}{e^l}$
1	2.308600		2.486420		4.017530	
2	1.144160	2.02	1.480860	1.68	3.713980	1.08
3	0.499033	2.29	0.869517	1.70	3.162990	1.17
4	0.166175	3.00	0.440217	1.98	2.095920	1.51
1	2.308600		2.486420		4.017530	
2	1.356570	1.70	1.660530	1.50	3.779500	1.06
3	0.751748	1.80	1.105540	1.50	3.362350	1.12
4	0.376573	2.00	0.685169	1.61	2.564990	1.31

Tabelle 5.7: Die Konvergenzquotienten der einzelnen Fehlernormen für dreidimensionale volle (oben) und dünne Gitter (unten)

verständlich, denn es kommen $2n - 1$ solcher anisotroper Gitterlösungen zum Einsatz, und daher ist die Berechnung von $\mathcal{O}(n2^n)$ Punkten notwendig. Die Komplexität des vollen Gitters liegt dagegen bei $\mathcal{O}(2^{2n})$, wie bereits oben erwähnt wurde. Dieser Mehraufwand geht mit einer erheblich erhöhten Rechenzeit einher. Natürlich ist die Laufzeitdifferenz umso größer, je mehr Zeitschritte und je mehr Nachiterationen berechnet werden. Um diesen Zusatzeffekt möglichst gering zu halten, haben wir für ein zweidimensionales Problem mit einer CRRA-Nutzenfunktion und den Standardparametern $\boldsymbol{\mu} = (0.0392, 0.0488)$, $\sigma = \text{Id}$ nur zwei Zeitschritte berechnet und die Nachiterationen auf 5 reduziert. Die benötigten Rechenzeiten sind in Tabelle 5.6 für die Vollgitter- und die Kombinationslösung gegenübergestellt. Level 1 weist keinen Unterschied auf, da sich die Räume $V_1^{(\infty)}$ und $V_1^{(1)}$ entsprechen. Dagegen kann die Kombinationslösung auf Level 8 in einer Zeitspanne erzeugt werden, die bei Einsatz der Vollgitterrechnung gerade einmal für Level 6 ausreicht.

Zum Abschluss präsentieren wir eine kurze Konvergenztabelle für ein dreidimensionales CRRA-Problem. Aus Tabelle 5.7 kann man oben die Fehler und Konvergenzquotienten für die vollen, anisotropen Gitter ablesen, während sich unten die entsprechenden Werte für die dünnen Gitter finden. Der Aufwand steigt bereits für drei Dimensionen so stark, dass lediglich die Berechnung einer Vollgitter-Referenzlösung auf Level 5 mit einem Zeitschritt möglich war. Auch in drei Dimensionen fällt der Qualitätsverlust der Dünngitter- gegenüber der Vollgitterlösung nicht allzu gravierend aus, der Einfluss des logarithmischen Faktors wird aber sehr viel deutlicher spürbar.

Kapitel 6

Schlussbemerkungen und Ausblick

In dieser Arbeit wurden ökonomisch motivierte stochastische Kontrollprobleme vorgestellt und zwei unterschiedliche Modellierungsansätze betrachtet. Die Nähe der beiden Ansätze wurde hervorgehoben und numerische Verfahren zur Lösung der aus dem kontinuierlichen Ansatz resultierenden nichtlinearen parabolischen HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-Gleichung diskutiert.

Die Wahl der HJB-Gleichung ermöglichte eine universelle Formulierung des volkswirtschaftlichen Kontrollproblems unabhängig von der konkreten Form der eingesetzten Nutzenfunktion und der verwendeten stochastischen Differentialgleichung. Damit konnten unterschiedliche Präferenzstrukturen modelliert werden. Ein mehrdimensionales Marktmodell, das Entscheidungsfindungen in verschiedenen, gekoppelten Ökonomien beschreibt, konnte im Rahmen der optimalen Portfoliowahl als Erweiterung des kontinuierlichen Modells entwickelt und für die HJB-Gleichung aufbereitet werden. Nur für den speziellen Fall einer CRRA-Nutzenfunktion können in einer Dimension analytische Lösungen angegeben werden.

Daher wurde die HAMILTONsche Funktion in der HJB-Gleichung auf anisotropen Gittern mit finiten Differenzen diskretisiert. Ein Downwind-Verfahren sicherte die Stabilität der Diskretisierung trotz degenerierender Koeffizienten und auftretender Konvektionsdominanz, die durch die Wahl der Parameter bedingt ist. Die Verbindung des CRANK-NICOLSON-Verfahrens mit einer Nachiteration erhielt die Konkavität der Lösung aufrecht. Um in mehreren Dimensionen den Aufwand zu reduzieren und den Fluch der Dimension abzumildern, kam die Kombinationstechnik für dünne Gitter zum Einsatz.

Beim Vergleich numerisch berechneter Lösungen mit einer analytischen Referenzlösung wurde der Einfluss des Diskontfaktors, der Drift und der Volatilität untersucht. Gegenüber einer Änderung der Zeitpräferenz in Form des Diskontfaktors zeigt sich das Verfahren vollkommen stabil. Die ℓ_1 - und ℓ_2 -Norm weisen die für Downwind-Diskretisierungen übliche Konvergenzrate von 1 auf und die ℓ_∞ -Norm erreicht die für monotone HAMILTONsche Schemata erwartete Rate von $\frac{1}{2}$. Die Variation der Drift des volatilen Assets und seiner Volatilität beeinflusst dagegen das Konvergenzverhalten der ℓ_1 - und ℓ_2 -Normen. Anhand einer ortsabhängigen Analyse des Fehlers sahen wir, dass die durch zu große Driften oder zu kleine Volatilitäten erzeugte Konvek-

onsdominanz den singularitätsbedingten Randfehler weit in das Gebiet hineinschiebt und damit die Konvergenz der mittelnden Normen bremst. Die ℓ_∞ -Norm konvergiert aber weiterhin stabil mit der Rate $\frac{1}{2}$. In hinreichender Entfernung vom Gebietsrand kann eine lokale Konvergenzrate von 1 gesichert werden. Das optimale Rechengebiet sollte das aktuelle Vermögen folglich möglichst mittig enthalten.

Berechnungen mit einer nicht singulären CARA-Nutzenfunktion bestätigen stabile Konvergenzen auch für größere Driften und kleinere Volatilitäten. Außerdem steigt die Konvergenzrate der ℓ_∞ -Norm auf 1 an. Eine vollkommen robuste Behandlung dieser Nutzenfunktion ist also gewährleistet.

Bei der Berechnung zweidimensionaler Modellprobleme zeigte sich die Konvergenz des Kombinationsansatzes für dünne Gitter als vollkommen zufriedenstellend. Die Ergebnisse lagen bei nur geringem Qualitätsverlust gegenüber der Vollgitterlösung bereits nach deutlich kürzerer Laufzeit vor. Die Kombinationstechnik stellt also eine gute Alternative zu anisotrop diskretisierten stochastischen Kontrollproblemen dar.

Es wurde somit ein robustes Verfahren zur Modellierung und Lösung von mehrdimensionalen Konsum- und Investitionsentscheidungen entwickelt. Es zeichnet sich durch seine Flexibilität beim Einsatz von unterschiedlichen Nutzenfunktionen und stochastischen Prozessen aus, wie durch Berechnungen mit CARA-Nutzenfunktionen demonstriert wurde. Die Verwendung der Kombinationstechnik gewährleistet eine schnelle und genaue Behandlung mehrdimensionaler Problemstellungen.

Als Erweiterung der hier präsentierten Ergebnisse können zusätzliche Modifikationen des Verfahrens vorgenommen werden. Aufgrund der singulären Struktur des CRRA-Problems beeinflusst die adaptive Behandlung des Gebietsrands in Form von gradierten Gittern oder der Einsatz eines Fehlerschätzers und A-posteriori-Adaptivität wahrscheinlich die Konvergenz der mittelnden Normen positiv. Die Wahl der Randwerte kann durch vorherige Berechnung größerer Gebiete und Angleichen der DIRICHLET- oder NEUMANN-Werte für das gewünschte Gebiet angepasst werden. In mehreren Dimensionen ist die Rückführung der linken DIRICHLET-Randwerte auf Lösungen in niedrigeren Dimensionen denkbar. In Bezug auf die Kombinationstechnik sollte eine kanonische Parallelisierung vorgenommen werden, die den Zeitaufwand weiter senkt. Um die behandelten stochastischen Kontrollprobleme noch weiter zu fassen, ist ihre schwache Formulierung und die Betrachtung von Viskositätslösungen zu empfehlen.

Symbolverzeichnis

	a	Skalar
$B = (b_{kl})_{k,l} \in \mathbb{R}^{n \times m}$		$n \times m$ -Matrix, d. h. n Zeilen ($k = 0, \dots, n - 1$) und m Spalten ($l = 0, \dots, m - 1$)
	B^T	Transponierte der Matrix B
	$\text{tr } B$	Spur der Matrix B (siehe Seite 32)
	$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$	Vektor, d. h. $n \times 1$ -Matrix
$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k$		euklidisches Skalarprodukt zweier Vektoren
	$\mathbf{1} := (1, \dots, 1)^T$	n -dimensionaler Vektor, nur aus den Einträgen 1 bestehend
$\mathbf{e}_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$		n -dimensionaler Einheitsvektor in Richtung k
	$\text{Id} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	n -dimensionale Einheitsmatrix
	$(\delta_{kl})_{k,l}$	
	$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	Kronecker-Symbol
	$f^+ := \max\{f, 0\}$	positiver Anteil von f
	$f^- := (-f)^+ \geq 0$	negativer Anteil von f
	$\mathbb{R}^+ := \{x^+ \mid x \in \mathbb{R}\}$	positiver Anteil von \mathbb{R}
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := [a_0, b_0] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \mathbb{R}^n$		n -dimensionaler Quader
	$\text{E}[\cdot]$	Erwartungswert
	$\text{E}[\cdot \mid \cdot]$	bedingter Erwartungswert
	$N(\mu, \sigma)$	eindimensionale Normalverteilung mit Mittel-/Erwartungswert μ und Standardabweichung σ (nicht Varianz σ^2)
	$N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$	mehrdimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Volatilitätsmatrix Σ (nicht Kovarianzmatrix $\Sigma \Sigma^T$)
$\nabla v(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} v(t, \mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} v(t, \mathbf{x}) \right)$		räumliche Ableitung von v an der Stelle (t, \mathbf{x})

$$\mathcal{H}v(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} v(t, \mathbf{x}) \right)_{k,l} \quad \text{räumliche HESSE-Matrix der Funktion } v \text{ an der Stelle } (t, \mathbf{x})$$

Literaturverzeichnis

- [1] BACHELIER, M. L.: *Théorie de la Spéculation*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 17(3):21–86, 1900.
- [2] BARLES, G. und P. E. SOUGANIDIS: *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations*. Asymptotic Analysis, 4:271–283, 1991.
- [3] BARRERA-ESTEVE, C., F. BERGERET, C. DOSSAL, E. GOBET, A. MEZIOU, R. MUNOS und D. REBOUL-SALZE: *Numerical methods for the pricing of Swing options: a stochastic control approach*. to appear in Methodology and Computing in Applied Probability, July 2004.
- [4] BAUER, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter, Berlin, New York, 5 Aufl., 2002.
- [5] BAXTER, M., M. J. CRUCINI und K. G. ROUWENHORST: *Solving the Stochastic Growth Model by a Discrete-State-Space, Euler-Equation Approach*. Journal of Business & Economic Statistics, 8(1):19–21, January 1990.
- [6] BUNGARTZ, H.-J.: *Finite Elements of Higher Order on Sparse Grids*. Habilitationsschrift, Fakultät für Informatik an der Technischen Universität München, July 1998.
- [7] BUNGARTZ, H.-J., M. GRIEBEL, D. RÖSCHKE und C. ZENGER: *Pointwise convergence of the combination technique for the Laplace equation*. East-West J. Numer. Math., 2:21–45, 1994. also as SFB-Bericht 342/16/93A, Institut für Informatik, TU München, 1993.
- [8] BURSTEDDE, C.: *Fast Optimised Wavelet Methods for Control Problems Constrained by Elliptic PDEs*. Doktorarbeit, Institut für Numerische Simulation, Universität Bonn, 2005.
- [9] CAMACHO, C., B. ZOU und M. BRIANI: *On the dynamics of capital accumulation across space*. Working Papers 376, Universität Bielefeld, December 2005.
- [10] CRANDALL, M. G. und P. L. LIONS: *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. Mathematics of Computation, 43(167):1–19, July 1984.

- [11] DAHMEN, W. und A. KUNOTH: *Adaptive Wavelet Methods for Linear–Quadratic Elliptic Control Problems: Convergence Rates*. SIAM Journal of Contr. Optim., 43(5):1640–1675, 2005.
- [12] EVANS, L. C.: *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. Department of Mathematics, UC Berkeley, <http://math.berkeley.edu/~evans/SDE.course.pdf>, 2000.
- [13] FLEMING, W. H. und R. W. RISHEL: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Nr. 1 in *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1975.
- [14] FLEMING, W. H. und H. M. SONER: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Nr. 25 in *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1992.
- [15] FLEMING, W. H. und H. M. SONER: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Nr. 25 in *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 2. Aufl., 2006.
- [16] GARCKE, J.: *Maschinelles Lernen durch Funktionsrekonstruktion mit verallgemeinerten dünnen Gittern*. Doktorarbeit, Institut für Numerische Simulation, Universität Bonn, 2004.
- [17] GASPAR, J. und K. L. JUDD: *Solving large scale rational expectations models*. Technical Working Paper 207, National Bureau of Economic Research, February 1997.
- [18] GIHMAN, I. I. und A. V. SKOROHOD: *Stochastic Differential Equations*. Nr. 72 in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, Berlin, 1972.
- [19] GLASSERMAN, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Nr. 53 in *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 2003.
- [20] GRIEBEL, M., M. SCHNEIDER und C. ZENGER: *A combination technique for the solution of sparse grid problems*. In: GROEN, P. DE und R. BEAUWENS (Hrsg.): *Iterative Methods in Linear Algebra*, S. 263–281. IMACS, Elsevier, North Holland, 1992. also as SFB Bericht, 342/19/90 A, Institut für Informatik, TU München, 1990.
- [21] GROSSMANN, C. und H.-G. ROOS: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 2. Aufl., 1994.
- [22] HACKBUSCH, W.: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1986.

-
- [23] HANKE-BOURGEOIS, M.: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Teubner, 2002.
- [24] HARRIS, C. und D. LAIBSON: *Hyperbolic Discounting and Consumption*. In: DEWATRIPONT, M., L. P. HANSEN und S. TURNOVSKY (Hrsg.): *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, Bd. 1 d. Reihe *Eighth World Congress*, S. 258–298, 2002.
- [25] HEISS, F. und V. WINSCHER: *Smolyak Cubature for Multiple Integration in Estimation Problems*. Working Paper, University of Mannheim, January 2005.
- [26] HIGHAM, D. J.: *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*. SIAM Review, 43(3):525–546, 2001.
- [27] HULL, J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice-Hall, 3 Aufl., 1989.
- [28] JUDD, K. L.: *Projection Methods for Solving Aggregate Growth Models*. Journal of Economic Theory, 58:410–452, 1992.
- [29] JUDD, K. L.: *Approximation, perturbation, and projection methods in economic analysis*. In: AMMAN, H. M., D. A. KENDRICK und J. RUST (Hrsg.): *Handbook of Computational Economics*, Bd. 1, Kap. 12, S. 509–586. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1996.
- [30] JUDD, K. L.: *Solving Dynamic Stochastic Competitive General Equilibrium Models*. Working Paper, Hoover Institution, Stanford University, Nov 2002.
- [31] JUDD, K. L., F. KÜBLER und K. SCHMEDDERS: *Computing equilibria in infinite-horizon finance economies: The case of one asset*. Journal of Economic Dynamics & Control, 24:1047–1078, 2000.
- [32] JUDD, K. L., F. KÜBLER und K. SCHMEDDERS: *Computational Methods for Dynamic Equilibria with Heterogeneous Agents*. In: DEWATRIPONT, M., L. P. HANSEN und S. TURNOVSKY (Hrsg.): *Advances in Economics and Econometrics*, S. 243–290. Cambridge University Press, 2003.
- [33] KARATZAS, I. und S. E. SHREVE: *Methods of Mathematical Finance*. Nr. 39 in *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1998.
- [34] KNUTH, D. E.: *Seminumerical algorithms*, Bd. 2 d. Reihe *The art of computer programming*. Addison-Wesley, Boston, 3 Aufl., 1997.
- [35] KORN, R.: *Optimal Portfolios*. World Scientific Publishing, Singapore, 1997.

- [36] KUSHNER, H. J. und P. G. DUPUIS: *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Nr. 24 in *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1992.
- [37] KWOK, Y.-K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer, Singapore, 1998.
- [38] KÜBLER, F. und K. SCHMEDDERS: *Computing Equilibria in Stochastic Finance Economies*. *Computational Economics*, 15:145–172, 2000.
- [39] LARI-LAVASSANI, A., M. SIMCHI und A. WARE: *A Discrete Valuation of Swing Options*. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 9(1):35–73, Spring 2001.
- [40] LIU, J.: *Portfolio Selection in Stochastic Environments*. Techn. Ber., Stanford University, August 1999.
- [41] LUCAS, JR, R. E.: *Asset prices in an exchange economy*. *Econometrica*, 46:1429–1445, 1978.
- [42] MARCET, A. und G. LORENZONI: *The parameterized expectations approach: Some practical issues*. In: MARIMON, R. und A. SCOTT (Hrsg.): *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Kap. 7, S. 143–171. Oxford University Press, 2001.
- [43] MARIMON, R. und A. SCOTT (Hrsg.): *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Oxford University Press, Oxford, New York, 2001.
- [44] MAS-COLELL, A., M. D. WHINSTON und J. R. GREEN: *Microeconomic theory*. Oxford University Press, New York, 1995.
- [45] MERTON, R. C.: *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*. *Journal of Economic Theory*, 3(4):373–413, December 1971.
- [46] MERTON, R. C.: *Continuous Time Finance*. Blackwell, Cambridge, Mass., Rev. ed., repr. Aufl., 1994.
- [47] MERZ, M. und E. YASHIV: *Labour and the Market Value of the Firm*. CEPR Discussion Papers 4184, C.E.P.R. Discussion Papers, Jan 2004.
- [48] MUNK, C.: *Numerical Methods for Continuous-Time, Continuous-State Stochastic Control Problems*. Working Paper, November 1997.
- [49] MUNK, C.: *The Markov Chain Approximation Approach for Numerical Solution of Stochastic Control Problems: Experiences from Merton's Problem*. Working Paper, January 1998.

-
- [50] MUNK, C. und C. SØRENSEN: *Optimal Consumption and Investment Strategies with Stochastic Interest Rates*. Working Paper 2000-9, Copenhagen Business School, 2000.
- [51] MUNK, C. und C. SØRENSEN: *Optimal Investment Strategies with a Heath-Jarrow-Morton Term Structure of Interest Rates*. Working Paper, February 2000.
- [52] MUNOS, R.: *Consistency of a simple multidimensional scheme for Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. accepted, February 2005.
- [53] MUNOS, R. und A. MOORE: *Variable Resolution Discretization in Optimal Control*. Machine Learning Journal, 49:291–323, 2002.
- [54] PALACIOS-HUERTA, I.: *Consumption and Portfolio Rules under Hyperbolic Discounting*. Research Paper, Brown University, April 2003.
- [55] PLATEN, E.: *On the Role of the Growth Optimal Portfolio in Finance*. Australian Economic Papers, 44(4):365–388, December 2005.
- [56] PRESS, W. H.: *Numerical Recipes in C++*. Cambridge Univ. Press, 2 Aufl., 2002.
- [57] RENDAHL, P.: *Projection Methods and Smolyak's Algorithm*. Term Paper, European University Institute, April 2005.
- [58] RIEDEL, F.: *General Equilibrium Theory and Financial Markets*. Lecture Notes, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, July 2004.
- [59] SEYDEL, R.: *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten: computational finance*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [60] SHU, C.-W.: *High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics*, S. 439–582. Nr. 9 in *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [61] TAYLOR, J. B. und H. UHLIG: *Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods*. Journal of Business & Economic Statistics, 8(1):1–17, January 1990.
- [62] THE MATHWORKS: MATLAB. <http://www.mathworks.de/products/matlab/>, November 2006.
- [63] WEGNER, T., U. DÖRR und A. WERNER: *Risikomanagement mit Schwung*. e|n|w Zeitschrift für Energie, Markt, Wettbewerb, December 2003.

- [64] WINSCHEL, V.: *Solving, Estimating and Selecting Nonlinear Dynamic Economic Models without the Curse of Dimensionality*. Jobmarket Paper, November 2005.
- [65] YONG, J. und X. Y. ZHOU: *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Nr. 43 in *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1999.

Index

- Abzinsung, 58
- Aktie
 - Drift, 56
 - Volatilität, 56
- Bedingung
 - Budget~, 59, 61
 - INADA-, 10
- Bond, 56
 - festverzinslicher, 57
- BROWNSche Bewegung mit Drift, 55
 - EULER-Approximation, 56
 - geometrische, 55
 - ITÔ-TAYLOR-Approximation, 56
 - mehrdimensionale geometrische, 63
- Budgetbedingung, 59, 61
- Diskont
 - ~faktor, 10
 - ~funktion, 9, 32
 - ~ierung, 58
- Drift, 55
 - einer Aktie, 56
- Ertragsrate, 61
- Fluch der Dimension, 46
- Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen, *siehe* GOSSENSches Gesetz
- Gitter
 - dünnes, 46
 - gradiertes, 88
 - reguläres anisotropes, 46
- GOSSENSches Gesetz, 10, 82
- Grenznutzen, 72
- HJB-Gleichung, 28
- INADA-Bedingung, 10
- ITÔ-Formel, *siehe* ITÔ-Lemma
- ITÔ-Lemma, 29
- Konsum, 58
- Kontrolle, 12
 - in Feedback-Form, 13
 - optimale, 12
- Korrelationsmatrix, 62
- Leerverkauf, 59
- Lemma von ITÔ, 29
- Markt
 - im diskreten Modell, 53
 - im kontinuierlichen Modell, 61
 - ~parameter, 58
 - Vollständigkeit, 62
- Modell
 - diskretes, 53
 - kontinuierliches, 61
- Nachiteration, 41
- Nutzen
 - ~funktion, 10
 - VON-NEUMANN-MORGENSTERN-
~, 10
 - Grenz~, 72

Index

- marginaler, 72
 - ~maximierungsproblem, 69
- optimale Kontrolle, 12
- policy space, 41
- Rücklaufquote, 61
- rate of return, 61
- Rendite, 61
- Risikoaversion, 11
- Steigerungsrate, 60
- Strategie, 12
 - globale, 59
 - kurzfristige, 59
- Varianz, 55
- Vermögen, 58, 65
 - ~sgleichung, 58, 61, 65
 - ~sprozess, 66
- Verzinsung
 - kontinuierliche, 57
- Volatilität
 - einer Aktie, 56
 - ~smatrix, 63
- Vollständigkeit eines Marktes, 62
- Wertsteigerungsrate, 60
- WIENER-Prozess, 54
- Zins, 56, 57